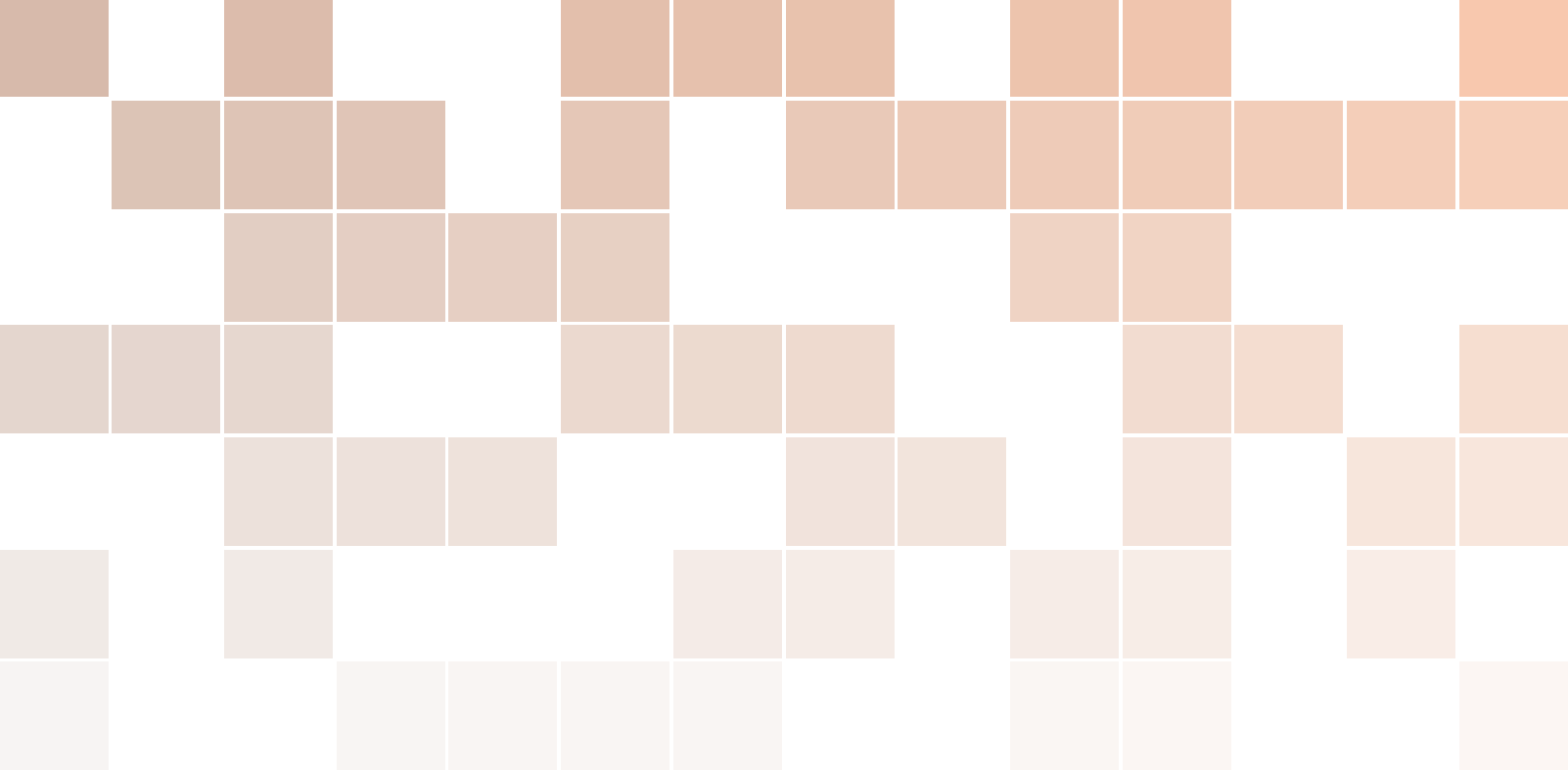
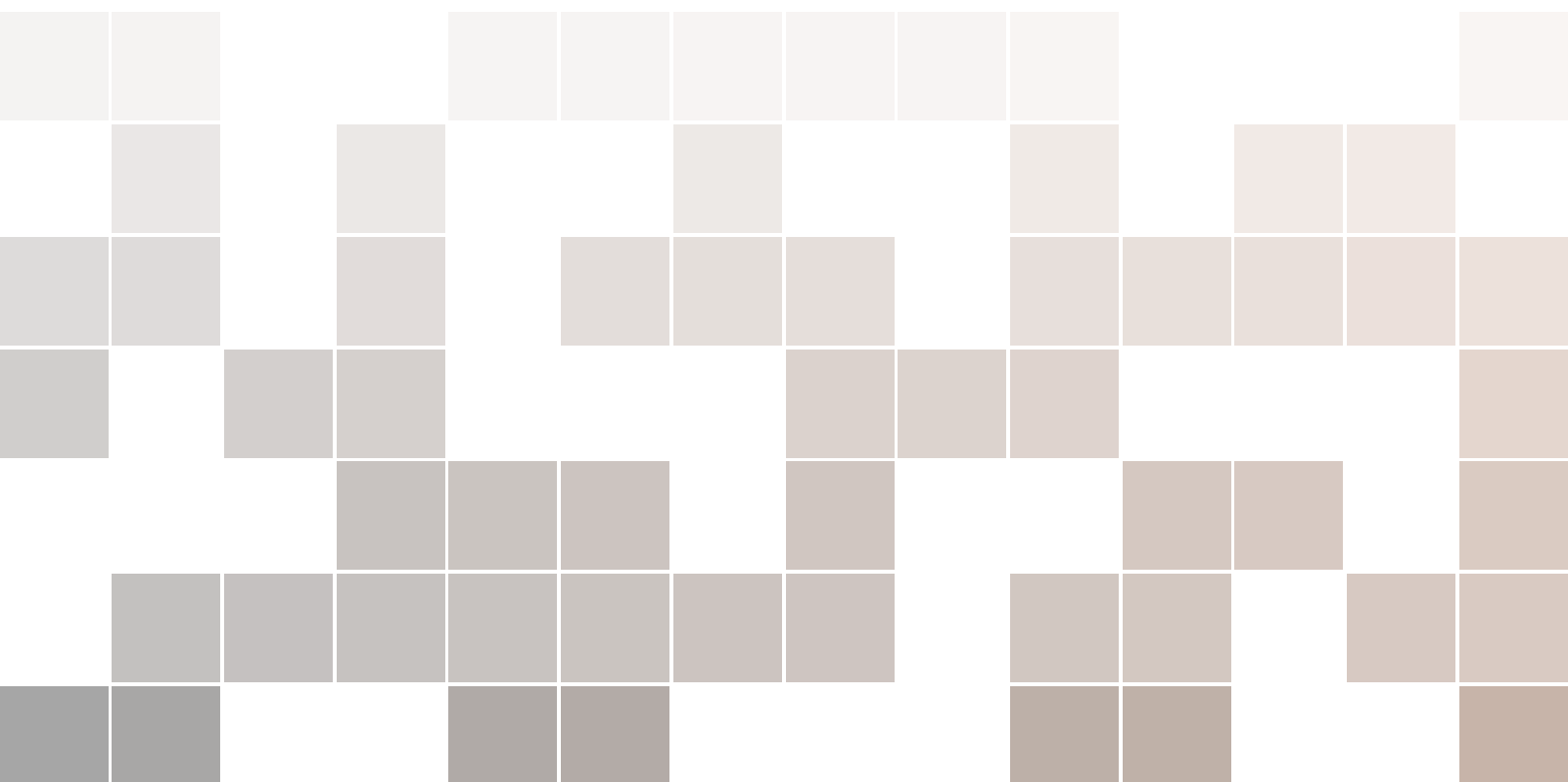




Mathématiques

Terminale STI2D

Kevin Cauvin



Copyright © 2026 Kevin Cauvin

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0> ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Troisième impression, Juillet 2026

Table des matières

S Analyse réelle (suites)

S	Suites arithmétiques et géométriques	7
S.1	Suites arithmétiques	7
S.1.1	Rappels de Première : définition et premiers exemples	7
S.1.2	Somme des premiers termes d'une suite arithmétique, notation Σ	8
S.2	Suites géométriques à termes positifs	8
S.2.1	Rappels de Première : définition et premiers exemples	8
S.2.2	Somme des premiers termes d'une suite géométrique, notation Σ	9

F Analyse réelle (fonctions)

F1	Fonctions exponentielles de base a	13
F1.1	Généralités, propriétés algébriques	13
F1.2	Application à la détermination d'un taux d'évolution moyen	14
F2	Fonction exponentielle de base e	15
F2.1	Généralités, propriétés algébriques	15
F2.2	Composition avec la fonction exponentielle de base e	16
F2.3	Limites et croissances comparées	16
F3	Fonction logarithme népérien	17
F3.1	Généralités, propriétés algébriques	17
F3.2	Limites et croissances comparées	18
F4	Fonction logarithme décimal	19
F4.1	Généralités, propriétés algébriques	19
F4.2	Application aux échelles logarithmiques et semi-logarithmiques	20

F5	Fonction inverse	21
F6	Équations différentielles	23
F6.1	Qu'est-ce qu'une équation différentielle?	23
F6.2	Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants	23
F7	Intégration	25
F7.1	Définition, premières propriétés	25
F7.2	Interprétation graphique : calcul d'aires	26
F7.3	Application : valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle	27
F8	Composition de fonctions	29
F8.1	Identifier une fonction composée	29
F8.2	Dérivée et primitive d'une fonction composée	30

G**Géométrie complexe**

G1	Formes d'un nombre complexe	33
G1.1	Rappels de Première : forme algébrique, conjugué	33
G1.2	Rappels de Première : forme trigonométrique	34
G1.3	Forme exponentielle d'un nombre complexe	34
G2	Nombres complexes, trigonométrie	35
G2.1	Formules de trigonométrie	35
G2.2	Expression complexe des transformations du plan	36

SP**Statistiques et probabilités**

SP1	Probabilités conditionnelles, indépendance	39
SP1.1	Calcul de probabilités élémentaires	39
SP1.2	Probabilités conditionnelles, arbre pondéré	40
SP1.3	Indépendance de deux événements	41
SP2	Variables aléatoires discrètes	43
SP2.1	Rappels de Première : espérance d'une variable aléatoire discrète.	43
SP2.2	Rappels de Première : schéma de Bernoulli, loi binomiale	44
SP2.3	Coefficients binomiaux, application à la loi binomiale	45
SP3	Statistiques à deux variables	47
SP3.1	Généralités, représentation graphique	47
SP3.2	Corrélation et ajustements	48

S Analyse réelle (suites)

S	Suites arithmétiques et géométriques . . .	7
S.1	Suites arithmétiques	7
S.2	Suites géométriques à termes positifs	8

S. Suites arithmétiques et géométriques

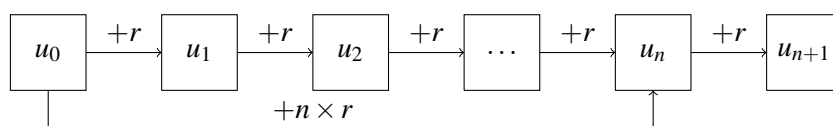
S.1 Suites arithmétiques

S.1.1 Rappels de Première : définition et premiers exemples

Définition S.1 On dit qu'une suite est *arithmétique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r .
2. Il existe un nombre réel, noté r , tel que $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r (qui peut être positif, ou négatif) est alors appelé *raison de la suite*.



■ **Exemple S.1** On considère la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$ et $u_4 = \dots$

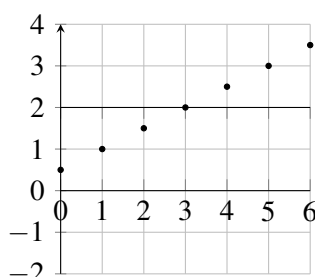
■ **Exemple S.2** On considère la suite arithmétique de raison $r = -5$ telle que $u_0 = 100$.
Calculer $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$ et $u_4 = \dots$

Proposition S.1 Si u est une suite arithmétique de raison r , il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n , suivant que le premier terme soit u_0 ou u_p :

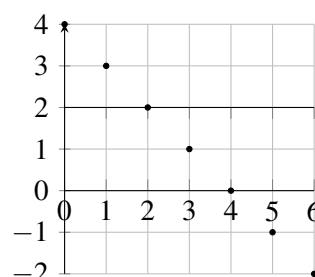
$$u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

■ **Exemple S.3** On considère la suite arithmétique de raison $r = 14$ telle que $u_0 = 5$.
La formule explicite est $u_n = \dots$. On en déduit que $u_{300} = \dots$

Proposition S.2 Dans un repère, les points représentant une suite arithmétique sont alignés.



Si $r > 0$, u est strictement croissante.



Si $r < 0$, u est strictement décroissante.

S.1.2 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique, notation Σ

Proposition S.3 Si u est une suite arithmétique de raison r , la somme de quelques termes consécutifs de cette suite est donnée par :

$$\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = \text{Nb de termes} \times \frac{\text{1}^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{Dernier terme de la somme}}{2}$$

■ **Exemple S.4** Yannis travaille pour une grande entreprise de télécommunications mobile. Dans le contrat signé avec l'entreprise, il est spécifié que son salaire annuel est de 25 000 € bruts la première année et que, chaque année, son salaire annuel augmentera de 150 € bruts. On note y_n le salaire de Yannis n années après son embauche. Yannis se pose la question suivante : « Combien l'entreprise m'aura-t-elle payé après dix ans de travail ? ».

.....

.....

.....

.....

.....

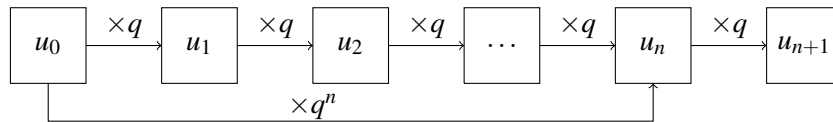
S.2 Suites géométriques à termes positifs

S.2.1 Rappels de Première : définition et premiers exemples

Définition S.2 On dit qu'une suite est *géométrique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre $q \neq 0$.
2. Il existe un nombre réel non nul, noté q , tel que $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le nombre q est alors appelé *raison de la suite*.



■ **Exemple S.5** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_0 = 1$.

Calculer $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$ et $u_4 = \dots$.

■ **Exemple S.6** On considère la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $u_0 = 1\,000$.

Calculer $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$ et $u_4 = \dots$.



À chaque fois qu'une grandeur évolue à plusieurs reprises de $\pm T\%$, on peut modéliser sa valeur à l'aide d'une suite géométrique de raison $q = 1 \pm \frac{T}{100}$, correspondant au *coefficient multiplicateur associé à une évolution de $\pm T\%$* .

■ **Exemple S.7** Une plante invasive colonise une zone naturelle. On observe que sa surface augmente de 12% chaque année. Au début de l'année 2026, cette plante couvre une surface de 250 m². On note u_n la surface (en m²) occupée par la plante au début de l'année 2026 + n .

1. Donner la raison de cette suite géométrique : $q = \dots$
2. Calculer $u_1 = \dots$

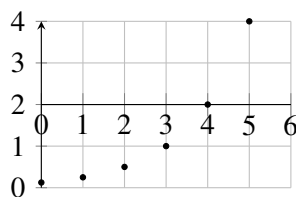
Proposition S.4 Si u est une suite géométrique de raison q , il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n , suivant que le premier terme soit u_0 ou u_p :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

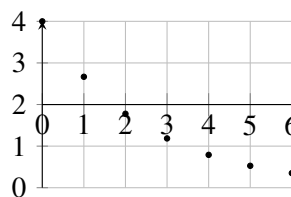
■ **Exemple S.8** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_1 = \frac{1}{32}$.

La formule explicite est $u_n = \dots$. On en déduit que $u_{15} = \dots$.

Proposition S.5 Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.



Si $q > 1$, u est strictement croissante.



Si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante.

S.2.2 Somme des premiers termes d'une suite géométrique, notation Σ

Proposition S.6 Si u est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, la somme de quelques termes consécutifs de cette suite est donnée par :

$$\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{Nb de termes}}}{1 - q}$$

■ **Exemple S.9** Voici un texte extrait de Wikipedia.

En Inde, le roi Belkib (ou Bathait), qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire. Le sage Sissa invente alors le Chaturanga, l'ancêtre du jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met.

Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande. Le roi tente de persuader Sissa d'accepter une récompense d'une valeur plus importante. Devant le refus de Sissa, il ordonne que les grains soient apportés. Mais lorsqu'on met en œuvre la demande, on s'aperçoit qu'il n'y a pas assez de grains de riz dans tout le royaume pour la satisfaire.

1. Justifier que le nombre de grains de riz disposé sur la n -ème case de l'échiquier peut se modéliser par une suite u , dont on spécifiera le type, et le premier terme.

.....

2. Déterminer le nombre de grains de riz permettant de recouvrir les 64 cases de l'échiquier.

.....

F Analyse réelle (fonctions)

F1	Fonctions exponentielles de base a	13
F1.1	Généralités, propriétés algébriques	13
F1.2	Application à la détermination d'un taux d'évolution moyen	14
F2	Fonction exponentielle de base e	15
F2.1	Généralités, propriétés algébriques	15
F2.2	Composition avec la fonction exponentielle de base e	16
F2.3	Limites et croissances comparées	16
F3	Fonction logarithme népérien	17
F3.1	Généralités, propriétés algébriques	17
F3.2	Limites et croissances comparées	18
F4	Fonction logarithme décimal	19
F4.1	Généralités, propriétés algébriques	19
F4.2	Application aux échelles logarithmiques et semi-logarithmiques	20
F5	Fonction inverse	21
F6	Équations différentielles	23
F6.1	Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?	23
F6.2	Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants	23
F7	Intégration	25
F7.1	Définition, premières propriétés	25
F7.2	Interprétation graphique : calcul d'aires	26
F7.3	Application : valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle	27
F8	Composition de fonctions	29
F8.1	Identifier une fonction composée	29
F8.2	Dérivée et primitive d'une fonction composée	30

F1. Fonctions exponentielles de base a

F1.1 Généralités, propriétés algébriques

Définition F1.1 Soit a un nombre strictement positif. La fonction exponentielle de base a est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$.

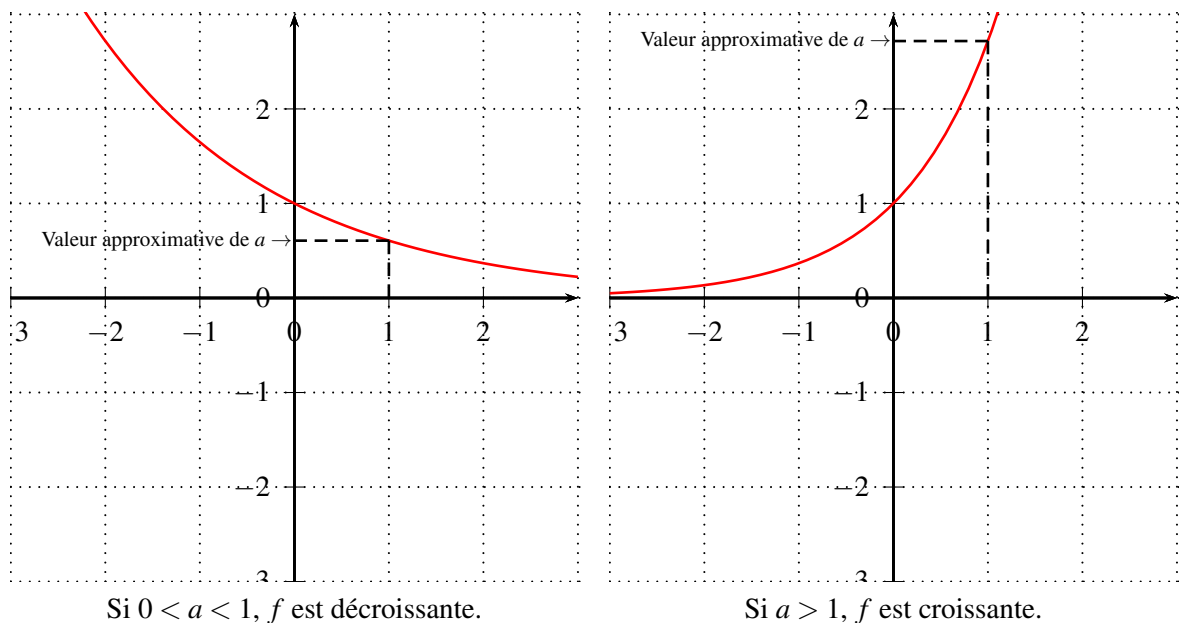
Proposition F1.1 Soient a un nombre strictement positif, x et y deux nombres positifs et n un entier relatif.

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^1 = a \quad ; \quad a^x \times a^y = a^{x+y} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad (a^x)^n = a^{nx} \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

■ **Exemple F1.1** Sans calculatrice, simplifier les expressions suivantes.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $1,5^2 \times 1,5^4 = \dots\dots\dots$ | 3. $(1,25^3)^5 = \dots\dots\dots$ | 5. $0,96^4 \times 0,96^3 = \dots\dots\dots$ |
| 2. $\frac{2^6}{2^3} = \dots\dots\dots$ | 4. $\frac{1,08^{11}}{1,08^7} = \dots\dots\dots$ | 6. $\left(\frac{1}{8}\right)^8 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \dots\dots\dots$ |

Proposition F1.2 Le sens de variation d'une fonction exponentielle dépend de sa base a .



Proposition F1.3 Multiplier l'expression d'une fonction exponentielle par un nombre k change son sens de variation si, et seulement si, $k < 0$.

■ **Exemple F1.2** Parmi les fonctions suivantes, préciser leur sens de variation.

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $f_1(x) = 1, 1^x$. | ☐ Croissante. | ☐ Décroissante. |
| 2. $f_2(x) = -2, 25 \times 0, 88^x$. | ☐ Croissante. | ☐ Décroissante. |
| 3. $f_3(x) = 3 \times 0, 5^x$. | ☐ Croissante. | ☐ Décroissante. |
| 4. $f_4(x) = 1, 25 \times 1, 03^x$. | ☐ Croissante. | ☐ Décroissante. |
| 5. $f_5(x) = -0, 5 \times 1, 25^x$. | ☐ Croissante. | ☐ Décroissante. |

F1.2 Application à la détermination d'un taux d'évolution moyen

Définition F1.2 Soient a un nombre strictement positif et n un entier naturel non nul. La *racine n -ème* de a est l'unique solution strictement positive de l'équation $x^n = a$. On la définit ainsi :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

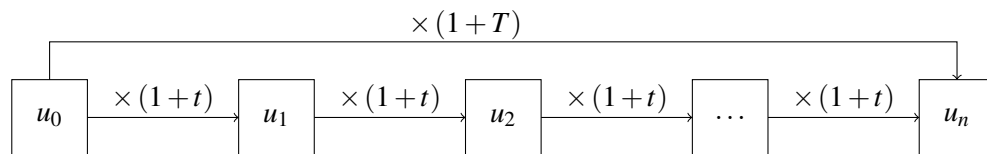
■ **Exemple F1.3** Trouver une valeur approchée de la solution à l'équation $(1+t)^3 = 1, 1$.

.....

.....

.....

Définition F1.3 On suppose qu'une quantité subit une évolution dont le taux est T . Le *taux moyen sur n périodes* est le taux t qu'il faudrait appliquer n fois à cette quantité, pour être équivalent à T .



Si le taux global est T sur n périodes, alors le taux moyen t vérifie $(1+t)^n = 1+T$.

■ **Exemple F1.4** On admet que le taux d'évolution global de la masse d'EMPCS (emballages ménagers en plastique issus de la collecte sélective) recyclés entre 2011 et 2016 est de 23 %. En déduire le taux d'évolution annuel moyen de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016.

.....

.....

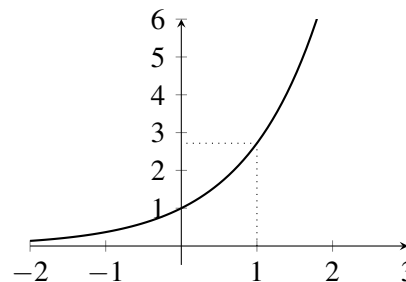
.....

F2. Fonction exponentielle de base e

F2.1 Généralités, propriétés algébriques

Proposition F2.1 La fonction exponentielle, notée $\exp$, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$. Elle est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Définition F2.1 On appelle *base de l'exponentielle népérienne* le nombre, noté e , tel que $e = \exp(1) \approx 2,72$.



Désormais, on notera la fonction exponentielle sous la forme d'une puissance, au lieu d'utiliser la notation $\exp$, pour ne pas alourdir le cours. On retiendra que e^x et $\exp x$ désignent le même nombre.

Proposition F2.2 Soient x et y deux nombres positifs et n un entier relatif.

$$e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e \quad ; \quad e^x \times e^y = e^{x+y} \quad ; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad ; \quad (e^x)^n = e^{nx} \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

■ **Exemple F2.1** Sans calculatrice, simplifier les expressions suivantes.

- | | | |
|---|--|---------------------------------------|
| 1. $e^2 \times e^4 = \dots\dots\dots$ | 3. $(e^3)^5 = \dots\dots\dots$ | 5. $e^8 \times e^2 = \dots\dots\dots$ |
| 2. $\frac{e^9}{e^{16}} = \dots\dots\dots$ | 4. $\frac{e^{11}}{e^{-7}} = \dots\dots\dots$ | 6. $\frac{1}{e^2} = \dots\dots\dots$ |

■ **Exemple F2.2** Déterminer l'écriture la plus simplifiée de $A(x)$ en fonction de x .

$$A(x) = \frac{e^{2x+3} \times (e^{2x})^2}{e^x \times e^5} = \dots\dots\dots$$

F2.2 Composition avec la fonction exponentielle de base e

Proposition F2.3 On note k un nombre réel quelconque. La fonction f définie par $f(x) = e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est définie par $f'(x) = ke^{kx}$.

1. Si $k > 0$, alors f est strictement croissante.
2. Si $k < 0$, alors f est strictement décroissante.

■ **Exemple F2.3** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{-2x}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Étudier le signe de f' , puis en déduire les variations de f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		
Variations de f		

F2.3 Limites et croissances comparées

Proposition F2.4 On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Proposition F2.5 On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ 0^+ & \text{si } k < 0 \end{cases}$.

Proposition F2.6 Pour tout $\alpha > 0$, on a les « croissances comparées » suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

On retiendra cette proposition de la manière suivante : « *L'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances.* ».

■ **Exemple F2.4** Déterminer, en le justifiant, la valeur de $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x} - \frac{1}{e^{2x}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

F3. Fonction logarithme népérien

F3.1 Généralités, propriétés algébriques

Définition F3.1 Pour tout réel $a > 0$, on admet que l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, notée $\ln a$, et appelée *logarithme népérien de a* . Par extension, la fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$, associe, à tout nombre réel x strictement positif, le nombre réel $\ln(x)$.

■ **Exemple F3.1** Dédurre, de la définition précédente, les valeurs exactes de $\ln 1$ et de $\ln e$.

.....

.....

.....

.....

.....

Proposition F3.1 La fonction logarithme népérien est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle, c'est-à-dire que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.
2. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

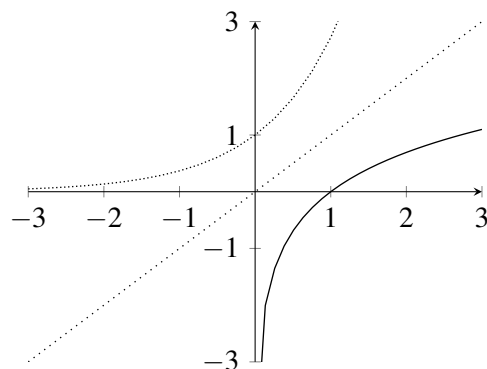
R Une conséquence de cette proposition est que la courbe de la fonction exponentielle est la symétrique de la fonction logarithme népérien par rapport à la première bissectrice du repère.

Proposition F3.2 La dérivée de la fonction $\ln$ est donnée pour tout $x > 0$ par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Proposition F3.3 Les courbes de la fonction $\exp$ (pointillés) et de la fonction $\ln$ (trait plein) sont données ci-contre. On en déduit que la fonction $\ln$ est :

1. strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
2. strictement négative sur $]0; 1[$,
3. strictement positive sur $]1; +\infty[$.



Proposition F3.4 Soient x et y deux nombres strictement positifs et n un entier relatif.

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y; \ln(x^n) = n \ln x; \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x; \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

■ **Exemple F3.2** Écrire, le plus simplement possible, le nombre $A = 6 \ln 16 - \ln\left(\frac{1}{8}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

F3.2 Limites et croissances comparées

Proposition F3.5 On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Proposition F3.6 Pour tout $\alpha > 0$, on a les « croissances comparées » suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+$$

On retiendra cette proposition de la manière suivante : « *Les fonctions puissances l'emportent sur la fonction logarithme népérien.* ».

F4. Fonction logarithme décimal

F4.1 Généralités, propriétés algébriques

Définition F4.1 Pour tout réel $a > 0$, on admet que l'équation $10^x = a$ admet une unique solution, notée $\log a$, et appelée *logarithme décimal de a* . Par extension, la fonction *logarithme décimal*, notée $\log$, associe, à tout nombre réel x strictement positif, le nombre réel $\log(x)$.

■ **Exemple F4.1** Dédurre, de la définition précédente, les valeurs exactes de $\log 10$ et $\log 100$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Proposition F4.1 La fonction logarithme décimal est la *fonction réciproque* de la fonction « puissance de 10 », c'est-à-dire que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\log 10^x = x$.
2. Pour tout $x > 0$, $10^{\log x} = x$.

Proposition F4.2 La fonction $\log$ peut s'exprimer en fonction de $\ln$, pour tout $x > 0$, par :

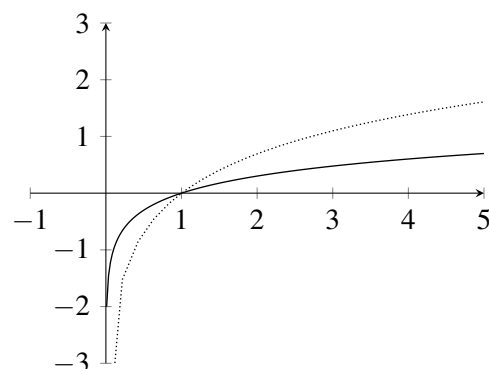
$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La dérivée de la fonction $\log$ est donc donnée, pour tout $x > 0$, par :

$$\log'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$$

Proposition F4.3 Les courbes de la fonction $\ln$ (pointillés) et de la fonction $\log$ (trait plein) sont données ci-contre. On en déduit que la fonction $\log$ est :

1. strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
2. strictement négative sur $]0; 1[$,
3. strictement positive sur $]1; +\infty[$.



Proposition F4.4 Soient x et y deux nombres strictement positifs et n un entier relatif.

$$\log(x \times y) = \log x + \log y; \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y; \log(x^n) = n \log x; \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x; \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$$

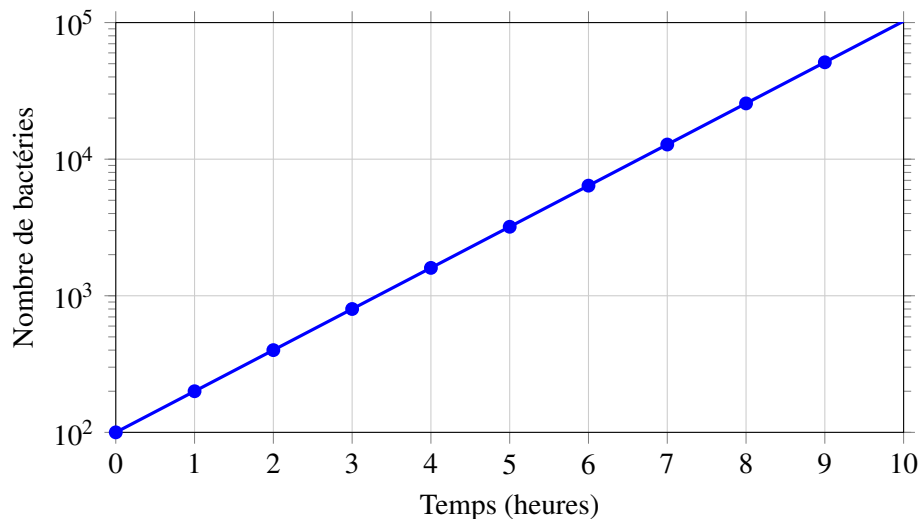
F4.2 Application aux échelles logarithmiques et semi-logarithmiques



Lorsque les valeurs d'une grandeur varient très rapidement (croissance exponentielle, intensité sonore, séismes, etc.), une représentation sur une échelle linéaire devient difficile à lire. On utilise alors une *échelle logarithmique*.

Dans une *échelle semi-logarithmique*, un seul axe (généralement l'axe des ordonnées) est gradué selon une échelle logarithmique, tandis que l'autre reste linéaire.

Cette représentation présente un intérêt majeur : une évolution exponentielle apparaît sous la forme d'une droite, ce qui facilite l'analyse et la détermination de son taux de croissance.



Dans ce graphique, le nombre de bactéries double chaque heure. Bien que la croissance soit exponentielle, les points sont alignés sur une droite grâce à l'utilisation de l'échelle semi-logarithmique.

F5. Fonction inverse

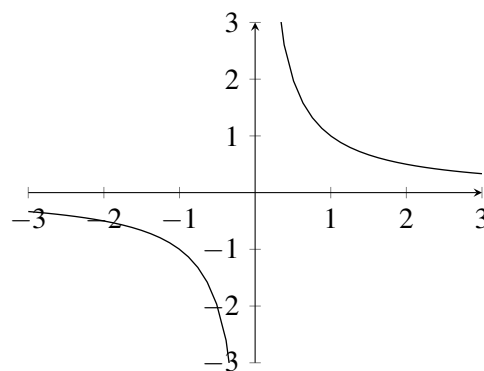
Définition F5.1 La fonction *inverse* est la fonction définie pour tout nombre $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition F5.1 La dérivée de la fonction inverse est donc donnée, pour tout $x \neq 0$, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

La courbe de la fonction inverse, appelée *hyperbole*, est donnée ci-contre. Elle est symétrique par rapport à l'origine du repère. De plus, la fonction inverse est :

1. décroissante et négative sur $\mathbb{R}_*^-$,
2. décroissante et positive sur $\mathbb{R}_*^+$.



■ **Exemple F5.1** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Compléter les tableaux de valeurs suivants.

x	1	10	100	1000	x	1	0,1	0,01	0,001
$\frac{1}{x}$					$\frac{1}{x}$				

2. Du premier tableau, on peut en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$

On dira que la droite d'équation $y = 0$ est *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. On peut prouver de même que la droite d'équation $y = 0$ est *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

3. Du deuxième tableau, on peut en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$

On dira que la droite d'équation $x = 0$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}_f$.

Proposition F5.2 On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$.

F6. Équations différentielles

F6.1 Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Définition F6.1 Une *équation différentielle* est une équation, dont l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une égalité liant cette fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées successives. *Résoudre une équation différentielle*, c'est déterminer l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

■ **Exemple F6.1** On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 3y - 12$. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 4e^{3x} + 4$ est solution de l'équation différentielle (E) .

.....

.....

.....

F6.2 Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Théorème F6.1 Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme suivante, où $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

- **Exemple F6.2** On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 100y = 8$.
1. Déterminer la solution v définie sur $[0 ; +\infty[$ de cette équation différentielle, qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.
-
-
-
-
-
-
2. En réalité, la fonction v modélise la vitesse (en m.s^{-1}) de chute d'une bille dans un liquide visqueux, en fonction du temps t écoulé depuis le début de la chute (en s). Déterminer la vitesse, arrondie à $0,001 \text{ m.s}^{-1}$, de la bille après $0,01$ seconde de chute.
-

F7. Intégration

F7.1 Définition, premières propriétés

Définition F7.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle *intégrale de f sur $[a; b]$* le nombre réel suivant, où F désigne une primitive quelconque de f :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

■ **Exemple F7.1** Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 2x dx.$

.....

.....

.....

2. $\int_0^1 e^x dx.$

.....

.....

.....

Théorème F7.1 — Théorème fondamental de l'analyse. Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, alors la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Autrement dit, $F(a) = 0$ et $F'(x) = f(x)$ sur $[a; b]$.

Proposition F7.1 Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

1. **Relation de Chasles.** Si $a \leq b \leq c$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
2. **Linéarité.** $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.
3. **Positivité.** Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

■ **Exemple F7.2** Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$, où f est la fonction ainsi définie sur $[-1; 1]$:

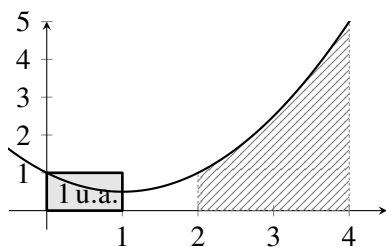
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

F7.2 Interprétation graphique : calcul d'aires

Proposition F7.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

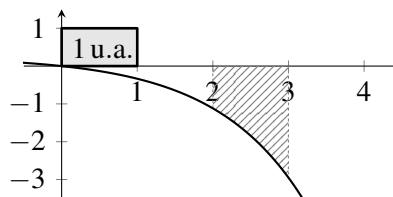
1. Si f est positive sur $[a; b]$, alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$



2. Si f est négative sur $[a; b]$, alors :

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$$



3. Si f change de signe sur $[a; b]$, alors $\mathcal{A}$ est la somme des aires sur chaque domaine où f est de signe constant.

■ **Exemple F7.3** On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-3}$.

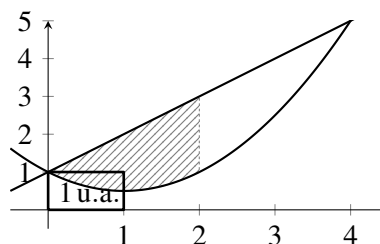
1. Sans justifier, donner le signe de f sur l'intervalle $[4; 6]$.
2. En déduire la valeur de l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 4$ et $x = 6$.

.....

Proposition F7.3 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$, telles que $f \leq g$.

L'aire du domaine, exprimé en unités d'aires, compris entre la courbe de f , la courbe de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



■ **Exemple F7.4** On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = e^x$. On admettra que, pour tout réel x , on a $e^x \geq x + 1$. Calculer l'aire, en unité d'aire, de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1 \leq y \leq e^x \end{cases}$$

.....

F7.3 Application : valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition F7.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle *valeur moyenne de f sur $[a; b]$* le nombre réel suivant :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

■ **Exemple F7.5** Un capteur délivre une tension périodique modélisée, sur une période de durée $T = 20\text{ms}$, par la fonction :

$$u(t) = 2 + 3 \sin(100\pi t)$$

où $u(t)$ est exprimée en volts, et t en secondes. Calculer la valeur moyenne de $u(t)$ sur une période :

$$\bar{u} = \frac{1}{0,02} \int_0^{0,02} u(t) dt$$

.....

.....

.....

.....

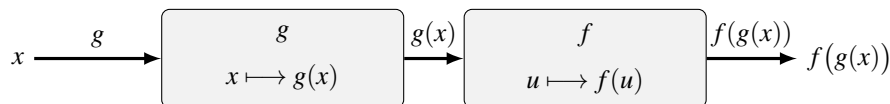
.....

.....

F8. Composition de fonctions

F8.1 Identifier une fonction composée

Définition F8.1 Soient f et g deux fonctions. On appelle *composée de f et g* , notée $f \circ g$, la fonction définie par $f \circ g(x) = f(g(x))$.



$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

■ **Exemple F8.1** On note u la fonction définie par $u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Compléter la phrase suivante :

« La fonction u est une composée de la forme $f \circ g$,
où f et g sont définies par $f(x) = \dots\dots\dots$ et $g(x) = \dots\dots\dots$ ».

■ **Exemple F8.2** On note f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. Définir les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

.....	
.....	
.....	
.....	

■ **Exemple F8.3** On note f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Définir les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

.....	
.....	
.....	
.....	

[illegible]

Géométrie complexe

G1 Formes d'un nombre complexe 33

- G1.1 Rappels de Première : forme algébrique, conjugué 33
- G1.2 Rappels de Première : forme trigonométrique 34
- G1.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe 34

G2 Nombres complexes, trigonométrie . . 35

- G2.1 Formules de trigonométrie 35
- G2.2 Expression complexe des transformations du plan 36

G1. Formes d'un nombre complexe

G1.1 Rappels de Première : forme algébrique, conjugué

Définition G1.1 On note i le nombre, appelé *unité imaginaire*, tel que $i^2 = -1$.

Définition G1.2 Un *nombre complexe* est un nombre qui s'écrit de manière unique sous une *forme algébrique* $z = a + ib$, où :

1. a est la *forme algébrique* de z . Si $a = 0$, z est appelé *imaginaire pur*.
2. b est la *partie imaginaire* de z . Si $b = 0$, z est un nombre réel.

On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition G1.3 Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, son *conjugué* est $\bar{z} = a - ib$.



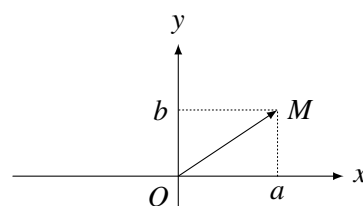
Pour additionner, soustraire ou multiplier deux nombres complexes, on procède « comme dans $\mathbb{R}$ ». Pour diviser deux nombres complexes, on multipliera d'abord le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

■ **Exemple G1.1** On pose $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -3 + 2i$.

1. Calculer $z_1 + z_2$: et $z_1 - z_2$:
2. Calculer $z_1 \times z_2$:
.....
.....
3. Calculer $\frac{z_1}{z_2}$:
.....
.....
.....
.....

Définition G1.4 Le *plan complexe* est le plan où l'axe des abscisses est l'*axe réel* et l'axe des ordonnées est l'*axe imaginaire*.

À un nombre complexe $z = a + ib$, on associe un *point image* $M(a; b)$. On dira que z est l'*affixe* de M et de $\overrightarrow{OM}$.



G1.2 Rappels de Première : forme trigonométrique

Définition G1.5 On suppose que M est un point du plan complexe, d'affixe $z = a + ib \neq 0$.

1. Son *module* est le nombre réel positif défini par :

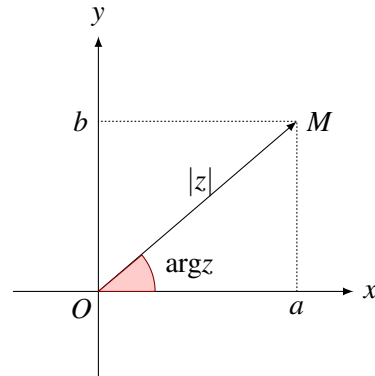
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il mesure la distance OM du point M par rapport à l'origine.

2. Un *argument* de z est un nombre réel, noté $\arg z$ ou θ , tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

Il mesure l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.



3. Tout nombre complexe $z \neq 0$ a une *forme trigonométrique*, qui est une écriture de la forme $z = |z| \times (\cos \theta + i \sin \theta)$.

■ **Exemple G1.2** Écrire le nombre complexe $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ sous forme algébrique.

■ **Exemple G1.3** Écrire le nombre complexe $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

G1.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition G1.6 Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Tout nombre complexe $z \neq 0$ a une *forme exponentielle*, qui est une écriture de la forme $z = |z| e^{i\theta}$.

■ **Exemple G1.4** On reprend les nombres complexes des exemples G1.2 et G1.3.

1. Donner une écriture exponentielle de $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$:
2. Donner une écriture exponentielle de $z = -2 + 2i\sqrt{3}$:

Proposition G1.1 Les propriétés de la fonction exponentielle sont conservées, c'est-à-dire que pour tous θ et θ' réels, et n entier naturel, on a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \quad ; \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \quad ; \quad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} \quad ; \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

■ **Exemple G1.5** On reprend les nombres complexes des exemples G1.2 et G1.3. Exprimer le produit suivant sous forme exponentielle.

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \times (-2 + 2i\sqrt{3}) = \dots\dots\dots$$

G2. Nombres complexes, trigonométrie

G2.1 Formules de trigonométrie

Proposition G2.1 Les formules d'addition ci-dessous sont valables pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

■ **Exemple G2.1** On remarque que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$.

.....

2. Calculer la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$.

.....

Proposition G2.2 Les formules de soustraction ci-dessous sont valables pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

■ **Exemple G2.2** On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

.....

2. Calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.

.....

Proposition G2.3 Les formules de duplication ci-dessous sont valables pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

■ **Exemple G2.3** Démontrer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la formule $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

.....

Proposition G2.4 Les formules de linéarisation ci-dessous sont valables pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$$

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$$

■ **Exemple G2.4** Démontrer que $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.

.....

.....

.....

.....

.....

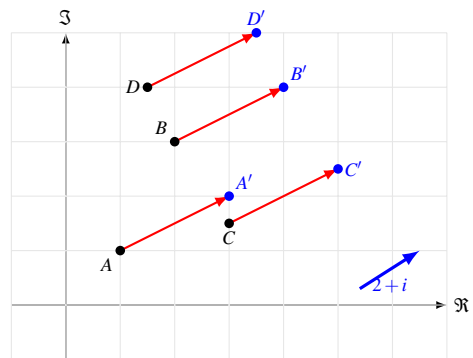
.....

G2.2 Expression complexe des transformations du plan

Proposition G2.5 Il existe des fonctions complexes f qui transforment n'importe quel point $M(z)$ du plan complexe en un autre point $M'(f(z))$ via une transformation géométrique particulière.

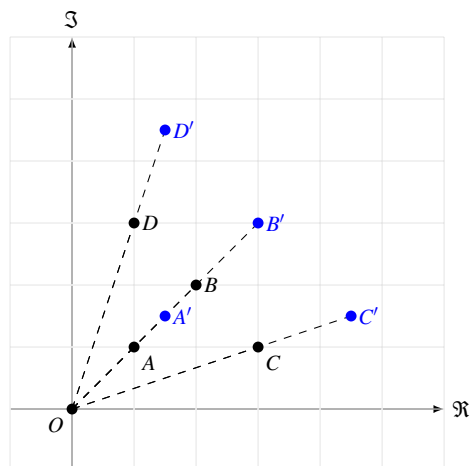
1. La translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$ peut se modéliser par la fonction définie par :

$$f(z) = z + u, \quad u = a + ib$$



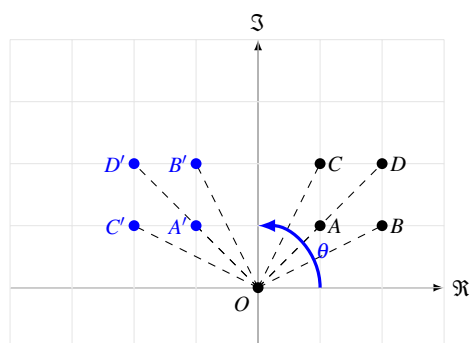
2. L'homothétie de centre O et de rapport α peut se modéliser par la fonction définie par :

$$f(z) = \alpha z$$



3. La rotation de centre O et d'angle θ peut se modéliser par la fonction définie par :

$$f(z) = e^{i\theta} z$$



Statistiques et probabilités

SP

SP1	Probabilités conditionnelles, indépendance	39
SP1.1	Calcul de probabilités élémentaires	39
SP1.2	Probabilités conditionnelles, arbre pondéré	40
SP1.3	Indépendance de deux évènements	41
SP2	Variables aléatoires discrètes	43
SP2.1	Rappels de Première : espérance d'une variable aléatoire discrète.	43
SP2.2	Rappels de Première : schéma de Bernoulli, loi binomiale	44
SP2.3	Coefficients binomiaux, application à la loi binomiale	45
SP3	Statistiques à deux variables	47
SP3.1	Généralités, représentation graphique	47
SP3.2	Corrélation et ajustements	48

SP1. Probabilités conditionnelles, indépendance

SP1.1 Calcul de probabilités élémentaires

Définition SP1.1 Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne connaît les *issues*, c'est-à-dire les résultats possibles, qu'une fois l'expérience réalisée. L'*univers* de cette expérience est l'ensemble des issues possibles. Un *évènement* A est un sous-ensemble de Ω , c'est-à-dire un ensemble d'issues. En particulier :

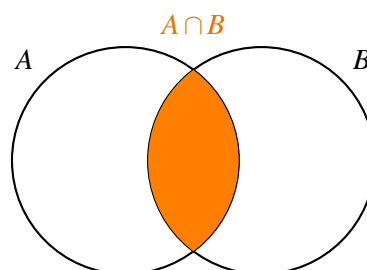
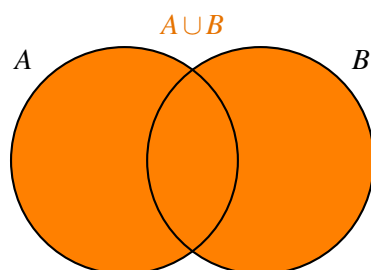
1. L'*évènement contraire* de A , noté $\bar{A}$, est composé des issues qui ne réalisent pas A .
2. Un *évènement impossible* (noté $\emptyset$) est un évènement réalisé par aucune issue.
3. Un *évènement certain* (noté Ω) est un évènement réalisé par toutes les issues.

■ **Exemple SP1.1** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu.

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience :
2. Donner un exemple d'évènement impossible :
3. Donner l'évènement contraire de « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » :

Définition SP1.2 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω .

1. L'*intersection* de A et B , noté $A \cap B$, est l'évènement réalisé lorsque A et B sont réalisés **en même temps**. Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits *incompatibles*.
2. L'*union* de A et B , noté $A \cup B$, est l'évènement réalisé lorsqu'**au moins un** des évènements A et B est réalisé.



■ **Exemple SP1.2** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat. On note A et B les évènements « Tomber sur un nombre inférieur ou égal à 2 » et « Tomber sur un nombre impair ».

1. Décrire $A \cap B$:
2. Décrire $A \cup B$:
3. Donner deux exemples d'évènements incompatibles :

Proposition SP1.1 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω .

1. La probabilité d'un évènement est un nombre toujours compris entre 0 et 1.
2. Dans une situation d'*équiprobabilité*, c'est-à-dire lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'être réalisées, la probabilité d'un évènement A est :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre total d'issues}}$$

3. La probabilité de l'évènement contraire de A est $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
4. La probabilité de l'union des évènements A et B est $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

■ **Exemple SP1.3** Dans un atelier, une machine produit des pièces dont certaines sont défectueuses. On étudie celles-ci, et on les comptabilise selon qu'elles aient un défaut esthétique (A) ou un défaut mécanique (B). Le résultat est consigné dans le tableau ci-dessous.

	B	$\bar{B}$	Total
A	12	45	
$\bar{A}$	8		63
Total		100	120

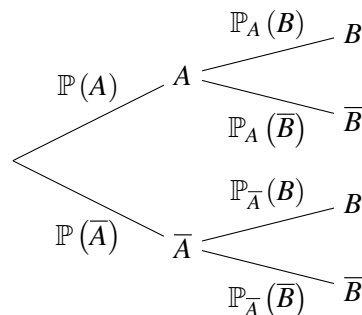
1. Compléter le tableau ci-dessus avec les données manquantes.
2. Indiquer ce que signifie la donnée 45 dans le tableau, et l'écrire en fonction de A et B .
.....
3. Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard ait au moins un des deux défauts.
.....
.....

SP1.2 Probabilités conditionnelles, arbre pondéré

Définition SP1.3 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω , tel que A ne soit pas un évènement impossible. On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* , que l'on note $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition SP1.2 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω . On peut schématiser la situation par un arbre pondéré, comme ci-dessous.

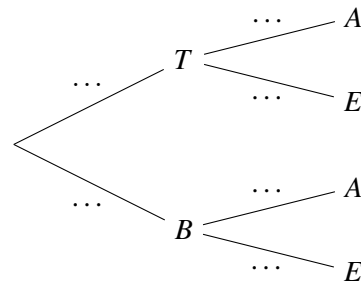


1. Sur les *branches* issues d'un même *noeud*, la somme des probabilités est égale à 1.
2. On peut calculer la probabilité d'un évènement B apparaissant sur la seconde profondeur de l'arbre grâce à la *formule des probabilités totales* :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

■ **Exemple SP1.4** Dans un club multisport d'une entreprise, on compte 400 salariés et leurs familles, qui peuvent pratiquer le tennis (T) et le badminton (B), selon qu'ils soient enfants (E) ou adultes (A). On sait que 20 % pratiquent le badminton et parmi ceux-là, le tiers sont des enfants. Le reste pratique le tennis et parmi eux, 30 % sont des adultes.

1. Déterminer la probabilité qu'un licencié du club soit un enfant.
2. Un licencié choisi au hasard est un enfant. Quelle est la probabilité qu'il joue au tennis ?



SP1.3 Indépendance de deux évènements

Définition SP1.4 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω , tels que A et B ne soient pas des évènements impossibles. On dira que A et B sont *indépendants* si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre. En d'autres termes, si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

■ **Exemple SP1.5** On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes, et on considère les évènements A : « Tirer un as », B : « Tirer un cœur » et C : « Tirer un as rouge ».

1. Donner les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(A) = \dots$, $\mathbb{P}(B) = \dots$, $\mathbb{P}(C) = \dots$.
2. Dans cette question, on souhaite étudier si A et B sont indépendants.
 - a. Décrire l'évènement $A \cap B$
 - b. Déterminer la probabilité de $A \cap B$
 - c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier brièvement votre réponse.
3. Dans cette question, on souhaite étudier si B et C sont indépendants.
 - a. Décrire l'évènement $B \cap C$
 - b. Déterminer la probabilité de $B \cap C$
 - c. Les évènements B et C sont-ils indépendants ? Justifier brièvement votre réponse.

SP2. Variables aléatoires discrètes

SP2.1 Rappels de Première : espérance d'une variable aléatoire discrète.

Définition SP2.1 On considère une variable aléatoire X discrète, dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	...	$\mathbb{P}(X = x_n)$

On définit l'*espérance de X* comme le nombre :

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times \mathbb{P}(X = x_1) + x_2 \times \mathbb{P}(X = x_2) + \dots + x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

L'espérance peut être interprétée comme une moyenne, si l'on venait à répéter une expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

■ **Exemple SP2.1** On suppose que X représente le gain algébrique (c'est-à-dire qui peut être positif, négatif ou nul) d'un jeu. Décrire, en un mot, ce que signifie le fait d'avoir une espérance :

- positive?
- négative?
- nulle?

■ **Exemple SP2.2** Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit. On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi dans le stock. On suppose que la loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	20	50	60	90
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,44	0,315	0,11	0,135

- Calculer $\mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat, dans le contexte de l'énoncé.

.....

- Évaluer le coût moyen de la réparation et du reconditionnement de 1 000 smartphones pour cette entreprise.

.....

SP2.2 Rappels de Première : schéma de Bernoulli, loi binomiale

Définition SP2.2 Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire à deux issues contraires :

- Le « succès » (à laquelle on associe le nombre 1), de probabilité p .
- L'« échec » (à laquelle on associe le nombre 0), de probabilité $1 - p$.

Un *schéma de Bernoulli* est la répétition de n épreuves de Bernoulli, de manière identiques et indépendantes, où la probabilité de succès est notée p .

■ **Exemple SP2.3** Proposer un exemple simple de schéma de Bernoulli (une situation répétée, une issue assimilée à un succès, et sa probabilité).

.....

.....

Définition SP2.3 La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli suit une *loi binomiale de paramètres n et p* . On la note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Proposition SP2.1 Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors :

1. Le nombre moyen de succès est égal à l'espérance $\mathbb{E}(X) = np$.
2. Les calculs de probabilités s'obtiennent directement grâce à la calculatrice.

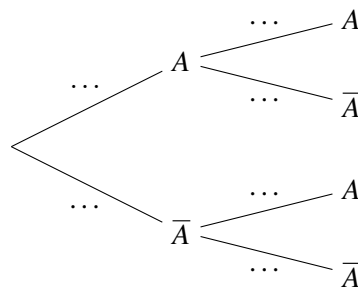
	Avoir k succès $\mathbb{P}(X = k)$	Avoir k succès, ou moins $\mathbb{P}(X \leq k)$
Casio	Menu - Stat - Dist - Binm - Bpd	Menu - Stat - Dist - Binm - Bcd
TI	2de - var - binomFdp	2de - var - binomFRép
Numworks	Probabilités - Binomiale	Probabilités - Binomiale

■ **Exemple SP2.4** La probabilité pour qu'un français ait comme groupe sanguin le groupe A vaut 0,45. On étudie le groupe sanguin de deux personnes prises au hasard dans la population française.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes du groupe A dans cet échantillon.

2. On admettra que X suit une loi binomiale. Donner les valeurs de ses paramètres :
 3. Déterminer la probabilité de l'évènement « Toutes les personnes interrogées sont de groupe A ».
-



■ **Exemple SP2.5** Un élève répond au hasard à un QCM comportant 20 questions. Chaque question comporte 4 réponses, mais une seule d'entre elles est correcte. On suppose que les réponses sont indépendantes les unes des autres, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses proposées par l'élève.

1. Expliquer pourquoi la situation relève d'une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.
 2. Calculer ensuite une valeur arrondie au millièème de $\mathbb{P}(X < 1)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
-
-
-
-
-

SP2.3 Coefficients binomiaux, application à la loi binomiale

Définition SP2.4 On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . On appelle *coefficient binomial* ou *combinaison de k parmi n* , le nombre de chemins qui conduisent à k succès parmi n épreuves, sur l'arbre de probabilités représentant l'expérience aléatoire. On le note :

$$\binom{n}{k}$$

Proposition SP2.2 Pour tout entier naturel n , et pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

■ **Exemple SP2.6** À l'aide de la définition, expliquer en une phrase l'une des deux premières valeurs de la proposition précédente.

.....

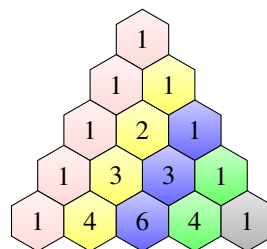
Proposition SP2.3 Les calculs de coefficients binomiaux s'obtiennent directement grâce à la calculatrice.

	Combinaison de k parmi n
Casio	Menu - Calc - OPTN - Prob - nCr
TI	math - PROB - Combinaison (ou nCr)
Numworks	Calculs - Mallette - Probabilités - Dénombrement - $\binom{n}{k}$

Proposition SP2.4 — Triangle de Pascal.

Pour tout entier naturel n , et pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$



Proposition SP2.5 Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

■ **Exemple SP2.7** On reprend l'**Exemple SP2.5**. Évaluer la probabilité que l'élève ne donne que des bonnes réponses au QCM.

.....

SP3. Statistiques à deux variables

SP3.1 Généralités, représentation graphique

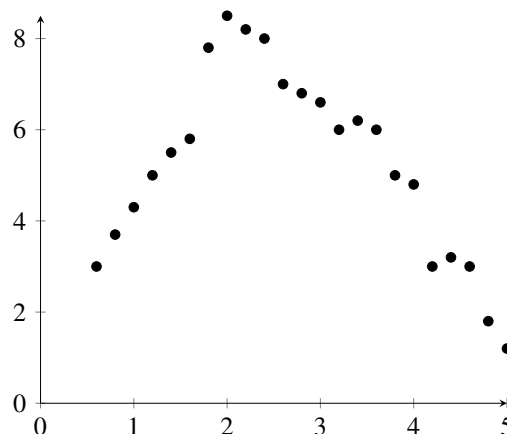
Définition SP3.1 On relève simultanément, sur une même population, les valeurs de deux modalités quantitatives notées $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Une *série statistique à deux variables* est la liste de ces couples d'observations :

$$\{(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)\}$$

R Une série statistique à deux variables peut être représentée sous la forme d'un tableau, comme ci-dessous.

Valeurs de la variable X	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs de la variable Y	y_1	y_2	...	y_n

Définition SP3.2 On considère une série statistique à deux variables. À chaque observation $(x_i; y_i)$, on lui associe un point du plan, de coordonnées $(x_i; y_i)$.



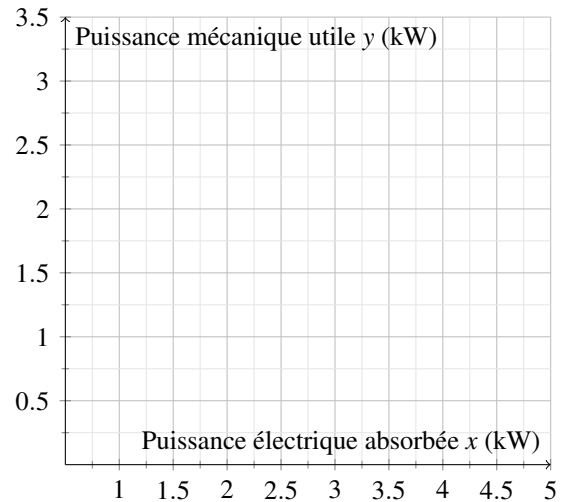
1. L'ensemble de ces points constitue un *nuage de points* associé à cette série statistique.
2. Le *point moyen* de cette série, noté G , est le point dont les coordonnées sont les moyennes des séries $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Autrement dit :

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}\right)$$

■ **Exemple SP3.1** On mesure, pour différentes valeurs de la puissance électrique absorbée par un moteur électrique, la puissance mécanique utile fournie par le moteur. On note x la puissance électrique absorbée (en kW), et y la puissance mécanique utile (en kW). Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant.

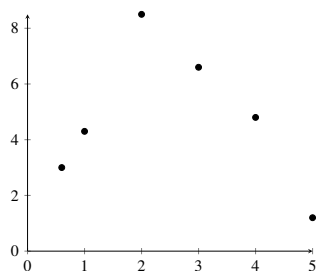
x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
y	0,62	0,94	1,23	1,56	1,86	2,15	2,48	2,76

1. Placer, dans le repère ci-contre, les points correspondant à cette série statistique.
2. À l'aide du nuage de points obtenu, décrire la tendance générale de la relation entre la puissance électrique absorbée et la puissance mécanique utile.
.....
.....
3. Calculer les coordonnées du point moyen de cette série.
.....
.....
.....
.....

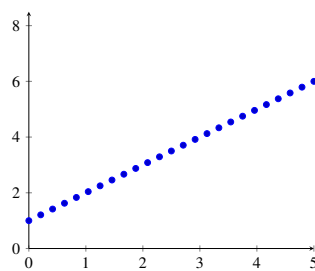


SP3.2 Corrélation et ajustements

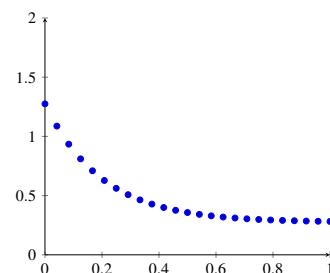
Lorsque l'on trace le nuage de points associé à une série statistique à deux variables, on peut obtenir des informations qualitatives ; notamment le fait de reconnaître s'il existe un « lien » entre les deux variables étudiées. C'est ce que l'on appellera la *corrélation* entre les deux variables.



Absence de corrélation entre les variables.



Possibilité de corrélation entre les variables. On effectuera un *ajustement affine*.

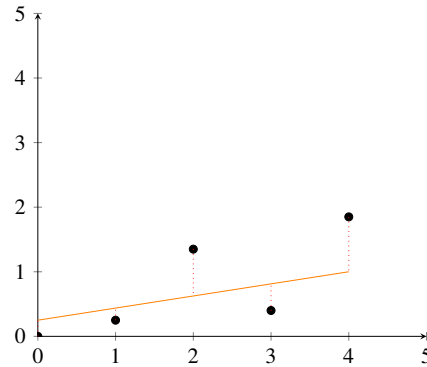
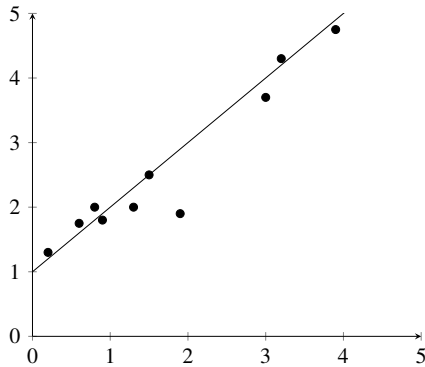


Possibilité de corrélation entre les variables. On effectuera un *ajustement* (non affine).

De manière plus quantitative, on appellera *ajustement* entre les deux variables, le fait de trouver l'expression d'une fonction mathématique qui lie ces deux variables.

Définition SP3.3 On considère une série statistique à deux variables.

1. Une droite d'ajustement affine tracée *au jugé* est une droite qui passe le plus près possible d'un maximum de points du nuage de points.
2. Une droite *de régression de y en x* , obtenue avec la *méthode des moindres carrés*, est une droite située à égale distance des points situés de part et d'autre de celle-ci. Elle passe par le point moyen du graphe.



Proposition SP3.1 À tout ajustement affine, on associe un *coefficient de corrélation*, noté r , tel que :

1. r est compris entre -1 et 1 .
2. La droite d'ajustement est croissante si, et seulement si, r est positif.
3. L'ajustement affine est de bonne qualité si, et seulement si, r est proche de ± 1 .

■ **Exemple SP3.2** Ce tableau donne la part des salariés handicapés dans le public de 2010 à 2015.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5
Part des salariés handicapés (y_i) (en %)	3,98	4,22	4,39	4,64	4,9	5,17

Source : INSEE

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G .
2. À l'aide de la calculatrice, justifier que l'on peut envisager un ajustement affine, et donner l'équation de la droite d'ajustement.
3. On choisit comme droite d'ajustement la droite (D) d'équation : $y = 0,24x + 3,95$.
 - a. Justifier que le point G appartient à cette droite.
 - b. On utilise cet ajustement pour effectuer des prévisions au-delà de l'année 2015. Quelle serait la part des salariés handicapés dans le public en 2020 ?