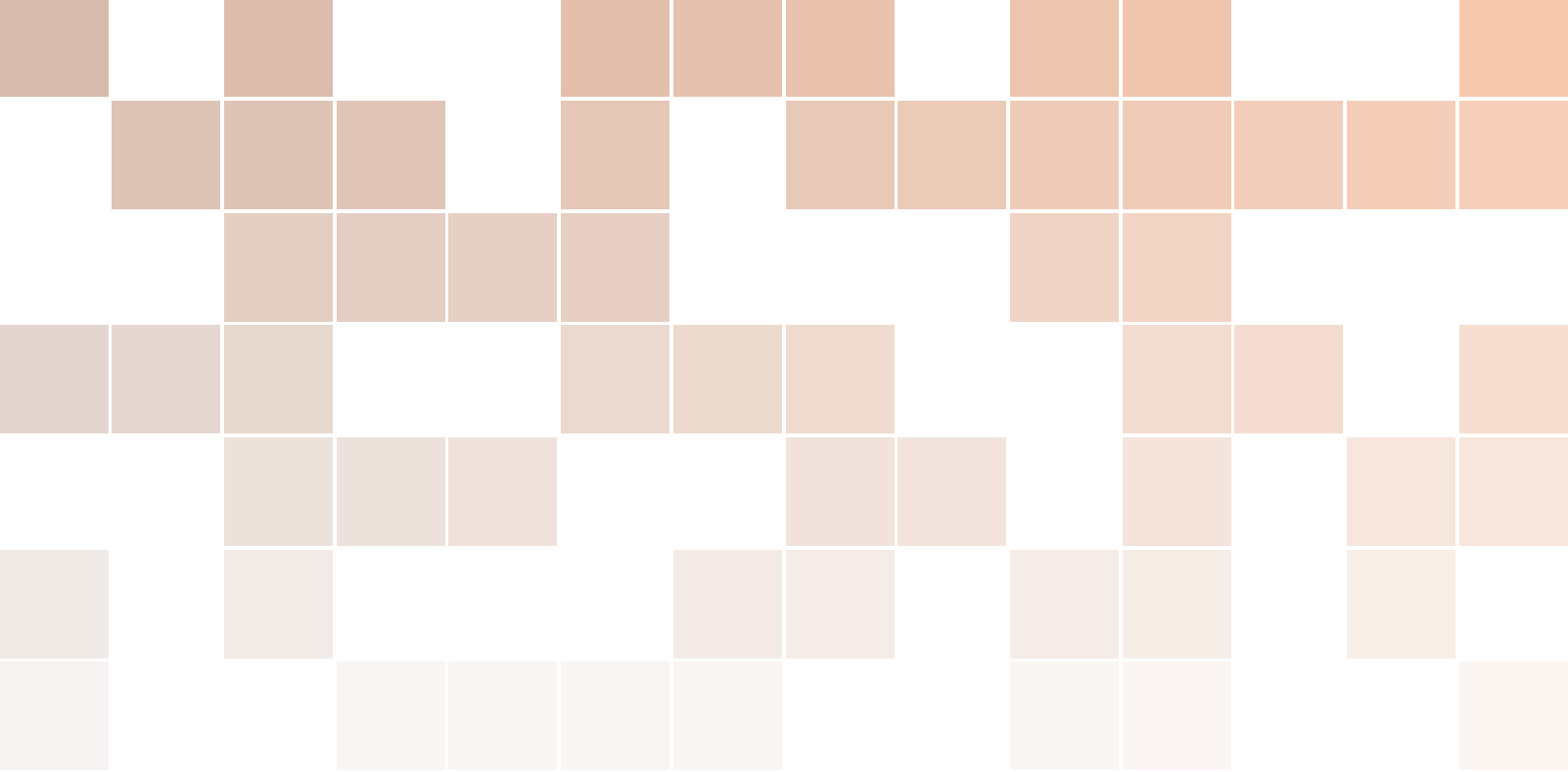
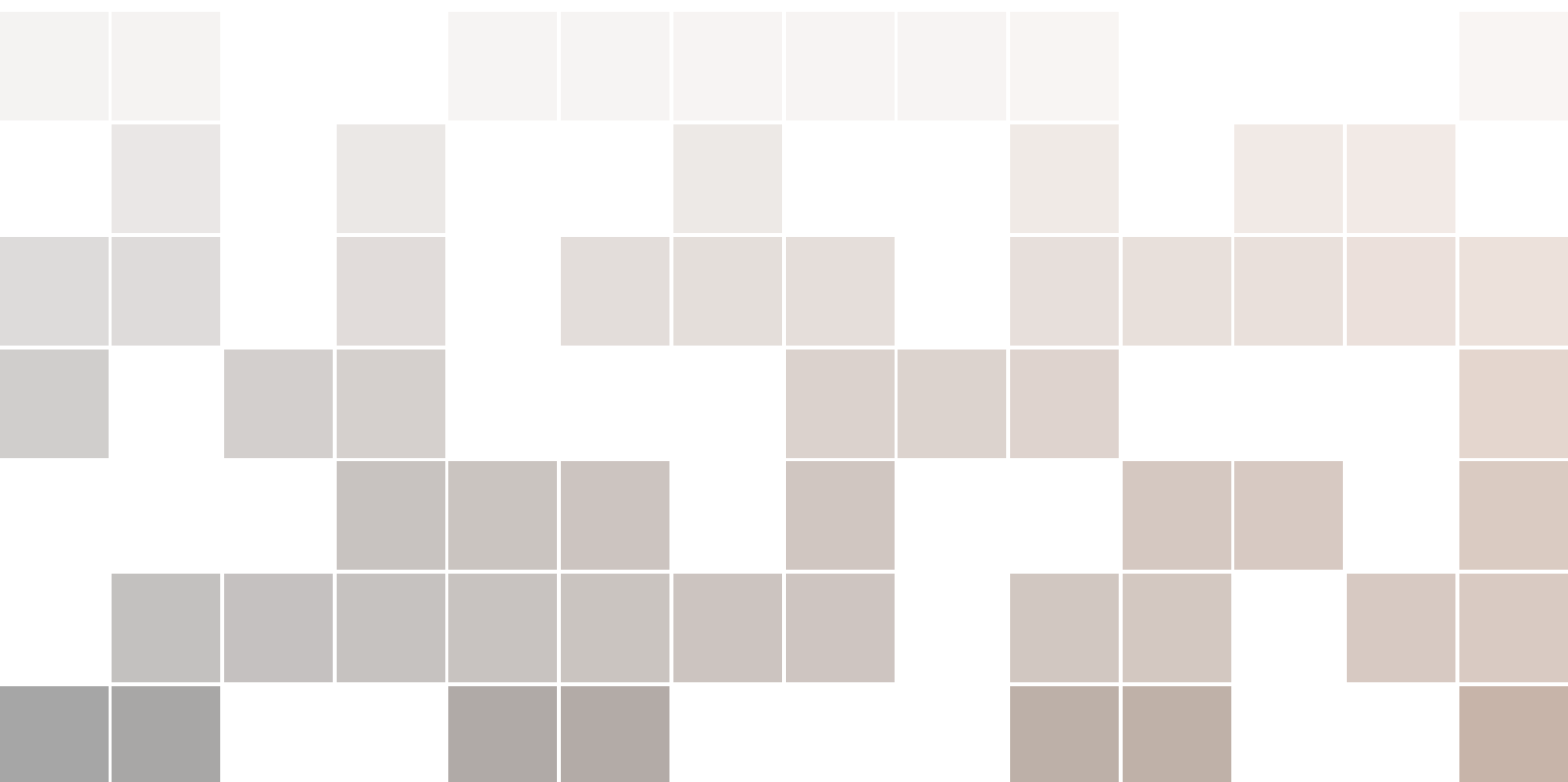




Mathématiques

Seconde Générale

Kevin Cauvin



Copyright © 2026 Kevin Cauvin

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0> ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Quatrième impression, Juillet 2026

Table des matières

1	Ensemble de nombres, intervalles	5
1.1	Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	5
1.2	Encadrement d'un nombre réel, intervalles	6
1.3	Valeur absolue d'un nombre réel	7
2	Arithmétique des nombres entiers	9
2.1	Diviseurs et multiples	9
2.2	Division euclidienne	10
2.3	Nombres premiers	10
3	Calcul numérique : fractions, puissances, racines carrées	11
3.1	Propriétés de calculs sur les fractions	11
3.2	Propriétés de calculs sur les puissances	12
3.3	Propriétés de calculs sur les racines carrées	12
4	Calcul littéral : équations, inéquations	13
4.1	Résoudre une équation	13
4.2	Résoudre une inéquation	14
5	Proportions et pourcentages, évolutions	17
5.1	Proportions et pourcentages	17
5.2	Évolutions	18
6	Vecteurs du plan	19
6.1	Généralités	19
6.2	Coordonnées dans une base orthonormée	20
6.3	Opérations : somme, produit par un réel	20
6.4	Colinéarité de vecteurs, applications	21

7	Droites du plan	23
7.1	Équations cartésiennes d'une droite	23
7.2	Équation réduite d'une droite	24
7.3	Positions relatives de deux droites	25
8	Statistiques descriptives	27
8.1	Statistiques à une variable	27
8.2	Regroupement par classes d'une série statistique continue	28
9	Courbes représentatives de fonctions	31
9.1	Courbe représentative d'une fonction	31
9.2	Application à la résolution graphique d'(in)équations	32
10	Variations de fonctions	33
10.1	Étude graphique des variations d'une fonction	33
10.2	Étude algébrique des variations d'une fonction	34
11	Fonctions de référence	35
11.1	Fonctions affines $x \mapsto mx + p$	35
11.2	Fonction valeur absolue $x \mapsto x $	36
11.3	Fonction carré $x \mapsto x^2$	36
11.4	Fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	36
12	Croisement de variables qualitatives	37
12.1	Tableau croisé d'effectifs	37
12.2	Fréquences marginales, fréquences conditionnelles	38
13	Échantillonnage et probabilités	39
13.1	Introduction à la loi des grands nombres	39
13.2	Calculs de probabilités conditionnelles	40

1. Ensemble de nombres, intervalles

1.1 Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Définition 1.1

- L'ensemble des *entiers naturels*, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres entiers, positifs.
- L'ensemble des *entiers relatifs*, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres entiers, positifs ou négatifs.

■ **Exemple 1.1** Compléter les pointillés ci-dessous avec le symbole $\in$ (*appartient à*), $\notin$ (*n'appartient pas à*), $\subset$ (*est inclus dans*) ou $\not\subset$ (*n'est pas inclus dans*).

- | | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $-3 \dots \mathbb{N}$. | 3. $\mathbb{Z} \dots \mathbb{N}$. | 5. $\frac{1}{5} \dots \mathbb{Z}$. | 7. $\pi \dots \mathbb{N}$. |
| 2. $4 \dots \mathbb{Z}$. | 4. $\frac{10}{2} \dots \mathbb{N}$. | 6. $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$. | 8. $-10 \dots \mathbb{Z}$. |

Définition 1.2 L'ensemble des nombres *décimaux*, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres ayant une écriture décimale finie, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous cette forme, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a}{10^n}$$

■ **Exemple 1.2** Compléter les pointillés ci-dessous avec le symbole $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

- 1,234 $\dots \mathbb{D}$ car
- 5,67 $\dots \mathbb{D}$ car
- $\pi \dots \mathbb{D}$ car
- $\mathbb{Z} \dots \mathbb{D}$ car

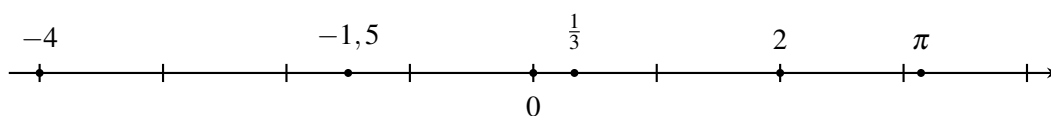
Définition 1.3 L'ensemble des nombres *rationnels*, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme un quotient, c'est-à-dire sous cette forme, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a}{b}$$

■ **Exemple 1.3** Compléter les pointillés ci-dessous avec le symbole $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

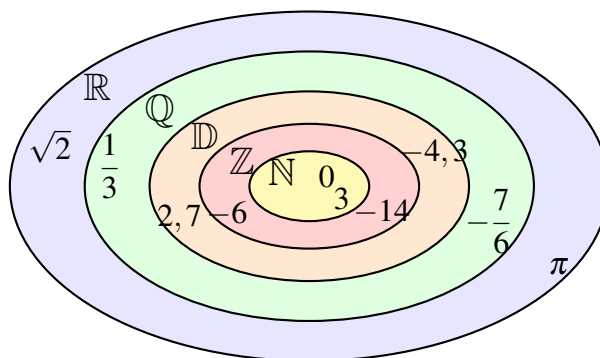
- $\frac{1}{3} \dots \mathbb{Q}$ car
- 0,5 $\dots \mathbb{Q}$ car
- $\pi \dots \mathbb{Q}$ car
- $\mathbb{D} \dots \mathbb{Q}$ car

Définition 1.4 L'ensemble des nombres *réels*, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire avec un nombre fini ou infini de décimales, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses d'une droite numérique :



Proposition 1.1 Les ensembles précédents forment une suite d'inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



1.2 Encadrement d'un nombre réel, intervalles

Définition 1.5 Encadrer un nombre réel x , c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$. L'amplitude de cet encadrement est le nombre $b - a$.

■ **Exemple 1.4** Proposer un encadrement de π d'amplitude 0,01 : $\leq \pi \leq$

Définition 1.6 Un *intervalle* est un ensemble de nombres, délimité par deux bornes (nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$). Il est *fermé* si ses bornes appartiennent à celui-ci, *ouvert* sinon.

■ **Exemple 1.5** Compléter le tableau sur le modèle de la première ligne.

Notation	Inégalité	Représentation
$[1; 3]$	$1 \leq x \leq 3$	

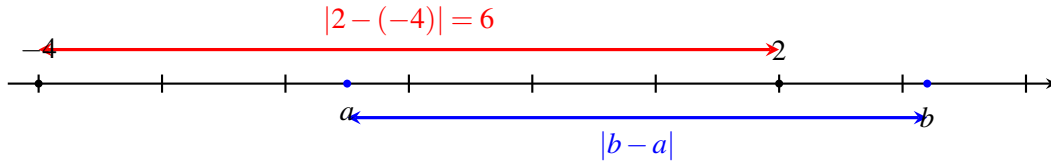
1.3 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 1.7 La *valeur absolue* d'un nombre réel x , est le nombre réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

■ **Exemple 1.6** Calculer les valeurs absolues : $|0| = \dots$, $|\pi| = \dots$, $|-1| = \dots$ et $|\frac{1}{2}| = \dots$

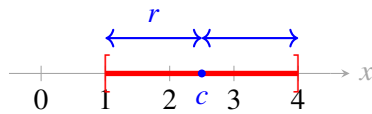
Définition 1.8 La *distance* entre les nombres réels a et b est le nombre $|b - a|$.



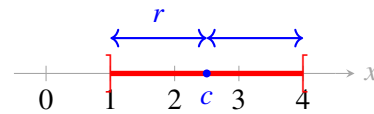
■ **Exemple 1.7** Expliquer pourquoi la distance entre les nombres -4 et 2 est égale à 6

Proposition 1.2 Soient a et r deux nombres réels, avec $r > 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leq r$ est $\mathcal{S} = [a - r; a + r]$.



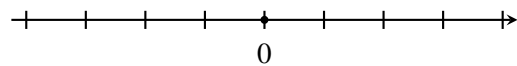
L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| < r$ est $\mathcal{S} =]a - r; a + r[$.



■ **Exemple 1.8** Déterminer, puis représenter graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x + 1| \leq 2$.

.....

Centre : Rayon :



2. Arithmétique des nombres entiers

2.1 Diviseurs et multiples

Définition 2.1 Soient $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$. Lorsqu'il existera un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \times k = b$, on dira que b est un *multiple* de a , que a *divise* b ou encore que a est un *diviseur* de b .

■ **Exemple 2.1** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. « 20 est un multiple de 4. »
2. « 2 divise 1. »
3. « 3 est un diviseur de -21 . »

Proposition 2.1 Soit $a \in \mathbb{N}$. La somme de deux multiples de a est un multiple de a .

■ **Exemple 2.2** et sont des multiples de 5, leur somme l'est aussi.

■ **Démonstration 2.1**
.....
.....
.....
.....

Définition 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. n est *pair* s'il est un multiple de 2 : il peut donc s'écrire $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. n est *impair* s'il n'est pas un multiple de 2 : il peut donc s'écrire $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.2 Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

■ **Exemple 2.3** est un nombre impair, son carré l'est aussi.

■ **Démonstration 2.2**
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Proposition 2.3 — Critères de divisibilité. Un entier naturel n est divisible...

- Par 2 si son chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6 ou 8).
- Par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Par 10 si son chiffre des unités est 0.

2.2 Division euclidienne

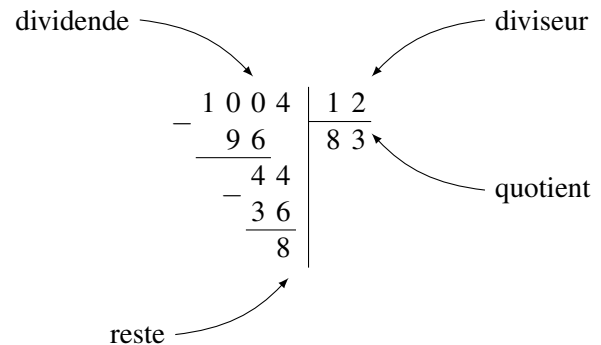
Définition 2.3 Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. La *division euclidienne de a par b* consiste à écrire a sous la forme :

$$a = bq + r$$

où $r \in [0; b[$. On appelle a le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient* et r le *reste*.

■ **Exemple 2.4** Dans l'exemple ci-contre, la division euclidienne de 1 004 par 12 a donné :

$$1\,004 = 12 \times 83 + 8$$



2.3 Nombres premiers

Définition 2.4 Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre strictement plus grand que 1. On dira que n est *premier* s'il a exactement deux diviseurs : 1, et lui-même.

■ **Exemple 2.5** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. « 12 est un nombre premier. »
2. « 13 est un nombre premier. »
3. « 21 est un nombre premier. »

■ **Exemple 2.6** On a écrit, ci-dessous, la liste des entiers de 2 à 50.

1. À l'aide du *crible d'Ératosthène*, entourer les nombres premiers de 2 à 50.

- On repère le premier nombre non rayé et non entouré dans la liste.
- Ce nombre est un nombre premier : on l'entoure.
- On raye tous les multiples de ce nombre, sauf lui-même.
- On recommence ce procédé.

2. L'ensemble des nombres premiers de 2 à 50 est donc :
-
-

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50

■ **Exemple 2.7** Écrire sous forme irréductible $\frac{12}{18} = \dots\dots\dots$

3. Calcul numérique : fractions, puissances, racines carrées

3.1 Propriétés de calculs sur les fractions

Proposition 3.1

1. Une fraction reste inchangée si l'on multiplie ou l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}^*, \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

2. Pour additionner ou soustraire deux fractions, on doit les réduire au même dénominateur, puis additionner les numérateurs en conservant le dénominateur commun.

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*, \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

3. Pour multiplier deux fractions, on multiplie leurs numérateurs entre eux, et leurs dénominateurs entre eux.

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*, d \in \mathbb{R}^*, \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

4. Pour diviser deux fractions, on multiplie la première avec l'inverse de la deuxième.

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}^*, d \in \mathbb{R}^*, \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

■ **Exemple 3.1** Écrire, sous la forme d'une fraction irréductible, les nombres suivants :

$$A = 1 - \frac{3}{7}, \quad B = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}, \quad C = \frac{1}{5} - \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad D = 2 \times \frac{3}{5} \div \frac{8}{7}$$

3.2 Propriétés de calculs sur les puissances

Définition 3.1 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Pour $a \neq 0$, on adopte la convention $a^0 = 1$.

R 10^n correspond à 1 suivi de n zéros, alors que 10^{-n} correspond à n zéros suivi de 1.

■ **Exemple 3.2** On a, par exemple, $2^3 = \dots$, $3^2 = \dots$, $(-2)^3 = \dots$ et $(-3)^2 = \dots$.

■ **Exemple 3.3** On a, par exemple, $2^{-3} = \dots$, $3^{-2} = \dots$, $(-2)^{-3} = \dots$ et $(-3)^{-2} = \dots$.

Proposition 3.2 Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad ; \quad (a^n)^p = a^{n \times p} \quad ; \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ si } b \neq 0$$

■ **Exemple 3.4** Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance.

$$\begin{array}{lll} 1. 3^2 \times 3^7 = \dots & 3. (7^6)^{10} = \dots & 5. 2^4 \times 3^4 = \dots \\ 2. \frac{2^{22}}{2^2} = \dots & 4. \frac{1}{3^2} = \dots & 6. \frac{10^8}{5^8} = \dots \end{array}$$

Définition 3.2 Soit $x \in \mathbb{D}^*$. L'écriture scientifique de x est une écriture sous la forme $x = a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$.

■ **Exemple 3.5** Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

$$\begin{array}{ll} 1. 391,27 : \dots & 3. 0,0002 : \dots \\ 2. -3\,104 : \dots & 4. 91,9 \times 10^3 : \dots \end{array}$$

3.3 Propriétés de calculs sur les racines carrées

Définition 3.3 Soit $a \in \mathbb{R}^+$. La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est égal à a :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

■ **Exemple 3.6** On a, par exemple, $\sqrt{9} = \dots$, $\sqrt{36} = \dots$, $\sqrt{81} = \dots$ et $\sqrt{49} = \dots$.

■ **Exemple 3.7** Une calculatrice donne $2,6^2 = 6,76$. Sans calculatrice, que vaut $\sqrt{6,76}$?

Proposition 3.3 Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ si } b \neq 0 \quad ; \quad \sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

■ **Exemple 3.8** Écrire le nombre $\sqrt{72} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit nombre positif possible.

4. Calcul littéral : équations, inéquations

4.1 Résoudre une équation

Définition 4.1 Résoudre une équation, c'est trouver (si celles-ci existent) toutes les solutions de cette équation, c'est-à-dire toutes les valeurs réelles de l'inconnue x telles que l'égalité est vraie. Ces valeurs constitueront l'ensemble de solutions de l'équation.

Proposition 4.1 On ne change pas l'ensemble de solutions d'une équation si :

1. On ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres d'une équation.

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, a = b \iff a + c = b + c \iff a - c = b - c$$

2. On multiplie, ou on divise par un nombre non nul les deux membres d'une équation.

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*, a = b \iff a \times c = b \times c \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

■ **Exemple 4.1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2x + 1 = 5x - 4$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. $4x - 9 = 3x - 11$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Proposition 4.2 Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

■ **Exemple 4.2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x - 1)(x + 3) = 0$.

.....
.....
.....

2. $(3x + 1)(x - 4) = 0$.

.....
.....
.....

Proposition 4.3 Un quotient de facteurs est nul si, et seulement si, le numérateur est nul, et le dénominateur non nul.

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$ et $b \neq 0$

■ **Exemple 4.3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\frac{x-3}{x+5} = 0.$

.....

2. $\frac{2x+7}{x-1} = 0.$

.....

Proposition 4.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si $\alpha < 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
2. Si $\alpha = 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ admet une unique solution $x_0 = 0$.
3. Si $\alpha > 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ admet deux solutions $x_1 = -\sqrt{\alpha}$ et $x_2 = \sqrt{\alpha}$.

■ **Exemple 4.4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 3 = 0$.

.....

4.2 Résoudre une inéquation

Définition 4.2 Résoudre une inéquation, c'est trouver (si celles-ci existent) toutes les solutions de cette inéquation, c'est-à-dire toutes les valeurs réelles de l'inconnue x telles que l'inégalité est vraie. Ces valeurs constitueront l'ensemble de solutions de l'inéquation.

Proposition 4.5 On ne change pas l'ensemble de solutions d'une inéquation si :

1. On ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres d'une inéquation.

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $a < b \iff a+c < b+c \iff a-c < b-c$

2. On multiplie, ou on divise par un nombre **strictement positif** les deux membres d'une équation.

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+^*$, $a < b \iff a \times c < b \times c \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Dans le cas où l'on multiplie, ou on divise par un nombre **strictement négatif** les deux membres d'une équation, on **change le sens** de l'inégalité.

■ **Exemple 4.5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $3x+3 \leq 5x-1.$

.....

2. $-2x-1 > 7x+2.$

.....

Définition 4.3 Un *tableau de signes* d'une expression algébrique est un tableau à deux lignes :

1. Sur la première ligne, on inscrit les différentes valeurs possibles pour x .
2. Sur la seconde ligne, on inscrit le signe de l'expression que l'on étudie, suivant les différentes valeurs de x .

■ **Exemple 4.6** Dresser, en le justifiant, le tableau de signes de l'expression $2x - 4$.

.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $2x - 4$		

En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $2x - 4 < 0$:



Grâce à la *règle des signes* rappelée ci-contre, on peut également dresser des tableaux de signes, ou résoudre des inéquations, avec des produits ou des quotients.

	+	-
+	+	-
-	-	+

■ **Exemple 4.7** Dresser, en le justifiant, le tableau de signes de l'expression $\frac{-3x+6}{x-1}$.

.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-3x + 6$		
Signe de $x - 1$		
Signe de $\frac{-3x+6}{x-1}$		

En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $\frac{-3x+6}{x-1} \geq 0$:

5. Proportions et pourcentages, évolutions

5.1 Proportions et pourcentages

Définition 5.1 Soient E un ensemble ayant n_E éléments, et A un sous-ensemble de E ayant n_A éléments. La *proportion de A dans E* est le nombre défini par :

$$p_{A,E} = \frac{n_A}{n_E} = \frac{\text{Effectif de } A}{\text{Effectif total de } E}$$

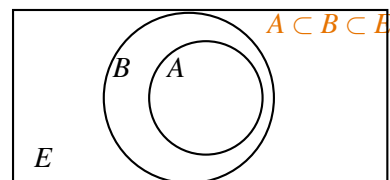
R Une proportion est un nombre sans unité, compris entre 0 et 1. Elle peut s'écrire sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou de pourcentage. Si on connaît deux de ces trois nombres (proportion de A dans E , effectif de A , effectif de E), on peut toujours trouver le troisième, en faisant un produit en croix.

■ **Exemple 5.1** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Une boîte de conserve de 500g contient 490g de tomate. Quelle est la proportion de tomate dans cette conserve ?
.....
.....
.....
2. Dans un parc de 2 000 véhicules, 15% sont hybrides. Combien y a-t-il de véhicules hybrides dans ce parc ?
.....
.....
.....

Définition 5.2 Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E . On dit que A est inclus dans B , ce que l'on note $A \subset B$, si A est un sous-ensemble de B .

Proposition 5.1 Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B$. On note $p_{A,B}$ la proportion d'éléments de A dans B , $p_{B,E}$ celle de B dans E et $p_{A,E}$ celle de A dans E . Alors $p_{A,E} = p_{A,B} \times p_{B,E}$.



■ **Exemple 5.2** Dans un lycée de 1 600 élèves, 60% sont des filles et parmi les filles, 40% font du sport. Quelle proportion représentent les filles sportives dans l'ensemble du lycée ?
.....

5.2 Évolutions

Définition 5.3 On considère une grandeur qui évolue d'une valeur $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.



1. La *variation absolue* de cette grandeur est $\Delta V = V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}$.
2. Le *taux d'évolution*, ou la *variation relative*, de cette grandeur est $T = \frac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}}$.
3. Le *coefficient multiplicateur* de cette grandeur est $C = \frac{V_{\text{arrivée}}}{V_{\text{départ}}}$, ou encore $C = 1 + T$.



Une grandeur qui augmente (resp. qui diminue) correspond à un taux d'évolution positif (resp. négatif) et un coefficient multiplicateur supérieur (resp. inférieur) à 1.

■ **Exemple 5.3** Donner les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1. +5% : | 4. -5% : | 7. +15% : | 10. -90% : |
| 2. +10% : | 5. -10% : | 8. -15% : | 11. +100% : |
| 3. +20% : | 6. -20% : | 9. +5,5% : | 12. +300% : |

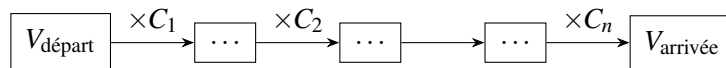
■ **Exemple 5.4** Le prix d'un vélo tout-terrain (VTT) passe de 500 € à 410 €. Calculer le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution du prix du VTT.

.....

.....

.....

Proposition 5.2 On considère une grandeur, qui subit plusieurs évolutions.



Le coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution. Autrement dit, $C_{\text{global}} = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$.

■ **Exemple 5.5** Le volume d'un petit lac diminue de 10% chaque semaine. Déterminer le taux d'évolution du volume de ce petit lac sur 2 semaines.

.....

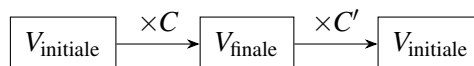
.....

■ **Exemple 5.6** Déterminer le taux d'évolution d'un prix augmenté de 10%, puis baissé de 10%.

.....

.....

Proposition 5.3 On considère une grandeur, qui subit deux évolutions *reciproques* :



Le coefficient multiplicateur permettant à une grandeur de retrouver sa valeur de départ est égal à l'inverse de son coefficient multiplicateur. Autrement dit, on a $C' = \frac{1}{C}$.

■ **Exemple 5.7** Une action boursière a baissé de 20%. Pour revenir à sa valeur avant la baisse, quel doit être le pourcentage d'augmentation de cette action ?

.....

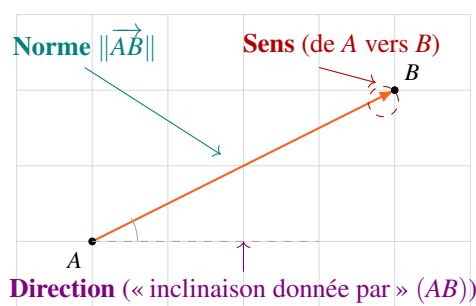
.....

6. Vecteurs du plan

6.1 Généralités

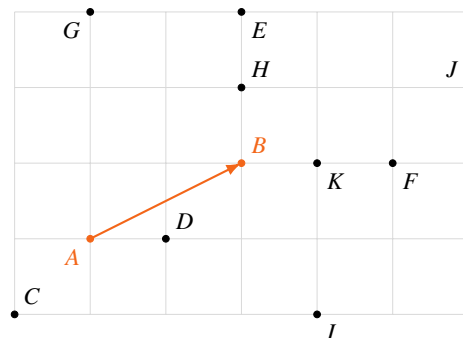
Définition 6.1 Un vecteur $\vec{AB}$ est caractérisé par les trois éléments suivants :

- Sa *direction* : celle de la droite (AB) ,
- Son *sens* : celui de A vers B ,
- Sa *norme*, notée $\|\vec{AB}\|$: égale à la longueur AB .



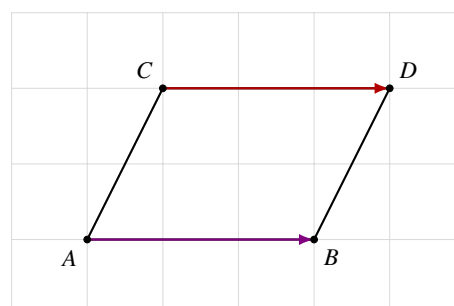
■ **Exemple 6.1** On considère la figure suivante, composée d'un vecteur $\vec{AB}$ et de 9 autres points notés de C à K .

1. Donner tous les *représentants* du vecteur $\vec{AB}$:
2. Donner un exemple de vecteur :
 - a. de même norme que $\vec{AB}$:
 - b. de même direction que $\vec{AB}$:
 - c. de sens contraire à $\vec{AB}$:



Proposition 6.1 $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux si, et seulement si :

- Ils ont même direction, même sens et même norme.
- Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

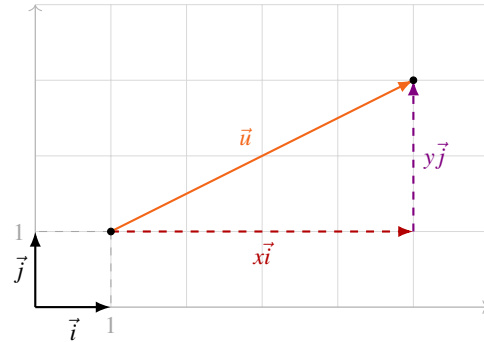


6.2 Coordonnées dans une base orthonormée

Définition 6.2 Dans un repère orthonormé, on note $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. On dira que $(\vec{i}; \vec{j})$ forme une *base orthonormée du plan*, c'est-à-dire que n'importe quel vecteur $\vec{u}$ peut se décomposer de manière unique sous la forme suivante :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Les nombres réels x et y sont alors appelés *coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$* .



■ **Notation 6.1** On peut noter les coordonnées d'un vecteur en colonne $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou en ligne $\vec{u}(x; y)$.

Proposition 6.2 On se place dans un repère du plan.

1. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
2. Si le repère est orthonormé, un vecteur $\vec{u}(x; y)$ a une norme égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

■ **Exemple 6.2** On reprend le schéma de la **Définition 6.2**. Soient A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1. Placer A et B dans le repère de la **Définition 6.2**.
2. Lire graphiquement les coordonnées des points A et B :
3. Lire graphiquement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:
4. Retrouver, par le calcul, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
5. En déduire la norme de $\vec{u}$:

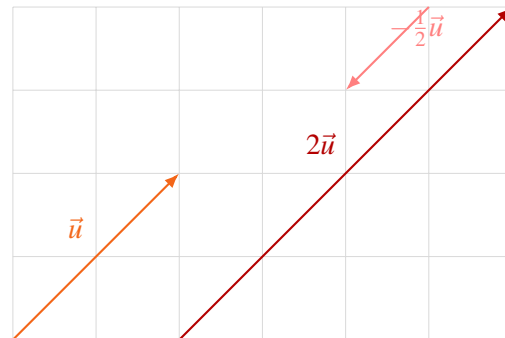
6.3 Opérations : somme, produit par un réel

Définition 6.3 Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nuls. Le vecteur $k\vec{u}$, appelé *produit de $\vec{u}$ par k* est un vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$,
de sens contraire à $\vec{u}$ si $k < 0$.
- de norme égale à $|k| \times \|\vec{u}\|$.



Lorsque $k = -1$, le vecteur $-\vec{u}$ est dit *opposé* à $\vec{u}$.



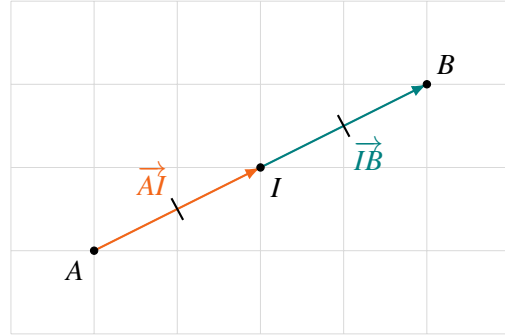
Proposition 6.3 Soient $k \in \mathbb{R}$, et $\vec{u}(x; y)$. Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.

■ **Exemple 6.3** On reprend le schéma de la **Définition 6.3**.

1. Lire graphiquement les coordonnées du vecteur $\vec{u}$:
2. À l'aide de la **Proposition 6.3**, déterminer les coordonnées du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$:
3. Tracer un représentant du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ dans le repère de la **Définition 6.3**.

Proposition 6.4 — Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment. Si A et B sont deux points du plan, et que I est le milieu de $[AB]$, alors :

$$\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$



■ **Exemple 6.4** Dans un repère, on considère les points $A(1; 1)$ et $B(5; 3)$. On note I le milieu du segment $[AB]$, dont les coordonnées inconnues sont notées $(x_I; y_I)$.

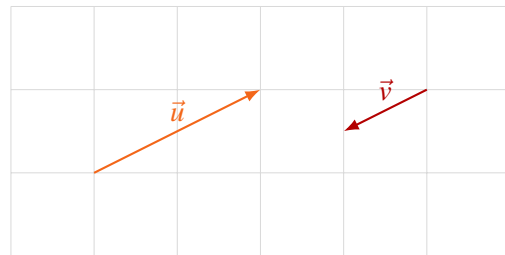
1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$:
2. À l'aide de la **Proposition 6.4**, en déduire les coordonnées de I :

6.4 Colinéarité de vecteurs, applications

Définition 6.4 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si l'une de ces conditions est vérifiée :

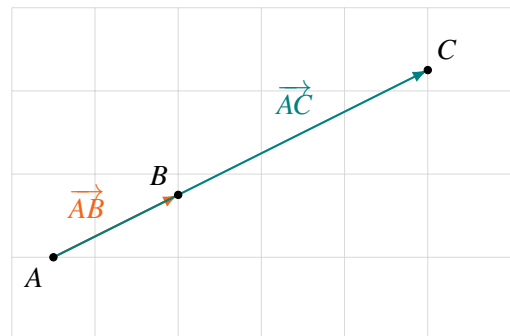
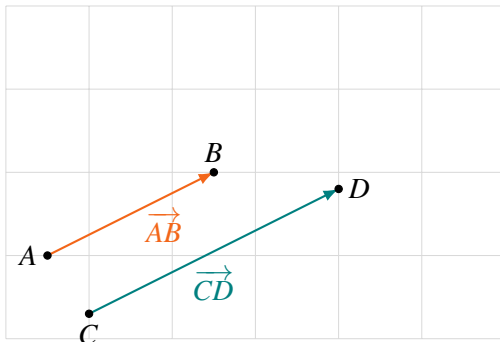
1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
2. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v} \text{ ou que } \vec{v} = k\vec{u}$$



Proposition 6.5

1. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.
2. Trois points A , B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.



Définition 6.5 Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Le *déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* est le nombre :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Proposition 6.6 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, l'une de ces conditions est vérifiée :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
2. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.
3. Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles entre elles.

■ **Exemple 6.5** Dans un repère orthonormé, on donne les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Préciser, dans chaque cas, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

.....

3. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

.....

2. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$.

.....

4. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

.....

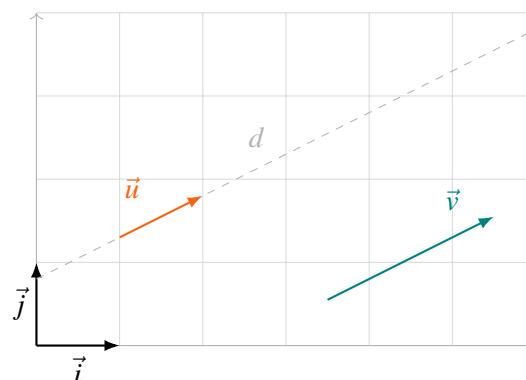
7. Droites du plan

7.1 Équations cartésiennes d'une droite

Définition 7.1 On dit qu'un vecteur non nul est un *vecteur directeur* d'une droite d , si sa direction est parallèle à d .

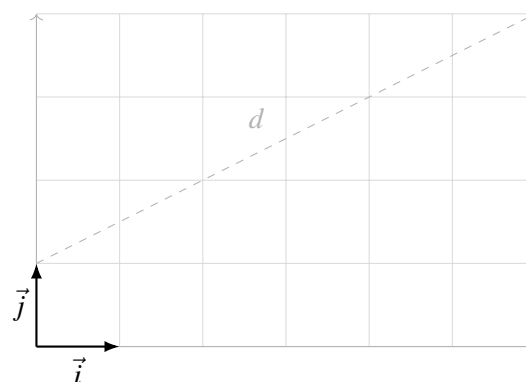
■ **Exemple 7.1** On a représenté ci-contre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ directeurs de d .

1. Construire, ci-contre, un troisième vecteur directeur de sens contraire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Combien y a-t-il de vecteurs directeurs pour une droite donnée?



■ **Exemple 7.2** On a représenté ci-contre une droite d .

1. Lire graphiquement des coordonnées de vecteurs directeurs de d
2. Le vecteur $\vec{w}(100; 75)$ est-il directeur de d ? Justifier.



Proposition 7.1 Dans un repère orthonormé, toute droite d admet une *équation cartésienne* de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où $(a; b) \neq (0; 0)$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-b; a)$.

■ **Exemple 7.3** On considère la droite d d'équation cartésienne $3x - y + 1 = 0$.

1. Donner un vecteur directeur de d .
2. d passe-t-elle par le point $A(2; 5)$?

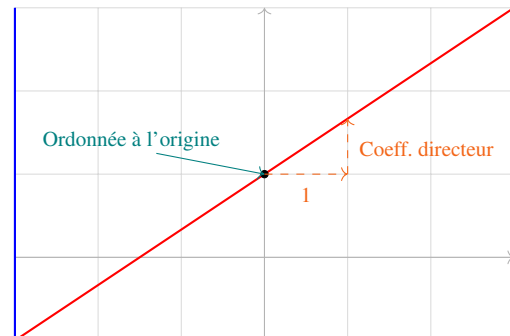
■ **Exemple 7.4** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(1; 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3; -4)$.

■ **Exemple 7.5** Déterminer une équation cartésienne de (AB) , où $A(1; 1)$ et $B(0; -2)$.

7.2 Équation réduite d'une droite

Proposition 7.2 Soit d une droite du plan.

1. Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation réduite de la forme $x = k$.
2. Si d est non parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation réduite de la forme $y = mx + p$, où :
 - m est le *coefficient directeur* ou la *pente* de d ,
 - p est l'*ordonnée à l'origine* de d .



■ **Exemple 7.6** On considère la droite d d'équation cartésienne $2x + 5y - 7 = 0$.

1. Déterminer son équation réduite.
2. d passe-t-elle par le point $B(1; 1)$?

■ **Exemple 7.7** On considère la droite d d'équation réduite $y = 4x - 7$.

1. Déterminer une équation cartésienne de d .
2. d passe-t-elle par le point $C(4; -7)$?

Proposition 7.3 Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. On peut calculer son coefficient directeur m de plusieurs manières :

1. Si d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors :

$$m = -\frac{a}{b}$$

2. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de d , alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

- Exemple 7.8** Déterminer une équation réduite de (AB) , où $A(1; 1)$ et $B(0; -2)$

7.3 Positions relatives de deux droites

Proposition 7.4 Soient d et d' deux droites du plan, telles que :

- d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et pour équation réduite $y = mx + p$.
- d' a pour équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$ et pour équation réduite $y = m'x + p'$.

Alors les droites d et d' sont :

1. sécantes si $m \neq m'$, **ou** si $ab' - a'b \neq 0$.
2. strictement parallèles si $m = m'$ et $p \neq p'$, **ou** si $ab' - a'b = 0$ et (a, b, c) n'est pas proportionnel à (a', b', c') .
3. confondues si leurs équations réduites sont égales, **ou** si leurs équations cartésiennes sont proportionnelles.

■ **Exemple 7.9** Dans chacun des cas suivants, évaluer si les droites sont parallèles ou sécantes. Dans ce dernier cas, chercher les coordonnées du point d'intersection.

1. $d : -3x + 2y - 10 = 0$ et $d' : 6x - 4y + 1 = 0$.
2. $d : y = 4x - 1$ et $d' : y = 3x - 3$.

[illegible]

8. Statistiques descriptives

8.1 Statistiques à une variable

Dans cette section, on s'intéresse à une série statistique donnée par le tableau ci-dessous. On a relevé des valeurs numériques, que l'on note x_* , qui apparaissent un certain Nb fois, que l'on note n_* . On notera $n = n_1 + \dots + n_p$ l'effectif total de cette série statistique.

Valeur	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_p
Effectif	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_p

Définition 8.1 La *moyenne pondérée* de cette série statistique est le nombre, noté $\bar{x}$, tel que :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_p x_p}{n}$$

La *variance* de cette série statistique est le nombre, noté V , tel que :

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{n}$$

L'*écart-type* de cette série statistique est le nombre, noté σ , tel que $\sigma = \sqrt{V}$. Ce dernier mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

■ **Exemple 8.1** Le tableau ci-dessous donne le Nb livres lus pendant une année par les élèves d'une classe de Première.

Nb livres	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	2	3	4	3	2

1. Déterminer l'effectif total de cette série statistique :
2. Calculer la moyenne du Nb livres lus par les élèves de cette classe.

.....

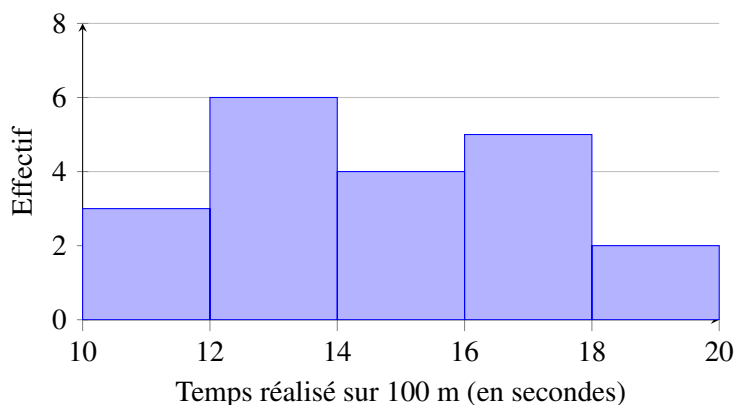
Définition 8.2 La *moyenne pondérée* de cette série statistique est le nombre, noté $\bar{x}$, tel que :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_px_p}{n}$$

où x_* est le centre de la classe $[a_*; b_*$, c'est-à-dire $x_* = \frac{a_* + b_*}{2}$.

Définition 8.3 Un *histogramme* est un graphique utilisé pour représenter une série statistique regroupée en *classes* (intervalles de valeurs). Chaque rectangle représente une classe, et son aire indique l'importance de cette classe dans la série, proportionnellement à son effectif ou à sa fréquence.

■ **Exemple 8.3** Lors d'une séance d'EPS, un professeur mesure le temps réalisé par les élèves de sa classe lors d'un sprint de 100 mètres. Les temps obtenus sont regroupés par intervalles. L'histogramme suivant représente la répartition des temps de course.



1. Compléter le tableau donnant la répartition des élèves.

Temps (en s)	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 18[	[18; 20[
Effectif					

2. Combien d'élèves ont participé à cette course ?
3. Quelle classe contient le plus grand nombre d'élèves ?

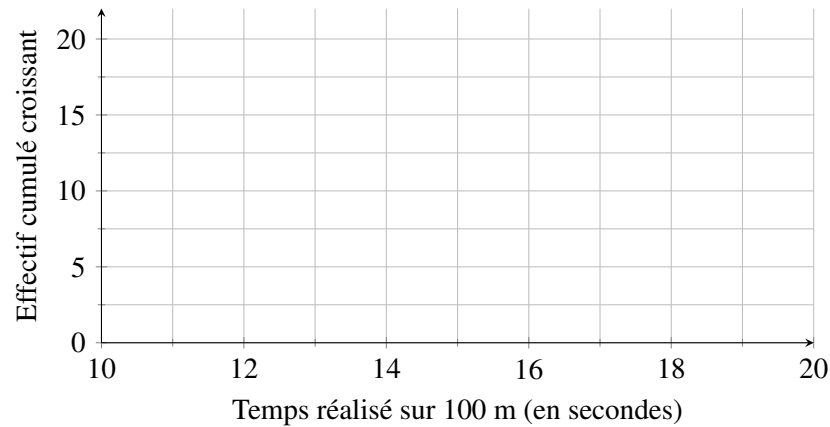
Définition 8.4 Un *polygone des effectifs cumulés croissants* est un autre graphique utilisé pour représenter une série statistique regroupée en classes. Il est construit en reliant les points dont les coordonnées sont la borne supérieure de chaque classe en abscisses, et l'effectif cumulé croissant correspondant. Il permet de déterminer le nombre d'individus dont la valeur est inférieure ou égale à une borne donnée.

■ **Exemple 8.4** On reprend l'Exemple 8.3.

1. Compléter le tableau suivant en calculant les effectifs cumulés croissants.

Temps (en s)	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 18[	[18; 20[
Effectif					
Effectif cumulé croissant					

2. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants dans le repère ci-dessous à partir du tableau complété précédemment. *On pourra ajouter le point de départ (10;0).*



3. Déterminer graphiquement la classe médiane. *On rappelle que la médiane partage la population en deux groupes de même effectif.*
4. Estimer la médiane de cette série en supposant que les élèves sont répartis de manière uniforme dans la classe médiane.

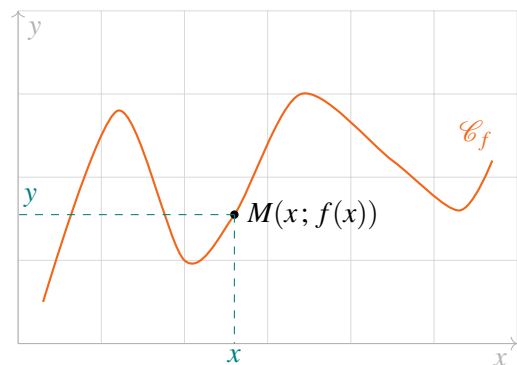
9. Courbes représentatives de fonctions

9.1 Courbe représentative d'une fonction

Définition 9.1 La *courbe représentative* d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées :

$$(x; f(x))$$

Autrement dit, pour chaque nombre réel x appartenant à l'ensemble de définition de f , on place un point dont l'abscisse est x et dont l'ordonnée est l'image $f(x)$.



■ **Exemple 9.1** Le point $A(4; 10)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2$?

■ **Exemple 9.2** On considère la fonction f définie sur $[-3; 3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Tracer, ci-contre, la courbe représentant f .



■ **Exemple 9.3** On considère la fonction g définie sur $[-3; 3]$ par :

$$g(x) = |x+1| - 1$$

Tracer, ci-contre, la courbe représentant g .



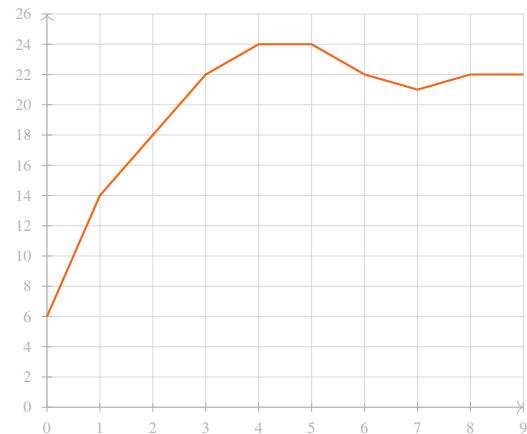
9.2 Application à la résolution graphique d'(in)équations

Proposition 9.1 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, et $k \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à trouver les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$, dont l'ordonnée est égale à k .
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq k$ revient à trouver les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$, dont l'ordonnée est inférieure ou égale à k .

■ **Exemple 9.4** On admettra que la fonction f , définie sur $[0; 9]$ et dont le graphe $\mathcal{C}_f$ est donné ci-contre, donne la température d'une chambre (en $^{\circ}\text{C}$), en fonction du temps (en h) après l'allumage d'un chauffage.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 14$. Interpréter ce résultat.
.....
.....
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 22$. Interpréter ce résultat.
.....
.....

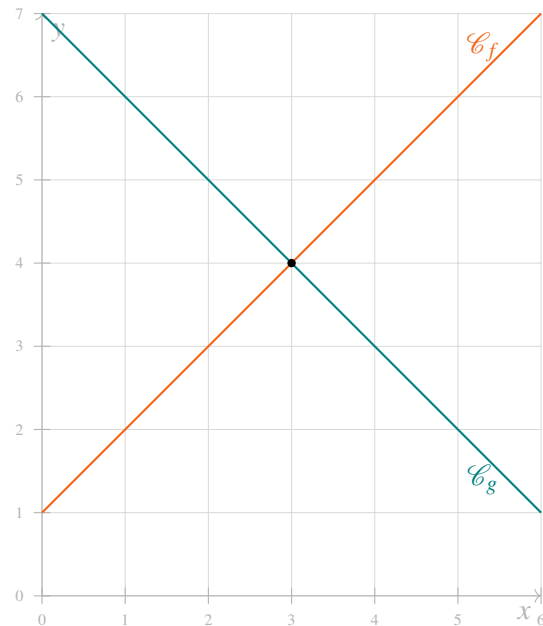


Proposition 9.2 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ revient à trouver les abscisses des points où la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$.

■ **Exemple 9.5** Un agriculteur possède deux réservoirs, A et B. À l'instant $x = 0$ (en h), il ouvre simultanément un robinet qui remplit A et une vanne qui vide B. Le niveau d'eau (en centaines de litres) de chaque réservoir est modélisé par deux fonctions f (réservoir A) et g (réservoir B), représentées sur le graphique ci-contre, pour $x \in [0; 6]$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter ce résultat.
.....
.....
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. Que déduire sur les niveaux des deux réservoirs pendant cette période?
.....
.....
3. À quel instant x le réservoir A contient-il 500 litres (soit $y = 5$)? Le réservoir B contient-il alors plus ou moins d'eau que A?
.....
.....



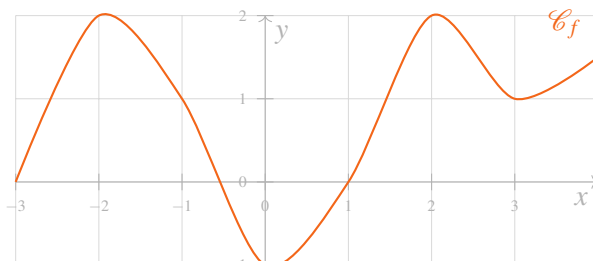
10. Variations de fonctions

10.1 Étude graphique des variations d'une fonction

Définition 10.1 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Elle admet un :

1. **maximum** M s'il existe $a \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(a) = M$, et que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leq M$.
Ce maximum correspond à l'ordonnée du point le plus haut de sa courbe.
2. **minimum** m s'il existe $a \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(a) = m$, et que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geq m$.
Ce minimum correspond à l'ordonnée du point le plus bas de sa courbe.

■ **Exemple 10.1** On considère une fonction f définie sur $[-3; 4]$, représentée ci-dessous. Lire graphiquement le maximum et le minimum de f sur $[-3; 4]$, et préciser en quelle(s) valeur(s) de x ils sont atteints.



Définition 10.2 Un *tableau de variations* d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ est un tableau qui résume, à l'aide de flèches, comment évoluent les valeurs de $f(x)$ lorsque x parcourt $\mathcal{D}_f$.

1. Une flèche orientée vers le haut indique que la fonction est *croissante* sur l'intervalle correspondant : lorsque x augmente, $f(x)$ augmente aussi.
2. Une flèche orientée vers le bas indique que la fonction est *décroissante* sur l'intervalle correspondant : lorsque x augmente, $f(x)$ diminue.
3. Les valeurs de x où la fonction change de sens de variation (les bornes des intervalles) sont indiquées sur la première ligne du tableau, et les valeurs de $f(x)$ correspondantes sur la dernière ligne.

■ **Exemple 10.2** On reprend la fonction f de l'Exemple 10.1. Dresser son tableau de variations ci-contre.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

10.2 Étude algébrique des variations d'une fonction

Définition 10.3 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On dira que f est :

1. *croissante* si, pour tout $a, b \in \mathcal{D}_f$ tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
2. *décroissante* si, pour tout $a, b \in \mathcal{D}_f$ tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
3. *monotone* si elle est croissante ou décroissante sur $\mathcal{D}_f$.

Lorsque les inégalités précédentes sont strictes, on parlera de *stricte croissance*, *stricte décroissance* et de *stricte monotonie*.

■ **Exemple 10.3** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Calculer $f(b) - f(a)$ en fonction de a et b
2. En déduire le signe de $f(b) - f(a)$, sachant que $a < b$
3. Conclure sur le sens de variation, et compléter le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

■ **Exemple 10.4** On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = -2x^2 + 3$.

1. Montrer, à l'aide de la **Définition 10.1**, que g admet un maximum sur $[0; +\infty[$
2. Montrer, à l'aide de la **Définition 10.3**, que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
3. Compléter le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
Variations de g		

11. Fonctions de référence

Les fonctions considérées comme étant « de référence » sont les fonctions affines, la fonction valeur absolue, la fonction carré et la fonction inverse.

11.1 Fonctions affines $x \mapsto mx + p$

Définition 11.1 Une fonction affine est une fonction f définie par une expression de la forme $f(x) = mx + p$, où :

- m est le **coefficient directeur** de f ,
- p est l'**ordonnée à l'origine** de f .

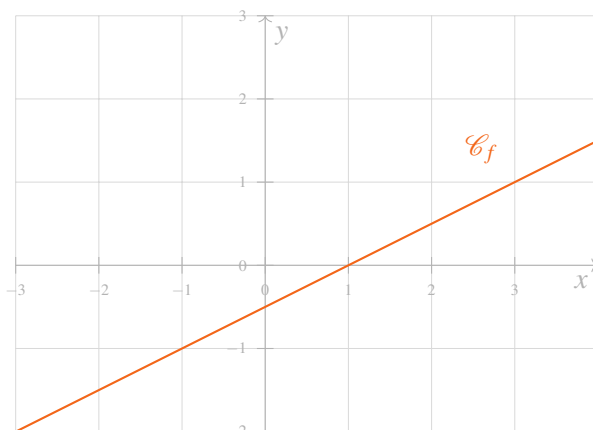
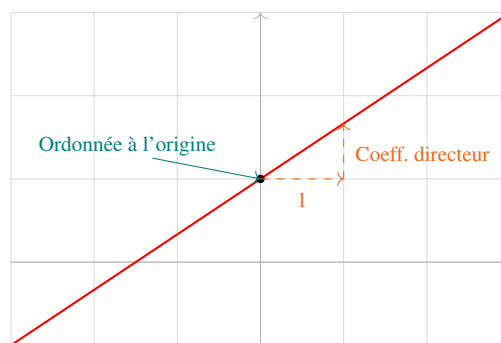
Proposition 11.1 Le graphe d'une fonction affine est une droite coupant l'axe des ordonnées en p . Elle est croissante (resp. décroissante) si $m \geq 0$ (resp. $m \leq 0$).

Proposition 11.2 Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction affine f , alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

■ **Exemple 11.1** Une fonction affine f a été représentée ci-contre. Retrouver son expression à l'aide de son graphe.

.....



■ **Exemple 11.2** Dresser, en le justifiant, le tableau de signes de l'expression $-3x + 1$.

.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-3x + 1$		

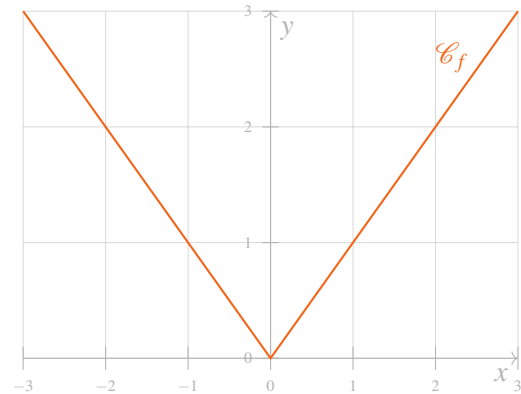
11.2 Fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Définition 11.2 La *fonction valeur absolue* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x|$$

Proposition 11.3 Le graphe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Proposition 11.4 La fonction valeur absolue est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_*^-$, positive et croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.



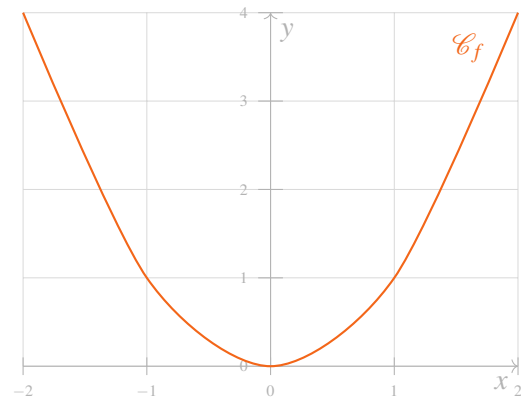
11.3 Fonction carré $x \mapsto x^2$

Définition 11.3 La *fonction carré* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Proposition 11.5 Le graphe de la fonction carré est une *parabole*, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Proposition 11.6 La fonction carré est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_*^-$, positive et croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.



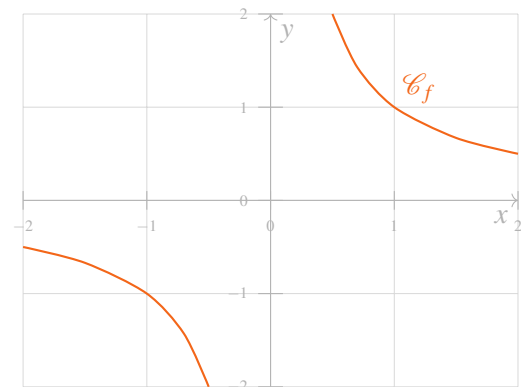
11.4 Fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$

Définition 11.4 La *fonction inverse* est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Proposition 11.7 Le graphe de la fonction inverse est une *hyperbole*, elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Proposition 11.8 La fonction inverse est strictement positive et décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, strictement négative et décroissante sur $\mathbb{R}_*^-$.



12. Croisement de variables qualitatives

12.1 Tableau croisé d'effectifs

Définition 12.1 Une *série statistique* est un ensemble d'informations collectées sur une *population* (personnes ou objets). Pour chaque *individu* de la population, on s'intéresse à un *caractère* pouvant prendre plusieurs valeurs.

■ **Exemple 12.1** Pour ces populations, proposer deux caractères que l'on pourrait étudier.

1. Élèves d'une classe :
2. Personnes fréquentant une salle de sport :
3. Sachet d'oranges à jus :

Définition 12.2 Un *tableau croisé*, ou *tableau à double entrée*, est un tableau permettant de synthétiser des données, lorsque l'on étudie deux caractères sur une même population.

■ **Exemple 12.2** Le comité d'entreprise d'une société française souhaite organiser un week-end à Rome. Une enquête est faite auprès des 1 200 employés (dont 720 sont des femmes) de cette société afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport. Les moyens de transport proposés sont le train (choisi par 618 d'entre eux), l'avion (choisi par 462 d'entre eux) ou l'autocar. On sait de plus que 56 femmes ont choisi l'autocar, et 150 hommes ont choisi le train. Compléter le tableau croisé ci-dessous.

	Train	Avion	Autocar	Total
Femmes				
Hommes				
Total				

■ **Exemple 12.3** Dans un club multisport de 400 adhérents, le tennis, le water-polo et le badminton sont pratiqués. Les adhérents sont classés suivant leurs catégories : enfant, senior, vétéran. On sait que 20 % pratiquent le badminton et parmi ceux-là, la moitié sont des enfants ; 75 % pratiquent le tennis et parmi eux, 30 % sont des seniors. Enfin, parmi les adhérents pratiquant le water-polo, aucun n'est enfant et 5 sont des vétérans. Compléter le tableau croisé ci-dessous.

	Badminton	Tennis	Water-polo	Total
Enfant		130		
Senior	30			
Vétéran				
Total				400

12.2 Fréquences marginales, fréquences conditionnelles

Définition 12.3 On réalise une étude statistique sur une population, et on s'intéresse à deux caractères C et C' portant sur les individus de cette population.

1. La *fréquence marginale de C* est :

$$\frac{\text{Effectif d'individus ayant } C}{\text{Effectif total}}$$

2. La *fréquence conditionnelle de C parmi C'* est :

$$\frac{\text{Effectif d'individus ayant } C \text{ et } C'}{\text{Effectif d'individus ayant } C'}$$

■ **Exemple 12.4** Dans une école de cuisine comptant 300 élèves, trois spécialités sont enseignées : la pâtisserie, la cuisine salée et la boulangerie. Les élèves sont répartis en trois niveaux : débutant, intermédiaire, expert.

On sait que 20 % des élèves suivent la boulangerie et parmi eux, la moitié sont débutants ; 60 % suivent la cuisine salée et parmi eux, un quart sont experts. Enfin, parmi les élèves en pâtisserie, aucun n'est débutant et 10 sont experts.

	Boulangerie	Cuisine salée	Pâtisserie	Total
Débutant		90		
Intermédiaire	20			
Expert				
Total				300

1. Compléter le tableau croisé ci-dessous.
2. Quelle est la fréquence des débutants parmi l'ensemble des élèves de l'école ?
3. Quelle est la fréquence des experts parmi ceux qui suivent la cuisine salée ?
4. Parmi les élèves débutants, quelle proportion suit la cuisine salée ?

13. Échantillonnage et probabilités

13.1 Introduction à la loi des grands nombres

Définition 13.1 Lorsque l'on réalise n fois une même expérience aléatoire de manière *indépendante* (c'est-à-dire sans influence d'une réalisation sur une autre), l'ensemble des résultats obtenus constitue un *échantillon de taille n* .

■ **Exemple 13.1** Le script suivant simule le lancer de n pièces de monnaies équilibrées :

```
import random
def lancer(n):
    pile, face = 0, 0
    for i in range(n):
        resultat = random.choice(["Pile", "Face"])
        if resultat == "Pile":
            pile = pile + 1
        else:
            face = face + 1
    print("Nb Pile :", pile)
    print("Nb Face :", face)
    print("Freq Pile :", pile / n)
    print("Freq Face :", face / n)
```

On appelle cette fonction à trois reprises.

>>> lancer(100)	>>> lancer(100)	>>> lancer(10000)
Nb Pile : 52	Nb Pile : 39	Nb Pile : 4999
Nb Face : 48	Nb Face : 61	Nb Face : 5001
Freq Pile : 0.52	Freq Pile : 0.39	Freq Pile : 0.4999
Freq Face : 0.48	Freq Face : 0.61	Freq Face : 0.5001

Que peut-on observer ?

Définition 13.2 La *fluctuation d'échantillonnage* est le phénomène consistant à observer que, pour deux échantillons de même taille n , les fréquences d'apparition du succès peuvent changer.

Proposition 13.1 — Loi des grands nombres. Lorsque la taille de l'échantillon n devient grande, la fréquence d'apparition d'un succès se rapproche de sa probabilité théorique p .

13.2 Calculs de probabilités conditionnelles

Définition 13.3 Soient A et B deux évènements, tel que A ne soit pas un évènement impossible. On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* , que l'on note $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé.

Proposition 13.2 Soient A et B deux évènements, tel que A ne soit pas un évènement impossible. La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ se calcule ainsi :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{Effectif de } A \cap B}{\text{Effectif de } A} = \frac{\text{Effectif de } (A \text{ et } B)}{\text{Effectif de } A}$$

■ **Exemple 13.2** Une culture de pois comporte des pois de couleur « jaune » ou « vert » et de forme « lisse » ou « ridé ». Le tableau ci-dessous est partiellement renseigné à partir des observations effectuées sur un grand nombre de pois de cette culture.

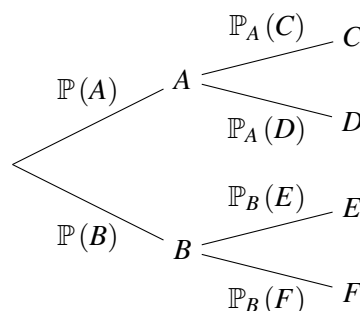
	Nb de pois jaunes	Nb de pois verts	Total
Nb de pois ridés	100		600
Nb de pois lisses			
Total	300		10 000

Compléter le tableau, puis calculer les probabilités des évènements suivants :

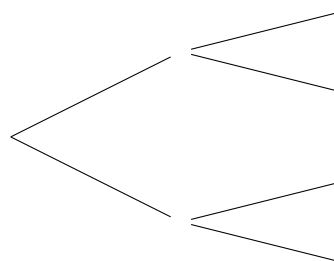
1. « Un pois est vert », sachant qu'il est lisse.
2. « Un pois est lisse », sachant qu'il est vert.

Définition 13.4 Un *arbre pondéré* est une représentation d'une expérience aléatoire en plusieurs étapes. On le construit ainsi :

1. Chaque *branche* se termine par le nom d'un évènement, et on y inscrit au-dessus sa probabilité.
2. Sur les branches issues d'un même *noeud*, la somme des probabilités est égale à 1.
3. Sur le deuxième niveau de profondeur de l'arbre, on inscrit des probabilités conditionnelles.



■ **Exemple 13.3** Le matin, Léa doit prendre deux bus successifs pour se rendre au lycée : un bus, puis une correspondance en métro. D'après les statistiques de la compagnie de transport, le bus a une probabilité de 0,8 d'arriver à l'heure. Si le bus est à l'heure, le métro le sera aussi avec une probabilité de 0,9. Si le bus est en retard, le métro le sera aussi avec une probabilité de 0,15.

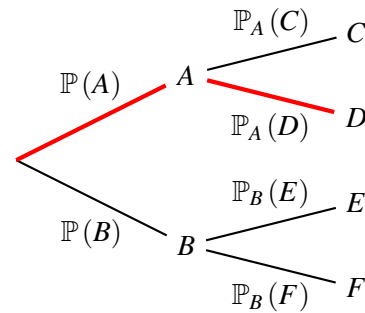


On note B et M les évènements « Le bus est à l'heure. » et « Le métro est à l'heure. », $\bar{B}$ et $\bar{M}$ leurs évènements contraires respectifs.

1. Donner les probabilités $\mathbb{P}(B) = \dots$, $\mathbb{P}_B(M) = \dots$ et $\mathbb{P}_{\bar{B}}(\bar{M}) = \dots$.
2. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessus.

Proposition 13.3 La probabilité d'une « branche totale » est égale au produit des probabilités rencontrées sur cette branche. Dans le cas ci-contre, pour calculer la probabilité de l'issue « A et D », on doit calculer :

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$$



Proposition 13.4 Soient A et B deux événements, tel que A ne soit pas un événement impossible. La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ se calcule ainsi :

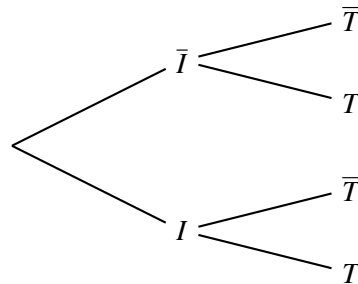
$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple 13.4** Dans une population, on estime que 10 % des personnes sont infectées par un virus. Un test de dépistage est utilisé pour détecter cette infection. On sait que :

- si une personne est infectée, le test est positif dans 90 % des cas (sensibilité) ;
- si une personne n'est pas infectée, le test est négatif dans 90 % des cas (spécificité).

On note I l'événement « la personne est infectée » et T l'événement « le test est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. D'après l'énoncé, donner la valeur de $\mathbb{P}_I(T)$:
3.
 - a. Calculer la probabilité qu'une personne soit infectée et ait un test positif.
 - b. Calculer la probabilité qu'une personne ne soit pas infectée mais ait tout de même un test positif (faux positif).
 - c. En déduire la probabilité que le test soit positif.
4.
 - a. Calculer $\mathbb{P}_T(I)$, la probabilité qu'une personne soit réellement infectée sachant que son test est positif.
 - b. Comparer cette valeur à celle de la question 2, et commenter : ces deux probabilités mesurent-elles la même chose ?