Mathématiques

Première Générale – Enseignement Spécifique

Kevin Cauvin

Copyright © 2026 Kevin Cauvin

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0 ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Deuxième impression, Juillet 2026

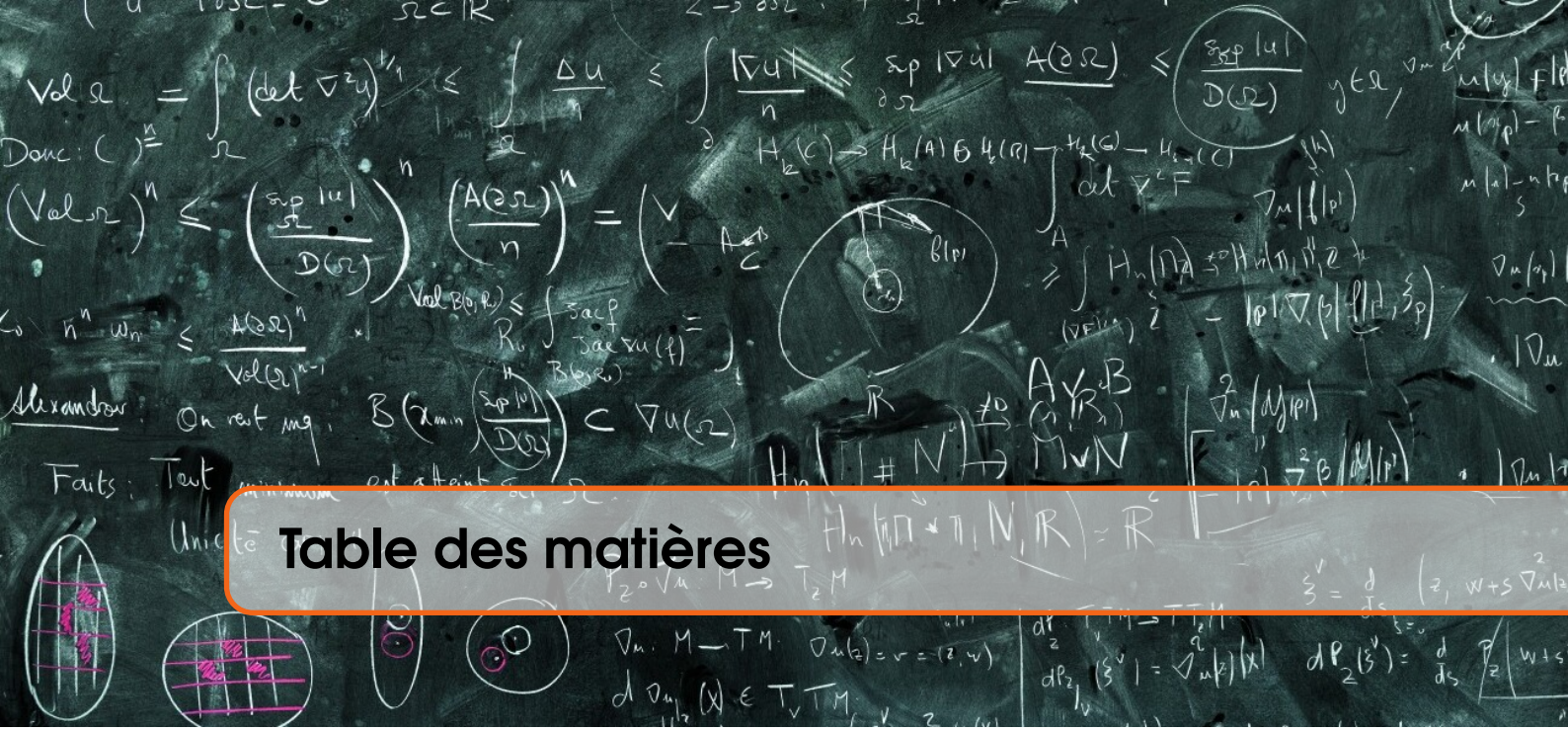


Table des matières

A Analyse de l'information chiffrée

A1 Analyse statistique de deux caractères qualitatifs 7

A1.1 Tableau croisé d'effectifs 7

A1.2 Représentations graphiques d'un couple de caractères 8

A2 Analyse statistique de deux caractères quantitatifs 11

A2.1 Généralités, représentation graphique 11

A2.2 Corrélation et ajustements 12

P Phénomènes aléatoires

P1 Probabilités conditionnelles, indépendance 17

P1.1 Probabilités conditionnelles 17

P1.2 Indépendance de deux événements 19

P2 Répétition d'épreuves de Bernoulli 21

M Modélisation d'évolutions

M1 Introduction aux suites numériques 25

M2 Modèle de croissance linéaire 27

M2.1 Un modèle discret : les suites arithmétiques 27

M2.2 Un modèle continu : les fonctions affines 28

M3 Modèle de croissance quadratique 31

M3.1 Éléments caractéristiques d'une parabole 31

M3.2 Forme factorisée d'un polynôme du second degré 33

M4 Modèle de croissance exponentielle 35

M4.1 Un modèle discret : les suites géométriques 35

M4.2 Un modèle continu : les fonctions exponentielles 36

M4.2.1 Généralités, premières propriétés 36

M4.2.2 Applications : racine $n-$ème d'un nombre, taux d'évolution moyen 37

Analyse de l'information chiffrée

A

A1 Analyse statistique de deux caractères qualitatifs 7

A1.1 Tableau croisé d'effectifs 7

A1.2 Représentations graphiques d'un couple de caractères 8

A2 Analyse statistique de deux caractères quantitatifs 11

A2.1 Généralités, représentation graphique 11

A2.2 Corrélation et ajustements 12

A1. Analyse statistique de deux caractères qualitatifs

A1.1 Tableau croisé d'effectifs

Définition A1.1 Une *série statistique* est un ensemble d'informations collectées sur une *population* (personnes ou objets). Pour chaque *individu* de la population, on s'intéresse à un *caractère* pouvant prendre plusieurs valeurs.

▪ **Exemple A1.1** Pour ces populations, proposer deux caractères que l'on pourrait étudier.

1. Élèves d'une classe : .....
2. Personnes fréquentant une salle de sport : .....
3. Sachet d'oranges à jus : .....

Définition A1.2 Un *tableau croisé*, ou *tableau à double entrée*, est un tableau permettant de synthétiser des données, lorsque l'on étudie deux caractères sur une même population.

▪ **Exemple A1.2** Le comité d'entreprise d'une société française souhaite organiser un week-end à Rome. Une enquête est faite auprès des 1 200 employés (dont 720 sont des femmes) de cette société afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport. Les moyens de transport proposés sont le train (choisi par 618 d'entre eux), l'avion (choisi par 462 d'entre eux) ou l'autocar. On sait de plus que 56 femmes ont choisi l'autocar, et 150 hommes ont choisi le train. Compléter le tableau croisé ci-dessous.

	Train	Avion	Autocar	**Total**
Femmes				
Hommes				
Total				

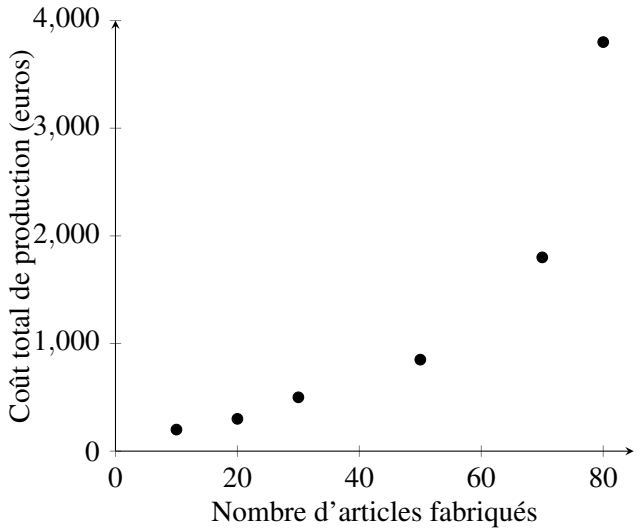
▪ **Exemple A1.3** Dans un club multisport de 400 adhérents, le tennis, le water-polo et le badminton sont pratiqués. Les adhérents sont classés suivant leurs catégories : enfant, senior, vétéran. On sait que 20 % pratiquent le badminton et parmi ceux-là, la moitié sont des enfants ; 75 % pratiquent le tennis et parmi eux, 30 % sont des seniors. Enfin, parmi les adhérents pratiquant le water-polo, aucun n'est enfant et 5 sont des vétérans. Compléter le tableau croisé ci-dessous.

	Badminton	Tennis	Water-polo	**Total**
Enfant		130		
Senior	30			
Vétéran				
Total				400

A1.2 Représentations graphiques d'un couple de caractères

Définition A1.3 Lorsque l'on étudie deux caractères quantitatifs (c'est-à-dire qui prennent des valeurs numériques), on peut les représenter par un *nuage de points*. Dans un repère orthogonal, chaque point a une abscisse qui correspond à la valeur du premier caractère étudié, et une ordonnée qui correspond à la valeur du second caractère étudié.

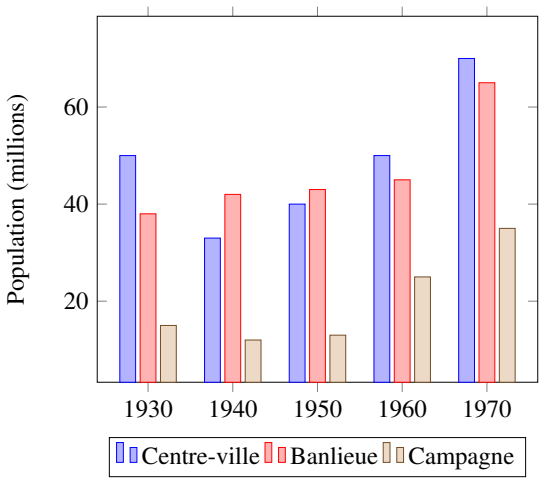
■ **Exemple A1.4** Une entreprise fabrique un certain type d'articles. Sa capacité maximale de production est 80 articles. Le nuage de points ci-dessous donne le coût total de production, en fonction du nombre d'articles fabriqués par cette entreprise.

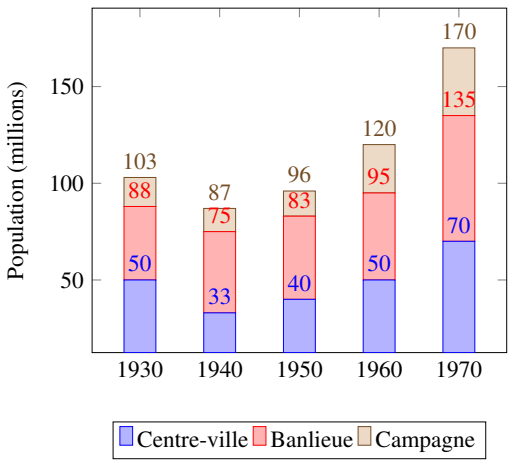


1. Quel est le coût total de production pour 30 articles fabriqués ? .....
2. Pour quelle production a-t-on un coût de fabrication proche de 4 000 euros ? .....

Définition A1.4 Un *diagramme en barres*, ou *en bâtons*, est un graphique qui présente des barres, horizontales ou verticales, dont la taille est proportionnelle aux valeurs qu'elles représentent.

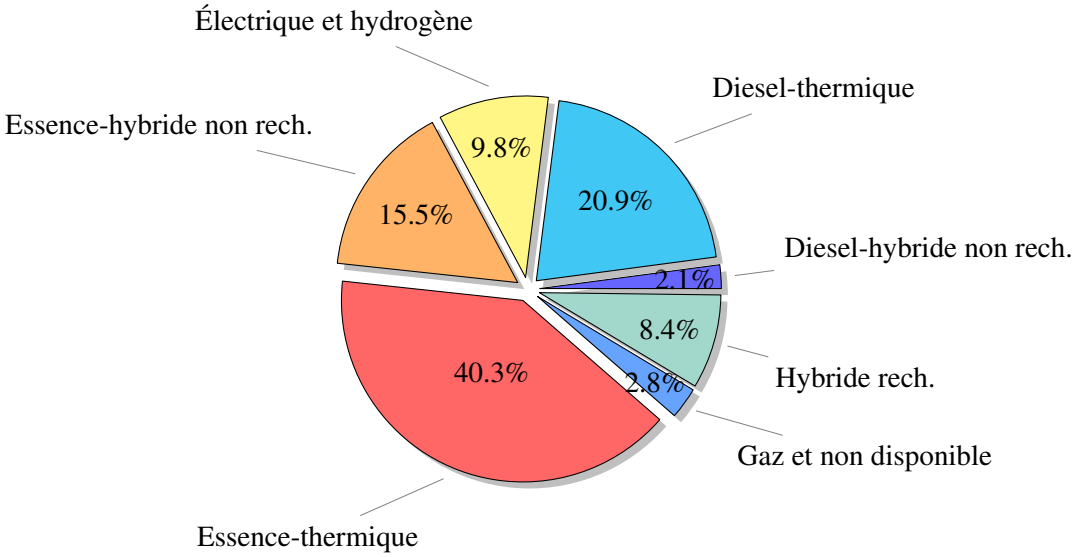
■ **Exemple A1.5** On peut représenter l'évolution de la population d'un pays au cours des années, parmi deux diagrammes en barres (celui à droite est appelé *diagramme en barres cumulées*).





Définition A1.5 Un *diagramme circulaire* est un graphique en forme de disque, partagé en plusieurs « portions de cercle », dont l'aire et l'angle sont proportionnels aux valeurs qu'elles représentent.

■ **Exemple A1.6** Ce diagramme donne la répartition de 1,6 million de voitures particulières neuves immatriculées en France en 2021, en fonction de leur motorisation.



Peut-on affirmer que « Les voitures hybrides rechargeables représentent moins de la moitié des véhicules hybrides » ? . . . . . .

A2. Analyse statistique de deux caractères quantitatifs

A2.1 Généralités, représentation graphique

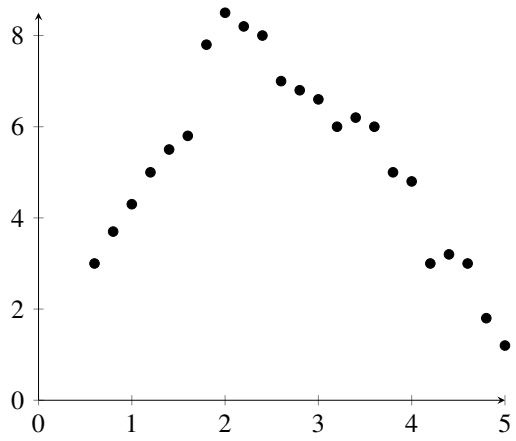
Définition A2.1 On relève simultanément, sur une même population, les valeurs de deux modalités quantitatives notées $\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ et $\{y_1 ; y_2 ; \ldots ; y_n\}$. Une *série statistique à deux variables* est la liste de ces couples d'observations :

$$\{(x_1 ; y_1) ; (x_2 ; y_2) ; \ldots ; (x_n ; y_n)\}$$

R Une série statistique à deux variables peut être représentée sous la forme d'un tableau, comme ci-dessous.

Valeurs de la variable X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Valeurs de la variable Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Définition A2.2 On considère une série statistique à deux variables. À chaque observation $(x_i ; y_i)$, on lui associe un point du plan, de coordonnées $(x_i ; y_i)$.



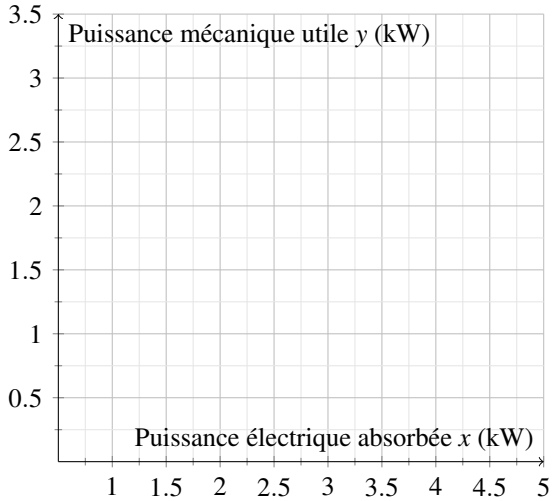
1. L'ensemble de ces points constitue un *nuage de points* associé à cette série statistique.
2. Le *point moyen* de cette série, noté G, est le point dont les coordonnées sont les moyennes des séries $\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ et $\{y_1 ; y_2 ; \ldots ; y_n\}$. Autrement dit :

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} ; \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right)$$

■ **Exemple A2.1** On mesure, pour différentes valeurs de la puissance électrique absorbée par un moteur électrique, la puissance mécanique utile fournie par le moteur. On note x la puissance électrique absorbée (en kW), et y la puissance mécanique utile (en kW). Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant.

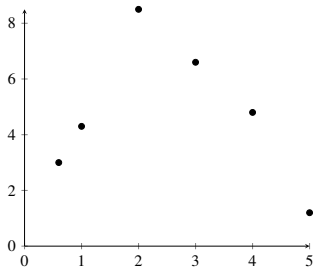
x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
y	0,62	0,94	1,23	1,56	1,86	2,15	2,48	2,76

1. Placer, dans le repère ci-contre, les points correspondant à cette série statistique.
2. À l'aide du nuage de points obtenu, décrire la tendance générale de la relation entre la puissance électrique absorbée et la puissance mécanique utile.
   .....
   .....
3. Calculer les coordonnées du point moyen de cette série.
   .....
   .....
   .....
   .....

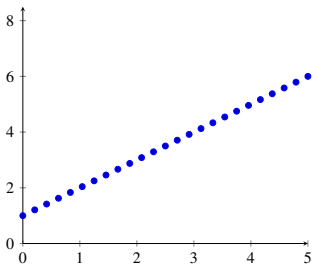


A2.2 Corrélation et ajustements

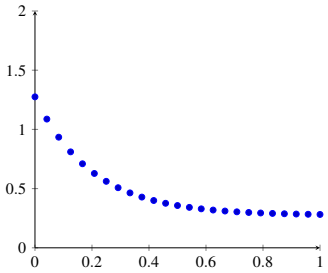
Lorsque l'on trace le nuage de points associé à une série statistique à deux variables, on peut obtenir des informations qualitatives ; notamment le fait de reconnaître s'il existe un « lien » entre les deux variables étudiées. C'est ce que l'on appellera la *corrélation* entre les deux variables.



Absence de corrélation entre les variables.



Possibilité de corrélation entre les variables. On effectuera un *ajustement affine*.



Possibilité de corrélation entre les variables. On effectuera un *ajustement* (non affine).

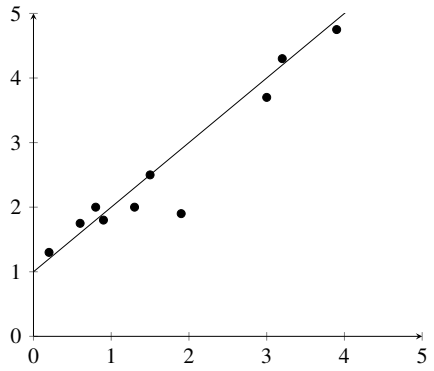
De manière plus quantitative, on appellera *ajustement* entre les deux variables, le fait de trouver l'expression d'une fonction mathématique qui lie ces deux variables.

Définition A2.3 Une série statistique possède un domaine d'étude, noté $\mathscr{D}$. Pour estimer une valeur inconnue dans cette série, on peut procéder à une :

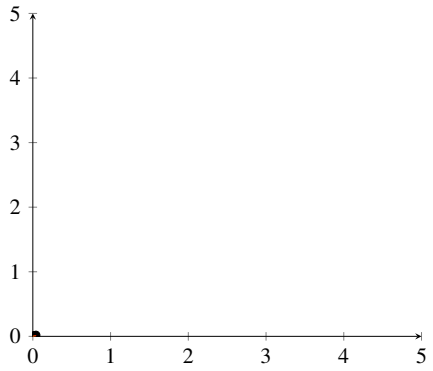
1. *interpolation*, c'est-à-dire réaliser des calculs dans $\mathscr{D}$,
2. une *extrapolation*, c'est-à-dire réaliser des calculs en dehors de $\mathscr{D}$.

Définition A2.4 On considère une série statistique à deux variables.

1. Une droite d'ajustement affine tracée *au jugé* est une droite qui passe le plus près possible d'un maximum de points du nuage de points.



2. Une droite *de régression de y en x*, obtenue avec la *méthode des moindres carrés*, est une droite située à égale distance des points situées de part et d'autre de celle-ci. Elle passe par le point moyen du graphe.



Proposition A2.1 À tout ajustement affine, on associe un *coefficient de corrélation*, noté r, tel que :

1. r est compris entre -1 et 1.
2. La droite d'ajustement est croissante si, et seulement si, r est positif.
3. L'ajustement affine est de bonne qualité si, et seulement si, r est proche de ± 1.

■ **Exemple A2.2** Ce tableau donne la part des salariés handicapés dans le public de 2010 à 2015.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5
Part des salariés handicapés (y_i) (en %)	3,98	4,22	4,39	4,64	4,9	5,17

Source : INSEE

1. Donner les coordonnées du point moyen G. .....
2. À l'aide de la calculatrice, justifier que l'on peut envisager un ajustement affine, et donner l'équation de la droite d'ajustement. .....
   .....
   .....
3. On choisit comme droite d'ajustement la droite (D) d'équation : $y = 0,24x + 3,95$.
   a. Justifier que le point G appartient à cette droite. .....
   b. On utilise cet ajustement pour effectuer des prévisions au-delà de l'année 2015. Quelle serait la part des salariés handicapés dans le public en 2020 ? Parle-t-on alors d'interpolation ou d'extrapolation ? .....
   .....
   .....

P Phénomènes aléatoires

P1 Probabilités conditionnelles, indépendance 17
P1.1 Probabilités conditionnelles 17
P1.2 Indépendance de deux événements 19

P2 Répétition d'épreuves de Bernoulli . . . 21

P1. Probabilités conditionnelles, indépendance

P1.1 Probabilités conditionnelles

Définition P1.1 Soient A et B deux évènements, tel que A ne soit pas un évènement impossible. On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A*, que l'on note $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple P1.1** Une culture de pois comporte des pois de couleur « jaune » ou « vert » et de forme « lisse » ou « ridé ». Le tableau ci-dessous est partiellement renseigné à partir des observations effectuées sur un grand nombre de pois de cette culture.

	Nb de pois jaunes	Nb de pois verts	**Total**
Nb de pois ridés	100		600
Nb de pois lisses			
Total	300		10 000

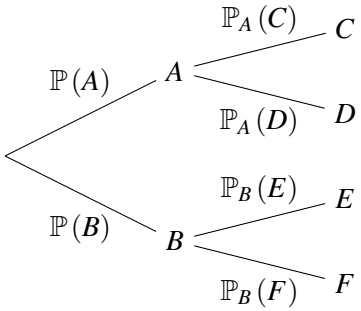
Compléter le tableau, puis calculer la probabilité qu'un pois soit vert sachant qu'il est lisse.

. . . . . .

. . . . . .

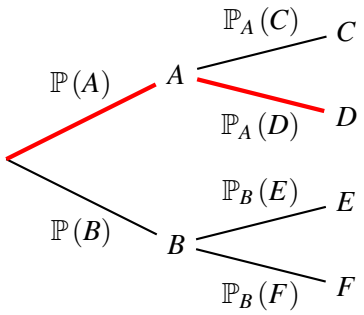
Proposition P1.1 On construit un arbre pondéré à l'aide de trois règles :

1. Sur la première profondeur de l'arbre, on inscrit les probabilités des évènements.
2. Sur la deuxième profondeur de l'arbre, on inscrit les probabilités conditionnelles.
3. Sur les *branches* issues d'un même *noeud*, la somme des probabilités est égale à 1.



Proposition P1.2 La probabilité d'une « branche totale » est égale au produit des probabilités rencontrées sur cette branche.
Dans le cas ci-contre, pour calculer la probabilité de l'issue « A et D », on doit calculer :

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$$



■ **Exemple P1.2** Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports). Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ». On constate que, dans cette école :

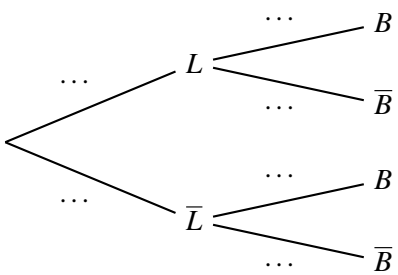
— 40 % d'étudiants sont dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation » ;
— Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS ;
— Parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les évènements L : « L'étudiant est dans le cycle « licence » et B : « L'étudiant est membre du BDS ».

1. Écrire chacun des pourcentages comme des probabilités d'évènements.

$0,40 = \mathbb{P}(\ldots)$ $\quad$ $0,60 = \mathbb{P}(\ldots)$ $\quad$ $0,08 = \mathbb{P}_{\ldots}(\ldots)$ $\quad$ $0,10 = \mathbb{P}_{\ldots}(\ldots)$

2. Compléter l'arbre pondéré modélisant la situation.



3. a. Décrire, à l'aide d'une phrase, à quoi correspond l'évènement $L \cap B$.
   .....
   b. Calculer la probabilité de cet évènement.
   .....
4. a. Décrire, à l'aide d'une phrase, à quoi correspond l'évènement $\overline{L} \cap B$.
   .....
   b. Calculer la probabilité de cet évènement.
   .....
5. a. Déduire des informations précédentes la probabilité de l'évènement B.
   .....
   .....
   .....
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
   .....

P1.2 Indépendance de deux événements

Définition P1.2 Soient A et B deux évènements, tels que A et B ne soient pas des évènements impossibles. On dira que A et B sont *indépendants* si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre. En d'autres termes, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \text{ ou } \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

■ **Exemple P1.3** On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes, et on considère les évènements A : « Tirer un as », B : « Tirer un cœur » et C : « Tirer un as rouge ».

1. Donner les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(A) = \ldots\ldots\ldots$, $\mathbb{P}(B) = \ldots\ldots\ldots$, $\mathbb{P}(C) = \ldots\ldots\ldots$
2. *Dans cette question, on souhaite étudier si A et B sont indépendants.*
   a. Décrire l'évènement $A \cap B$. . . . . .
   b. Déterminer la probabilité de $A \cap B$. . . . . .
   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier brièvement votre réponse. . . . .
   . . . . . .
   . . . . . .
3. *Dans cette question, on souhaite étudier si B et C sont indépendants.*
   a. Décrire l'évènement $B \cap C$. . . . . .
   b. Déterminer la probabilité de $B \cap C$. . . . . .
   c. Les évènements B et C sont-ils indépendants ? Justifier brièvement votre réponse. . . . .
   . . . . . .
   . . . . . .

P2. Répétition d'épreuves de Bernoulli

Définition P2.1 Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire à deux issues contraires :
- Une de ces issues S est appelée *succès*, sa probabilité est notée p.
- L'autre de ces issues $\overline{S}$ est appelée *échec*, sa probabilité est $1-p$.

▪ **Exemple P2.1** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu. On s'intéresse au fait de tomber sur le nombre 5. Montrer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Définition P2.2 On dira que des expériences aléatoires sont *identiques et indépendantes* lorsqu'elles ont les mêmes issues, et que chaque issue a la même probabilité de se réaliser.

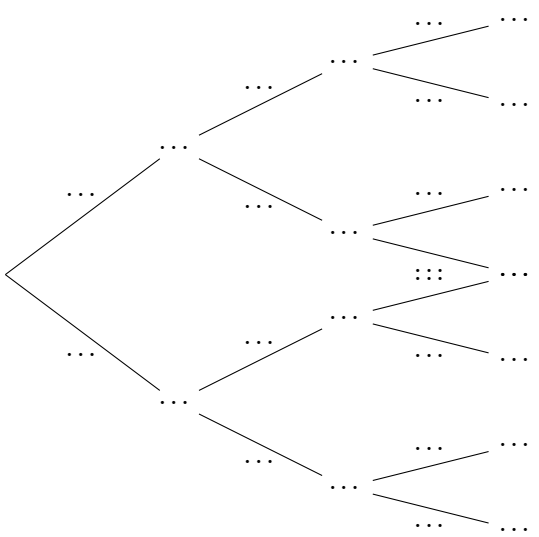
Définition P2.3 Une répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, est appelée *schéma de Bernoulli*. On la représente avec un arbre à n degrés de profondeur.

▪ **Exemple P2.2** Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges, indiscernables au toucher. On décide de tirer au hasard une boule, puis la remettre dans l'urne, et ce à trois reprises. On admettra qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli, dont le succès est noté S : « Tirer une boule blanche ».

1. Compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-contre, schématisant la situation.

Dans chacune des questions suivantes, déterminer la probabilité de l'évènement proposé.

2. « Tirer trois boules rouges ».
   . . . . . .
3. « Tirer, dans cet ordre, une rouge et deux blanches ».
   . . . . . .
4. « Tirer, dans n'importe quel ordre, une rouge et deux blanches ».
   . . . . . .
   . . . . . .
   . . . . . .



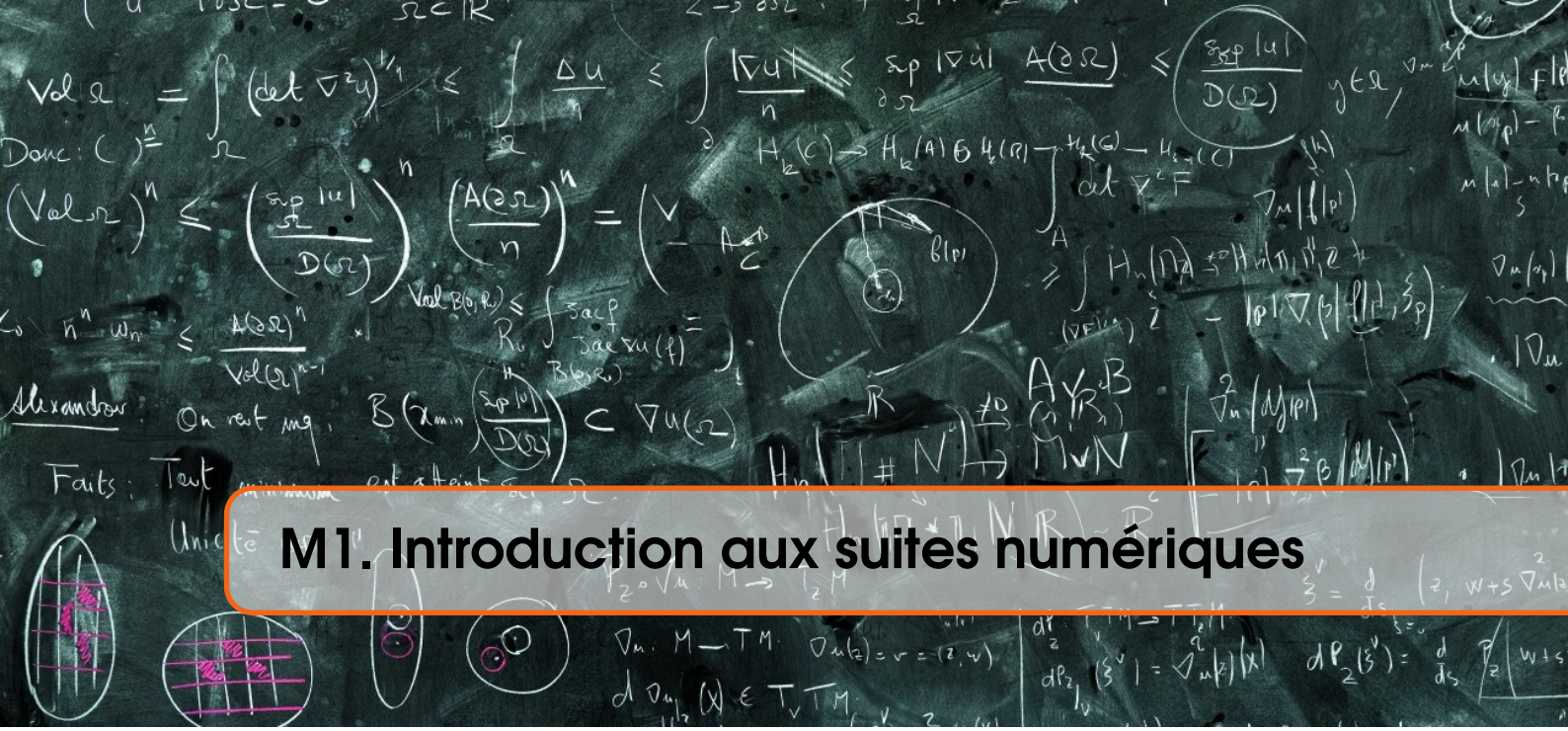
M Modélisation d'évolutions

M1 Introduction aux suites numériques . . . 25

M2 Modèle de croissance linéaire 27
M2.1 Un modèle discret : les suites arithmétiques . . 27
M2.2 Un modèle continu : les fonctions affines 28

M3 Modèle de croissance quadratique . . 31
M3.1 Éléments caractéristiques d'une parabole . . . 31
M3.2 Forme factorisée d'un polynôme du second degré 33

M4 Modèle de croissance exponentielle . 35
M4.1 Un modèle discret : les suites géométriques . . 35
M4.2 Un modèle continu : les fonctions exponentielles 36



M1. Introduction aux suites numériques

Définition M1.1 Une *suite numérique* est une liste ordonnée de nombres, appelés *termes*.

■ **Exemple M1.1** Pour chaque suite, trouver « logiquement » les termes suivants.

$u_0 = 1$	$u_1 = 3$	$u_2 = 5$	$u_3 = 7$	$u_4 = \ldots.$
$u_0 = 1$	$u_1 = 1$	$u_2 = 1$	$u_3 = 1$	$u_4 = \ldots.$
$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 8$	$u_4 = \ldots.$
$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 7$	$u_4 = \ldots.$
$u_0 = 500$	$u_1 = 50$	$u_2 = 5$	$u_3 = 0,5$	$u_4 = \ldots.$

■ **Exemple M1.2** On appelle *suite de Fibonacci* la suite F dont les premiers termes sont $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ et $F_7 = 13$.

1. Quelle « logique » peut-on trouver entre les premiers termes de cette suite ? . . . . . .
2. Donner les valeurs des termes $F_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $F_9 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $F_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple M1.3** Pour cette suite, trouver « logiquement » les termes suivants.

$u_0 = 1$ $\quad u_1 = 3$ $\quad u_2 = 6$ $\quad u_3 = \ldots.$

R Dans l'exemple précédent, on dit que 1 est le terme de rang 0, 3 est le terme de rang 1, 6 est le terme de rang 2, etc. Le *rang* indique le « positionnement » du terme dans la suite.

Définition M1.2 Une suite u est définie *explicitement* lorsque l'on a une formule de calcul, appelée *terme général de u*, qui permet de calculer n'importe quel terme, en fonction de n.

R Avec une suite définie explicitement, on peut calculer n'importe quel terme, facilement et directement. Le risque d'erreur dans les calculs est très limité !

■ **Exemple M1.4** On définit les suites u et v par $u_n = 2n + 1$ et $v_n = n^2 - n$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $u_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $v_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $v_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $v_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $v_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition M1.3 Une suite u est définie *par récurrence* lorsque l'on dispose de la valeur d'un terme (par exemple u_0) et d'une formule de calcul, appelée *relation de récurrence de u*, qui permet de calculer un terme à partir de son prédécesseur.

R Avec une suite définie par récurrence, attention à ne pas faire d'erreurs dans les calculs : si l'on se trompe sur le calcul d'un terme, alors tous les termes suivants risquent d'être erronés !

■ **Exemple M1.5** On définit la suite u par $u_0 = 1$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_1 =$ .....
2. $u_2 =$ .....
3. $u_3 =$ .....
4. $u_4 =$ .....

■ **Exemple M1.6** On définit la suite u par $u_0 = 100$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_1 =$ .....
2. $u_2 =$ .....
3. $u_3 =$ .....
4. $u_4 =$ .....

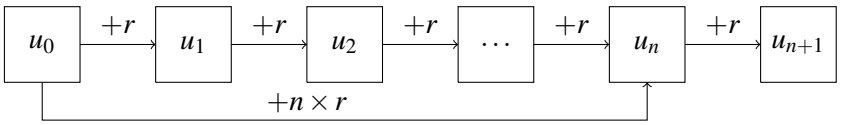
M2. Modèle de croissance linéaire

M2.1 Un modèle discret : les suites arithmétiques

Définition M2.1 On dit qu'une suite est *arithmétique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r.
2. Il existe un nombre réel, noté r, tel que $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est alors appelé *raison de la suite*.



■ **Exemple M2.1** On considère la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple M2.2** On considère la suite arithmétique de raison $r = -5$ telle que $u_0 = 100$.
Calculer $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

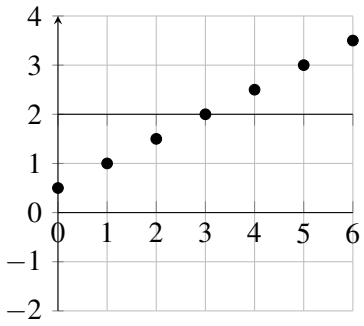
Proposition M2.1 Si u est une suite arithmétique de raison r, il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p + (n-p)r$$

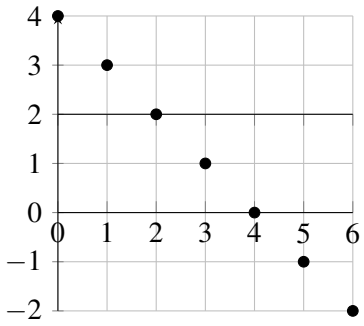
■ **Exemple M2.3** On considère la suite arithmétique de raison $r = 0,9$ telle que $u_0 = 2,4$.
La formule explicite est $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ On en déduit que $u_{30} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition M2.2 Dans un repère, les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

Si $r > 0$, u est strictement croissante.



Si $r < 0$, u est strictement décroissante.



M2.2 Un modèle continu : les fonctions affines

Définition M2.2 Une fonction f est *affine* si son expression est de la forme $f(x) = ax + b$, où a est appelé *coefficient directeur* ou *pente*, et b est appelé *ordonnée à l'origine*.

- Si $a = 0$, alors $f(x) = b$ et on dira que f est *constante*.
- Si $b = 0$, alors $f(x) = ax$ et on dira que f est *linéaire*.

■ **Exemple M2.4** Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont affines.

1. $f_1(x) = 2x + 1$. ❑ Affine (avec $a =$ ..... et $b =$ .....). ❑ Pas affine.
2. $f_2(x) = 2 - x$. ❑ Affine (avec $a =$ ..... et $b =$ .....). ❑ Pas affine.
3. $f_3(x) = x^2 + 2x + 1$. ❑ Affine (avec $a =$ ..... et $b =$ .....). ❑ Pas affine.
4. $f_4(x) = -2(x - 3)$. ❑ Affine (avec $a =$ ..... et $b =$ .....). ❑ Pas affine.
5. $f_5(x) = -\frac{1}{2}x$. ❑ Affine (avec $a =$ ..... et $b =$ .....). ❑ Pas affine.

■ **Exemple M2.5** Imène souhaite louer un véhicule auprès d'une agence de location, pour une journée. Elle paie un tarif forfaitaire de 25 euros, et paie un supplément de 20 centimes d'euros par kilomètre parcouru. On note $I(x)$ le prix, en euros, payé par Imène pour x kilomètres parcourus.

1. Écrire l'expression de $I(x)$ en fonction de x : .....
2. I est une fonction affine. Donner les valeurs de $a =$..... et $b =$.....

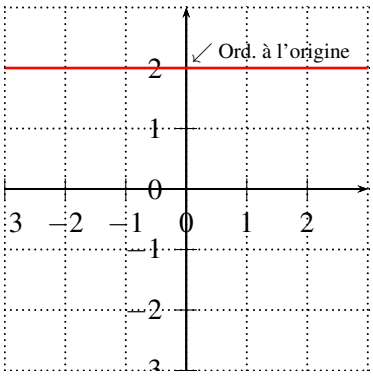
Proposition M2.3 Si f est une fonction affine alors, pour toutes valeurs distinctes de x_1 et x_2, on peut calculer le coefficient directeur de la courbe représentant f par :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

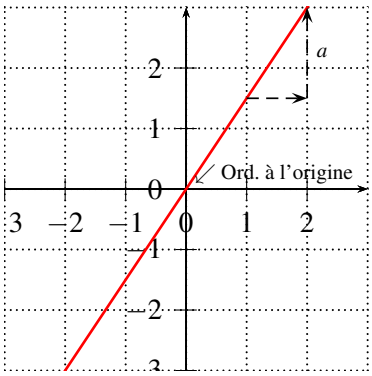
■ **Exemple M2.6** On sait que f est une fonction affine telle que $f(2) = 1$ et $f(4) = 7$. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

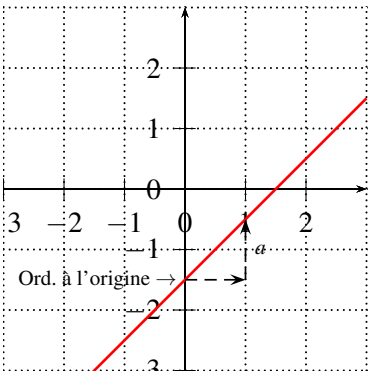
Proposition M2.4 La représentation graphique d'une fonction affine est une droite de pente a et qui coupe l'axe des ordonnées en l'ordonnée à l'origine b.



Si $a = 0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses (f est constante).

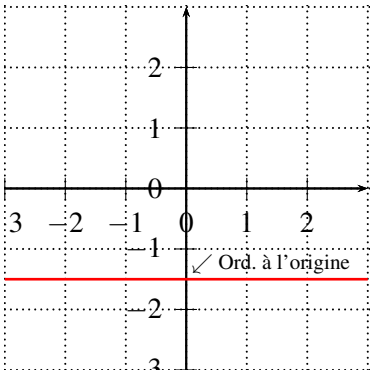


Si $b = 0$, la droite passe par l'origine O du repère (f est linéaire).

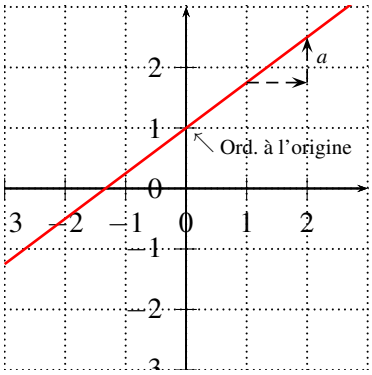


Si $b \neq 0$, la droite ne passe pas par l'origine O du repère.

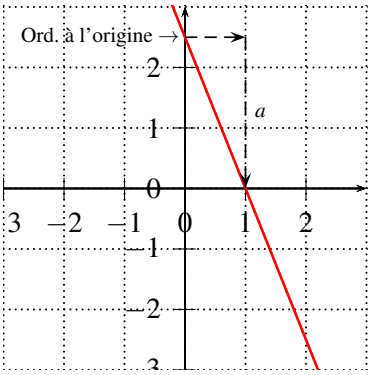
Proposition M2.5 Le sens de variation d'une fonction affine dépend du signe de son coefficient directeur a.



Si $a = 0$, f est constante.



Si $a \geqslant 0$, f est croissante.



Si $a \leqslant 0$, f est décroissante.

■ **Exemple M2.7** Parmi les fonctions suivantes, préciser leur sens de variation.

1. $f_1(x) = 2x + 1$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante. ❑ Constante.
2. $f_2(x) = 2 - x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante. ❑ Constante.
3. $f_3(x) = -4$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante. ❑ Constante.
4. $f_4(x) = -2(x - 3)$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante. ❑ Constante.
5. $f_5(x) = -\frac{1}{2}x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante. ❑ Constante.

M3. Modèle de croissance quadratique

M3.1 Éléments caractéristiques d'une parabole

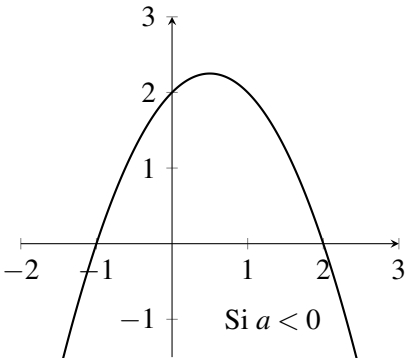
Définition M3.1 Une *fonction polynôme du second degré* est une fonction f définie par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels, avec $a \neq 0$.

▪ **Exemple M3.1** On donne ci-dessous une liste d'expression de fonctions. Pour celles qui sont du second degré, indiquer les valeurs des coefficients a, b et c. Pour celles qui ne sont pas du second degré, expliquer brièvement pourquoi.

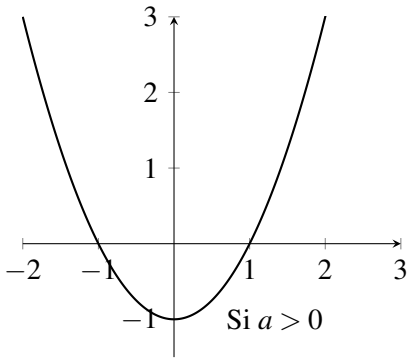
1. $f_1(x) = 3x - 7$: .....
2. $f_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$: .....
3. $f_3(x) = -6x^2 + 8$: .....
4. $f_4(x) = \frac{4}{3}x^2 - 5x$: .....
5. $f_5(x) = -11x^3 - 2x^2$: .....
6. $f_6(x) = -11 - 2x^2$: .....

Définition M3.2 La courbe représentant une fonction du second degré s'appelle une *parabole*.

1. On dit qu'elle est « *tournée vers le bas* » si $a < 0$, et « *tournée vers le haut* » si $a > 0$.



Si $a < 0$

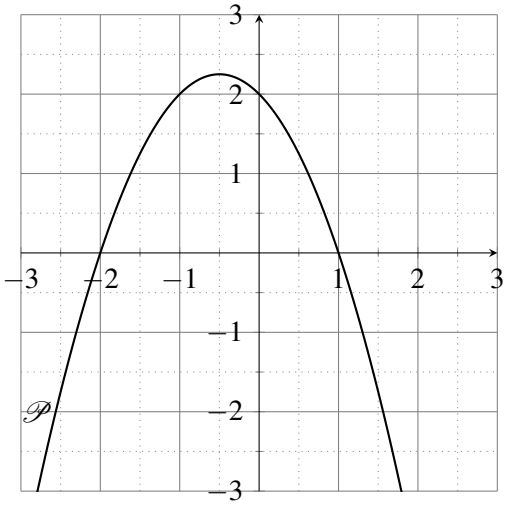


Si $a > 0$

2. Le *sommet* d'une parabole est le point d'intersection entre la parabole et son axe de symétrie. C'est donc un *maximum* si $a < 0$, et un *minimum* si $a > 0$.

■ **Exemple M3.2** On a tracé, ci-dessous, la parabole $\mathscr{P}$ représentant une fonction du second degré, notée f, définie par $f(x) = -x^2 - x + 2$.

1. Indiquer la valeur des coefficients :
   $a =$ ....., $b =$ ..... et $c =$ .....
2. Justifier pourquoi la parabole $\mathscr{P}$ est orientée vers le bas. .....
   .....
3. En laissant les traits de construction, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$: .....
   .....
4. Tracer, ci-contre, l'axe de symétrie de la parabole.
5. Lire, avec la précision permise par le graphique, les coordonnées du sommet de la parabole : .....
   .....



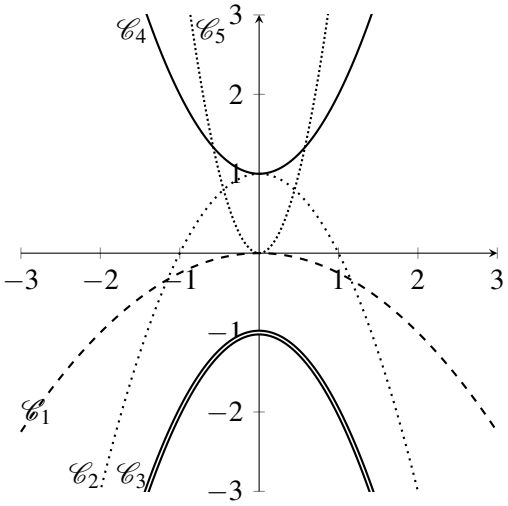
6. Établir, ci-dessous, le tableau de variations et le tableau de signes de f.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de f	

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de f	

■ **Exemple M3.3** Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.

1. $f(x) = -x^2 - 1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$ car :
   .....
   .....
2. $g(x) = -0,25x^2$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$ car :
   .....
   .....
3. $h(x) = x^2 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$ car :
   .....
   .....
4. $i(x) = 4x^2$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$ car :
   .....
   .....
5. $j(x) = -x^2 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$ car :
   .....
   .....



M3.2 Forme factorisée d'un polynôme du second degré

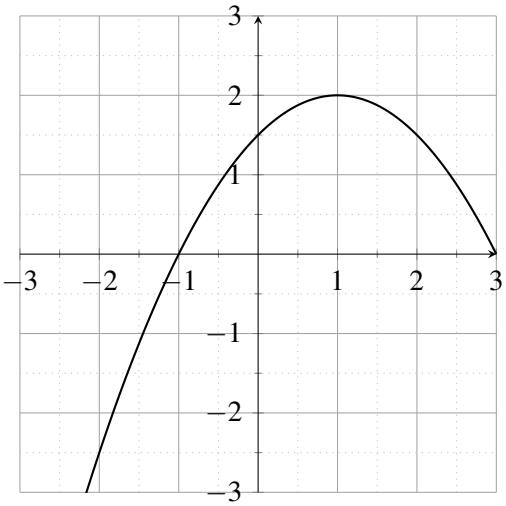
Proposition M3.1 Certains polynômes du second degré peuvent s'écrire sous une forme *factorisée* :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les solutions à l'équation $f(x) = 0$, que l'on appelle les *racines de* f.

■ **Exemple M3.4** On considère la fonction f définie par $f(t) = -(t+1)(t-3)$.

1. a. Calculer les racines de f. .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   b. Placer ces racines sur le graphe.
2. Tracer l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$.
   Son équation est alors $x =$ .....
3. Calculer les coordonnées du sommet S.
   .....
   .....
   .....
4. Tracer la parabole $\mathscr{P}$.
5. Compléter le tableau de signes de f.



t	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de -1	
Signe de $t+1$	
Signe de $t-3$	
Signe de f	

M4. Modèle de croissance exponentielle

M4.1 Un modèle discret : les suites géométriques

Définition M4.1 On dit qu'une suite est *géométrique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre $q \neq 0$.
2. Il existe un nombre réel non nul, noté q, tel que $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le nombre q est alors appelé *raison de la suite*.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, "\times q"] & u_2 \arrow[r, "\times q"] & \dots \arrow[r, "\times q"] & u_n \arrow[r, "\times q"] & u_{n+1} \end{tikzcd}$$

■ **Exemple M4.1** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 =$ ....., $u_2 =$ ....., $u_3 =$ ..... et $u_4 =$ .....

■ **Exemple M4.2** On considère la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $u_0 = 1\,000$.
Calculer $u_1 =$ ....., $u_2 =$ ....., $u_3 =$ ..... et $u_4 =$ .....

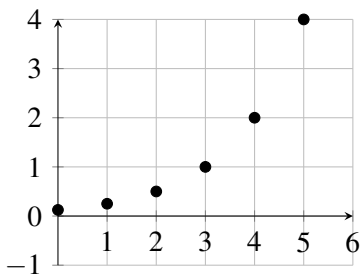
Proposition M4.1 Si u est une suite géométrique de raison q, il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n :

$$u_n = u_0 \times q^n \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

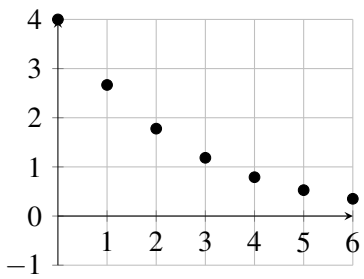
■ **Exemple M4.3** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_0 = 3$.
La formule explicite est $u_n =$ ..... On en déduit que $u_4 =$ .....

Proposition M4.2 Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.

Si $q > 1$, u est strictement croissante.



Si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante.



M4.2 Un modèle continu : les fonctions exponentielles

M4.2.1 Généralités, premières propriétés

Définition M4.2 Soit a un nombre strictement positif. La fonction *exponentielle de base a* est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = a^x$.

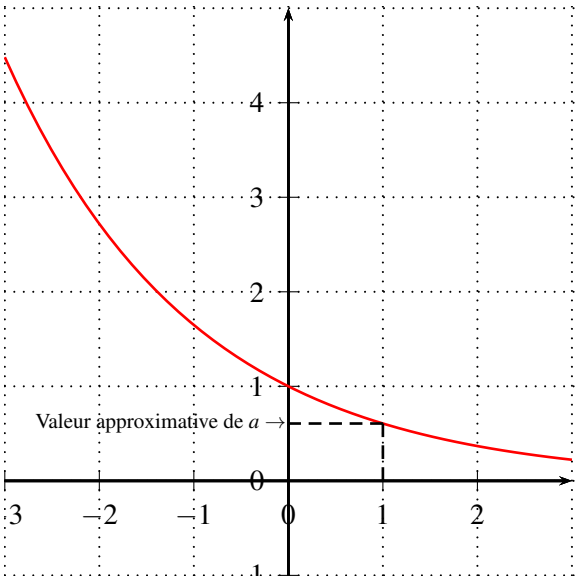
Proposition M4.3 Soient a et b deux nombres strictement positifs, x et y deux nombres positifs. On a les cinq règles algébriques suivantes :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad (a^x)^y = a^{x\times y} \quad ; \quad (ab)^x = a^x \times b^x \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

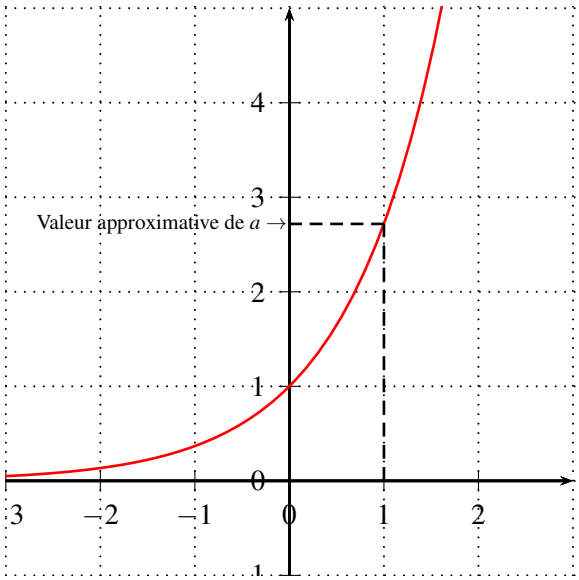
■ **Exemple M4.4** À l'aide des cinq règles algébriques précédentes, simplifier ces expressions.

1. $1,05^2 \times 1,05^4 = \ldots\ldots$
2. $3^4 \times 2^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\dfrac{2^6}{2^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $\left(1,25^3\right)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $1,1^6 \times 2^6 = \ldots\ldots\ldots$
6. $\dfrac{1,08^{11}}{1,08^7} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $0,96^4 \times 0,96^3 = \ldots\ldots$
8. $0,88^8 \times 0,88^2 = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{6^2}{3^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition M4.4 Le sens de variation d'une fonction exponentielle dépend de sa base a.



Si $0 < a < 1$, f est décroissante.



Si $a > 1$, f est croissante.

Proposition M4.5 Multiplier l'expression d'une fonction exponentielle par un nombre k change son sens de variation si, et seulement si, $k < 0$.

■ **Exemple M4.5** Parmi les fonctions suivantes, préciser leur sens de variation, en justifiant.

1. $f_1(x) = 1,1^x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante.
   ……
2. $f_2(x) = -2,25 \times 0,88^x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante.
   ……
3. $f_3(x) = 3 \times 0,5^x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante.
   ……
4. $f_4(x) = 1,25 \times 1,03^x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante.
   ……
5. $f_5(x) = -0,5 \times 1,25^x$. ❑ Croissante. ❑ Décroissante.
   ……

M4.2.2 Applications : racine $n-$ème d'un nombre, taux d'évolution moyen

Définition M4.3 Soient a un nombre strictement positif et n un entier naturel non nul. La *racine $n-$ème de a* est l'unique solution strictement positive de l'équation $x^n = a$. On la définit ainsi :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

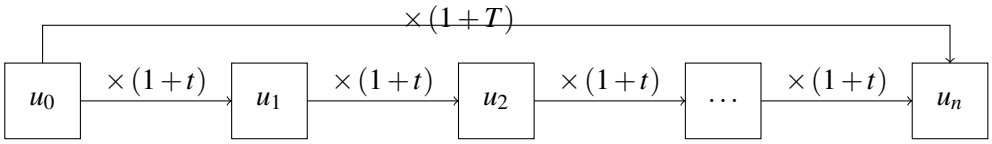
■ **Exemple M4.6** Trouver une valeur approchée de la solution à l'équation $(1+t)^3 = 1,1$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Définition M4.4 On suppose qu'une quantité subit une évolution dont le taux est T. Le *taux moyen sur n périodes* est le taux t qu'il faudrait appliquer n fois à cette quantité, pour être équivalent à T.



Si le taux global est T sur n périodes, alors le taux moyen t vérifie $(1+t)^n = 1+T$.

■ **Exemple M4.7** On admet que le taux d'évolution global de la masse d'EMPCS (emballages ménagers en plastique issus de la collecte sélective) recyclés entre 2011 et 2016 est de 23 %. En déduire le taux d'évolution annuel moyen de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .