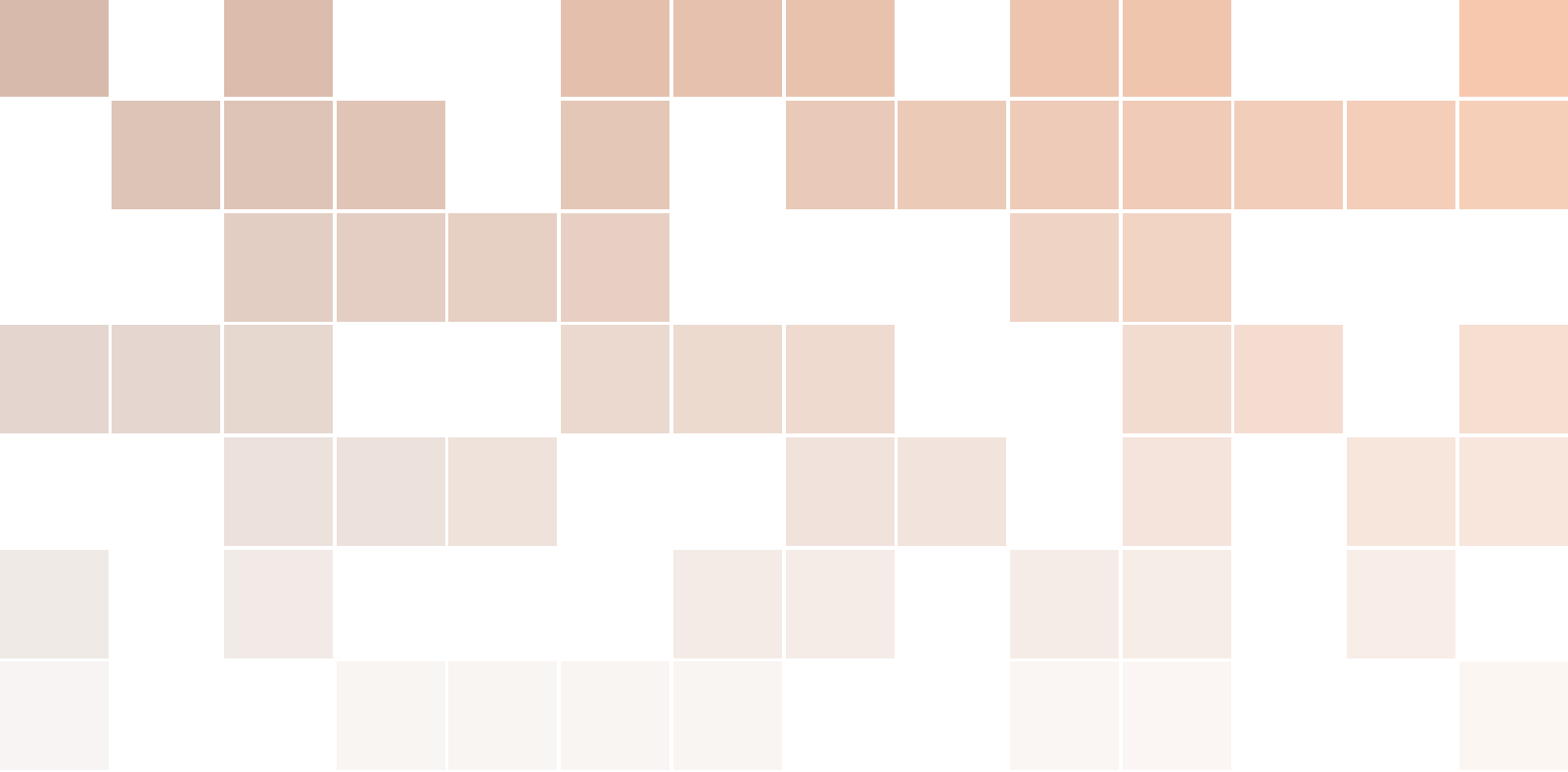
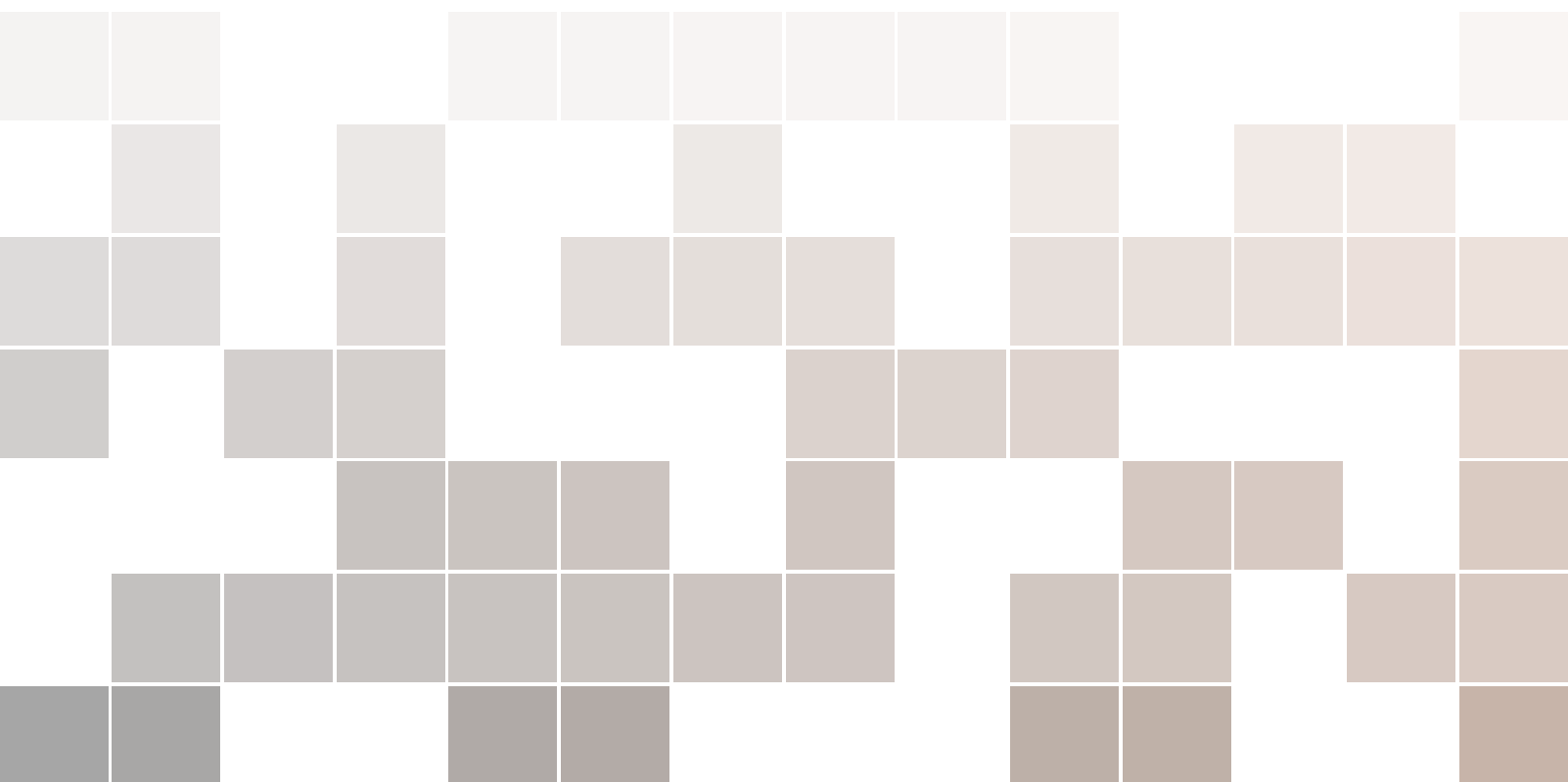




Mathématiques appliquées

BTS MS1

Kevin Cauvin



Copyright © 2026 Kevin Cauvin

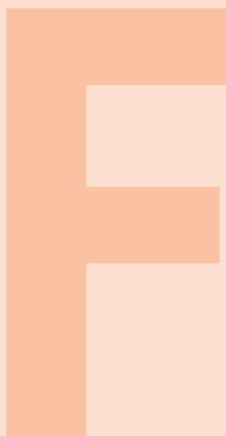
Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0> ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Première impression, Juillet 2026

Table des matières

F	Fonctions	
F1	Fonctions de référence	7
F1.1	Fonctions affines, ou polynômes de degré 1	7
F1.2	Fonctions du second degré, ou polynômes de degré 2	8
F1.2.1	Définition, forme développée	8
F1.2.2	Représentation graphique, sens de variation	8
F1.2.3	Discriminant d'une expression du second degré	9
F1.3	Fonction logarithme népérien	12
F1.3.1	Définition, propriétés algébriques	12
F1.3.2	Sens de variation, signe, représentation graphique	12
F1.3.3	Fonction logarithme décimal	12
F1.4	Fonction exponentielle	13
F1.4.1	Définition, propriétés algébriques	13
F1.4.2	Sens de variation, signe, représentation graphique	13
F1.5	Fonction racine carrée	13
F1.5.1	Définition, propriétés algébriques	13
F1.5.2	Sens de variation, signe, représentation graphique	14
F2	Dérivation de fonctions	15
F2.1	Dérivées des fonctions de référence	15
F2.2	Opérations usuelles sur les dérivées	16
F2.3	Étude des variations d'une fonction simple, applications	17
F3	Limites de fonctions	19
F3.1	Limites des fonctions de référence	19
F3.2	Opérations usuelles sur les limites	20
F3.3	Asymptotes à une courbe	21

I	Intégration	
I1	Primitives d'une fonction	25
I1.1	Primitives des fonctions de référence	25
I1.2	Opérations usuelles sur les primitives	26
I2	Calcul intégral	27
I2.1	Définition, premières propriétés	27
I2.2	Interprétation graphique : calcul d'aires	28
I2.3	Application : valeurs moyenne et efficace d'une fonction	29
S	Statistiques	
S	Statistiques descriptives	33
S.1	Série statistique à une variable	33
S.1.1	Généralités	33
S.1.2	Six indicateurs statistiques	34
S.1.3	Représentations graphiques	34
S.2	Série statistique à deux variables	35
S.2.1	Généralités	35
S.2.2	Représentation graphique, point moyen	36
S.2.3	Corrélation et ajustements	36
P	Probabilités	
P1	Probabilités conditionnelles, indépendance	41
P1.1	Calcul de probabilités élémentaires	41
P1.2	Probabilités conditionnelles, arbre pondéré	42
P1.3	Indépendance de deux événements	43
P2	Exemple d'une loi discrète	45
P2.1	De l'épreuve de Bernoulli au schéma de Bernoulli	45
P2.2	Lois binomiales	46
P3	Exemples de lois à densité	47
P3.1	Lois uniformes	47
P3.2	Lois normales	47
P3.3	Variables aléatoires indépendantes	48
P3.4	Théorème de la limite centrée	49
P4	Processus aléatoires à temps continu	51
P4.1	Loi exponentielle	51
P4.2	Loi de Poisson	52



Fonctions

F1	Fonctions de référence	7
F1.1	Fonctions affines, ou polynômes de degré 1 . . .	7
F1.2	Fonctions du second degré, ou polynômes de degré 2	8
F1.3	Fonction logarithme népérien	12
F1.4	Fonction exponentielle	13
F1.5	Fonction racine carrée	13
F2	Dérivation de fonctions	15
F2.1	Dérivées des fonctions de référence	15
F2.2	Opérations usuelles sur les dérivées	16
F2.3	Étude des variations d'une fonction simple, applications	17
F3	Limites de fonctions	19
F3.1	Limites des fonctions de référence	19
F3.2	Opérations usuelles sur les limites	20
F3.3	Asymptotes à une courbe	21

F1. Fonctions de référence

F1.1 Fonctions affines, ou polynômes de degré 1

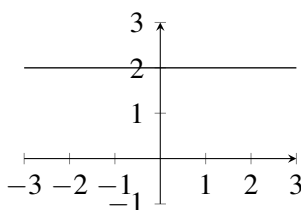
Définition F1.1 Une fonction est *affine* lorsqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = mx + p$, où m est le *coefficient directeur* et p est l'*ordonnée à l'origine*.

1. Si $m = 0$, alors $f(x) = p$ et on dira que f est *constante*.
2. Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$ et on dira que f est *linéaire*.

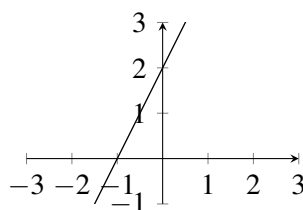
■ **Exemple F1.1** Parmi les expressions de fonctions suivantes, indiquer lesquelles pourraient être affines, linéaires, constantes. Préciser la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine lorsque cela est possible.

1. $f_1(x) = -5x$
2. $f_2(x) = -\frac{2}{3}$
3. $f_3(x) = x^2 + 3x - 4$
4. $f_4(x) = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x$

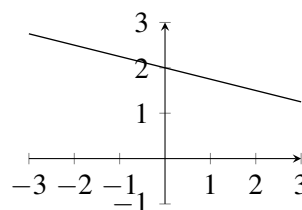
Proposition F1.1 Une fonction affine est représentée une droite coupant l'axe des ordonnées en p .



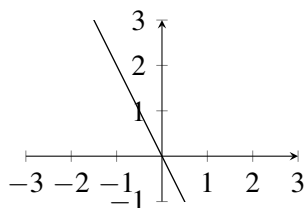
Si $m = 0$, la fonction est constante.



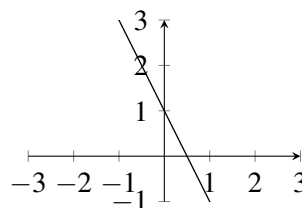
Si $m > 0$, la fonction est strictement croissante.



Si $m < 0$, la fonction est strictement décroissante.



Si $p = 0$, cette droite passe par l'origine.



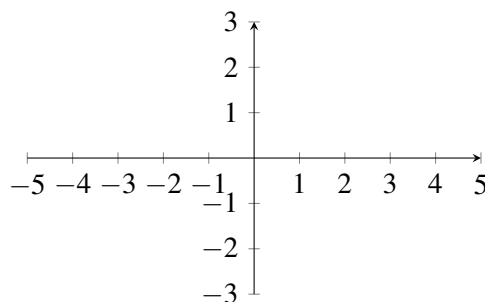
Si $p \neq 0$, cette droite ne passe pas par l'origine (ici, $p = 1$).

Proposition F1.2 On considère une fonction affine f dont le coefficient directeur est m . Pour n'importe quels points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartenant à la droite représentant f , on peut écrire que :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

■ **Exemple F1.2** On considère la fonction définie par $f(x) = 0,5x + 1$. Dresser son tableau de signes et de variations sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe ci-dessous.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		
Variations de f		



F1.2 Fonctions du second degré, ou polynômes de degré 2

F1.2.1 Définition, forme développée

Définition F1.2 Une fonction est *du second degré*, *polynomiale de degré 2*, ou encore *trinôme*, lorsqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ par une expression appelée *forme développée*, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

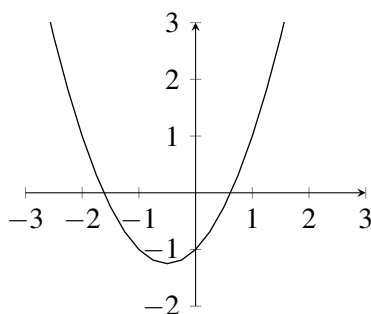
■ **Exemple F1.3** Parmi les expressions de fonctions suivantes, indiquer lesquelles pourraient être du second degré. Préciser les valeurs des coefficients a , b et c lorsque cela est possible.

1. $f_1(x) = -0,5x^2 + 3x - 1$
2. $f_2(x) = 3x - 3$
3. $f_3(x) = 1 + 2x - 3x^2$
4. $f_4(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{5}$
5. $f_5(x) = x^3 - 24x^2 + 17x - 1$
6. $f_6(x) = \frac{3x^2 - 5x + 7}{4}$
7. $f_7(x) = (x - 1)(x - 2)$
8. $f_8(x) = (x - 1)^2$

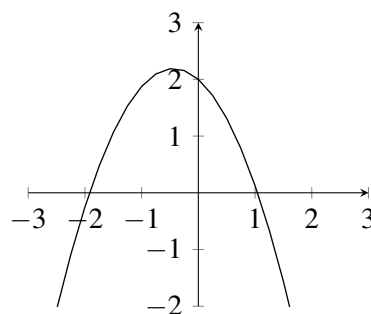
F1.2.2 Représentation graphique, sens de variation

Définition F1.3 La représentation graphique d'une fonction f du second degré est appelée *parabole*. Le *sommet de la parabole* est le point de cette parabole dont l'abscisse est $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et l'ordonnée est $\beta = f(\alpha)$.

Proposition F1.3 Le graphe d'une fonction du second degré dépend du signe de a .



Si $a > 0$, la parabole est *orientée vers le haut*.
La fonction est décroissante, puis croissante.
Le sommet est le minimum de la fonction.



Si $a < 0$, la parabole est *orientée vers le bas*.
La fonction est croissante, puis décroissante.
Le sommet est le maximum de la fonction.

■ **Exemple F1.4** On considère la fonction du second degré définie par $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en précisant les coordonnées de l'extremum (maximum ou minimum).

.....
.....
.....
.....
.....
.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

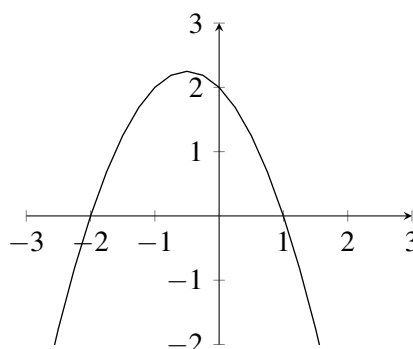
F1.2.3 Discriminant d'une expression du second degré

Définition F1.4 On considère une expression du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.

1. Une *racine* de cette expression est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Le *discriminant* de cette expression est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

■ **Exemple F1.5** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que 3 est racine de $x^2 - 5x + 6$.
.....
2. Trouver une racine de $x^2 - 4$.
.....
3. Lire la valeur des racines de la fonction du second degré représentée ci-contre.
.....
4. Calculer le discriminant de $x^2 - 4x + 3$.
.....



Théorème F1.1 On considère une expression du second degré $ax^2 + bx + c$ de discriminant Δ .

- Si $\Delta > 0$, alors l'expression a deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'expression a une seule racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'expression n'a aucune racine réelle.

■ **Exemple F1.6** Déterminer les racines des fonctions du second degré suivantes.

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$.

.....

2. f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$.

.....

3. f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = x^2 + 1$.

.....

Théorème F1.2 On considère une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Si $\Delta > 0$, la *forme factorisée* de f est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

2. Si $\Delta = 0$, la *forme factorisée* de f est $f(x) = a(x - x_0)^2$. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

3. Si $\Delta < 0$, l'expression de f ne peut pas se factoriser. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	



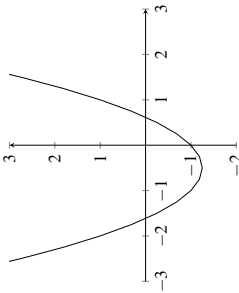
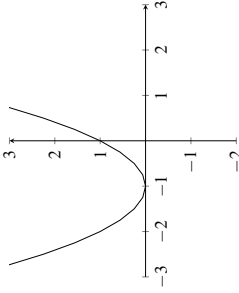
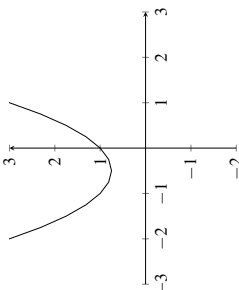
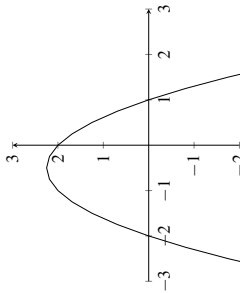
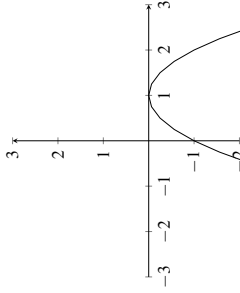
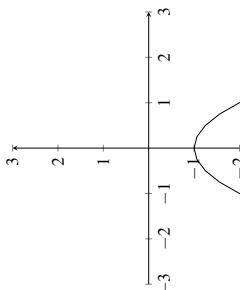
On retiendra la phrase suivante : « **Une expression du second degré est toujours du signe de a , sauf entre ses (éventuelles) racines.** »

■ **Exemple F1.7** On reprend les fonctions de l'exemple 2.6. Pour chacune d'entre elles, dresser leur tableau de signes.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_2(x)$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_3(x)$		

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
Racines	Deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une seule racine : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	Pas de racine réelle.																								
Factorisation	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation.																								
Allure de la parabole (si $a > 0$)																											
Allure de la parabole (si $a < 0$)																											
Tableau de signes	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td><td>0</td><td>$\text{sgn}(-a)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	$\text{sgn}(a)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td><td>0</td><td>$\text{sgn}(a)$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	$\text{sgn}(a)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																							
$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	$\text{sgn}(a)$																							
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																								
$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$																								
x	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	$\text{sgn}(a)$																									

F1.3 Fonction logarithme népérien

F1.3.1 Définition, propriétés algébriques

Définition F1.5 La fonction *logarithme népérien* est une fonction, notée $\ln$, qui à tout nombre réel x strictement positif, associe un nombre réel noté $\ln(x)$.

Proposition F1.4 On a $\ln(1) = 0$ et pour tous a et b strictement positifs, et n entier naturel :

- | | |
|--|--|
| 1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ | 3. $\ln(a^n) = n \ln(a)$ |
| 2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ | 4. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ |

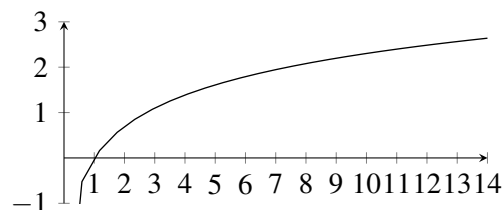
■ **Exemple F1.8** On considère le nombre $A = -\ln\left(\frac{1}{8}\right) + 2\ln(32^3)$.

- Écrire tous les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:
 - $\ln\left(\frac{1}{8}\right) = \dots\dots\dots$
 - $\ln(32^3) = \dots\dots\dots$
- En déduire l'écriture la plus simplifiée possible du nombre A .

F1.3.2 Sens de variation, signe, représentation graphique

Proposition F1.5 La courbe de la fonction logarithme népérien est donnée ci-contre. $\ln$ est :

- strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
- strictement négative sur $]0; 1[$,
- strictement positive sur $]1; +\infty[$.



F1.3.3 Fonction logarithme décimal

Définition F1.6 La fonction *logarithme décimal* est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

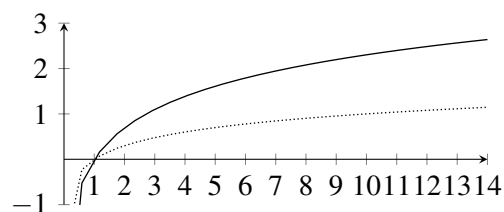
$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Proposition F1.6 On a $\log(1) = 0$ et pour tous a et b strictement positifs, et n entier naturel :

- | | |
|---|--|
| 1. $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$ | 3. $\log(a^n) = n \log(a)$ |
| 2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ | 4. $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$ |

Proposition F1.7 Les courbes des fonctions logarithme népérien (trait plein) et décimal (pointillés) sont données ci-contre. $\log$ est :

- strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
- strictement négative sur $]0; 1[$,
- strictement positive sur $]1; +\infty[$.



F1.4 Fonction exponentielle

F1.4.1 Définition, propriétés algébriques

Définition F1.7 Il existe un nombre $e \approx 2,72$ tel que $\ln(e) = 1$. La fonction *exponentielle* est une fonction qui à tout nombre réel x , associe un nombre strictement positif noté e^x .

Proposition F1.8 On a $e^0 = 1$ et pour tous a et b strictement positifs, et n entier naturel :

$$1. e^{a+b} = e^a e^b \quad 2. e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad 3. (e^a)^n = e^{na} \quad 4. e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

■ **Exemple F1.9** Déterminer l'écriture la plus simplifiée possible du nombre suivant :

$$A = \frac{1}{e^{50}} \times \frac{(e^7)^{11}}{e^8 \times e^2}$$

.....

F1.4.2 Sens de variation, signe, représentation graphique

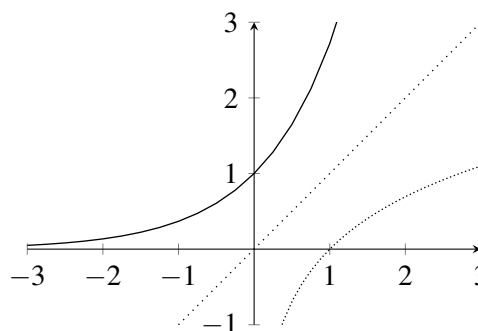
Proposition F1.9 Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.
2. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

R Une conséquence de la proposition précédente est la suivante : la courbe de la fonction exponentielle est la symétrique de la fonction logarithme népérien par rapport à la première bissectrice du repère.

Proposition F1.10 Les courbes de la fonction exponentielle (trait plein) et de la fonction logarithme népérien (pointillés) sont données ci-contre. On en déduit que la fonction exponentielle est :

1. strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
2. strictement positive sur $\mathbb{R}$.



F1.5 Fonction racine carrée

F1.5.1 Définition, propriétés algébriques

Définition F1.8 La fonction *racine carrée* est une fonction qui à tout nombre positif x , associe un nombre positif noté $\sqrt{x}$, tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

Proposition F1.11 Pour tous a et b positifs :

$$1. \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ si } b \neq 0$$

■ **Exemple F1.10** Déterminer les écritures les plus simplifiées possibles des nombres suivants :

$$1. \sqrt{16} : \dots\dots\dots$$

$$2. \sqrt{32} : \dots\dots\dots$$

$$3. \sqrt{50} : \dots\dots\dots$$

F1.5.2 Sens de variation, signe, représentation graphique

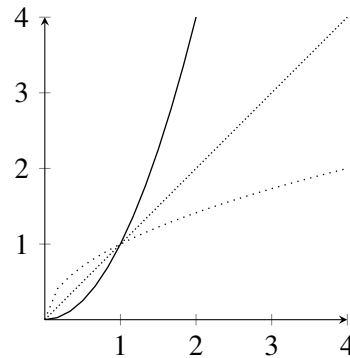
Proposition F1.12 Les fonctions carré et racine carrée sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $\sqrt{x^2} = x$.



Une conséquence de la proposition précédente est la suivante : la courbe de la fonction racine carrée est la symétrique de la fonction carré par rapport à la première bissectrice du repère.

Proposition F1.13 Les courbes de la fonction carré (trait plein) et de la fonction racine carrée (pointillés) sont données ci-contre. On en déduit que la fonction racine carrée est :

1. croissante sur $\mathbb{R}^+$,
2. positive sur $\mathbb{R}^+$.



F2. Dérivation de fonctions

F2.1 Dérivées des fonctions de référence

Proposition F2.1 Le tableau suivant donne les principales dérivées à connaître.

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = \text{Constante}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = -\omega \sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$

■ **Exemple F2.1** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$:
2. $f(x) = x$:
3. $f(x) = -3x$:
4. $f(x) = x^2$:
5. $f(x) = -3x^2$:
6. $f(x) = x^3$:
7. $f(x) = -4x^3$:
8. $f(x) = -3x^4$:

■ **Exemple F2.2** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = -1 + 4x^5 - 2x^7$:
2. $f(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^2 - 6x - 1$:
3. $f(x) = -x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1$:
4. $f(x) = e^x + x + 1$:
5. $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$:
6. $f(x) = 3\cos x - \sin x$:
7. $f(x) = -2\cos x + 3\sin x - x - 1$:

■ **Exemple F2.3** Proposer deux exemples de fonctions f_1 et f_2 qui ont la même dérivée f' .

- $f_1(x) = \dots$ et $f_2(x) = \dots$
- $f'(x) = \dots$

F2.2 Opérations usuelles sur les dérivées

Proposition F2.2 Lorsque l'on dérivera un produit, un quotient, une puissance, le logarithme ou l'exponentielle d'une fonction, on retiendra les formules suivantes.

Fonction	Appellation	Fonction dérivée	Commentaires
$u \times v$	Produit	$u'v + uv'$	—
$\frac{u}{v}$	Quotient	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$.
u^n	Puissance	$nu'u^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$.
$\ln u$	Logarithme d'une fonction	$\frac{u'}{u}$	$u > 0$.
e^u	Exponentielle d'une fonction	$u'e^u$	—

■ **Exemple F2.4** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = xe^x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple F2.5** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+1}{4x-2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple F2.6** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple F2.7** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x + x + 1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple F2.8** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2+3x-1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

F2.3 Étude des variations d'une fonction simple, applications

Proposition F2.3 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- 1. Si f' est négative sur I , alors f est décroissante sur I .
- 2. Si f' est positive sur I , alors f est croissante sur I .
- 3. Si f' change de signe sur I , alors f admettra un *extremum* (maximum ou minimum) sur I .

Exemple F2.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$.

- 1. Déterminer la fonction dérivée de f :
- 2. Étudier le signe de f' , puis en déduire les variations de f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

- 3. Quel est le signe de f ? Justifier.

Exemple F2.10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$.

- 1. Déterminer la fonction dérivée de f :
- 2. Étudier le signe de f' , puis en déduire les variations de f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

- 3. L'équation $f(x) = 28,5$ admet-elle une solution ? Justifier.

Exemple F2.11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. On rappelle que l'on a trouvé, dans l'exemple F2.4, que la dérivée de f est donnée par $f'(x) = e^x(x + 1)$. Étudier le signe de f' , puis en déduire les variations de f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

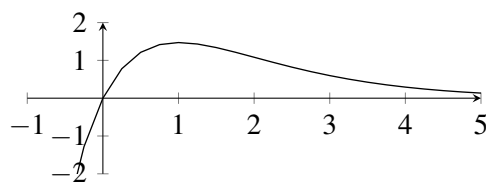
x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

F3. Limites de fonctions

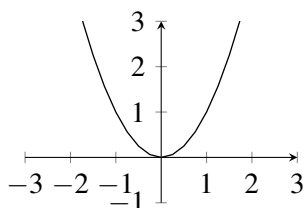
F3.1 Limites des fonctions de référence

■ **Exemple F3.1** On donne, ci-contre, le graphe d'une fonction f . Estimer, avec la précision permise par le graphique, les valeurs des limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots\dots\dots$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

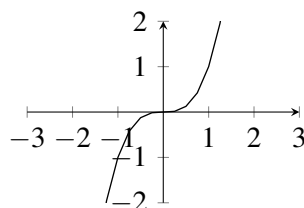


Proposition F3.1 Les graphiques suivants illustrent les limites des fonctions de référence.



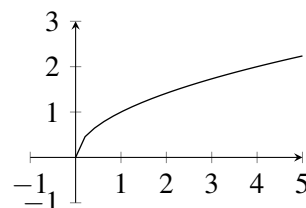
Si n est pair,

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

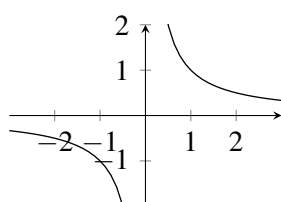


Si n est impair,

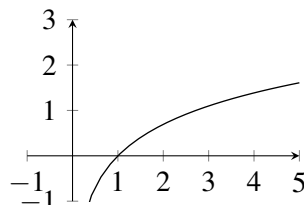
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.



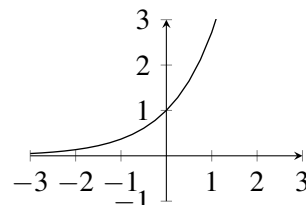
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.



- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$.



- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

F3.2 Opérations usuelles sur les limites

Proposition F3.2 Les tableaux suivants donnent les opérations usuelles sur les limites. La notation Ind. fera référence à une *forme indéterminée*, c'est-à-dire que la limite que l'on cherche à calculer ne pourra être déterminée qu'après avoir transformé l'écriture de la fonction.

1. Dans le cas d'une somme :

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f + g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Ind.

2. Dans le cas d'un produit :

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	Ind.

3. Dans le cas d'un quotient :

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\frac{f}{g} \right)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Ind.	Ind.

■ **Exemple F3.2** Déterminer, en le justifiant, les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x^2$.

.....

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln x$.

.....

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

.....

R Lorsqu'il y a une forme indéterminée, il faudra essayer de « lever l'indéterminée » à l'aide des astuces suivantes :

1. Lorsque l'on a un polynôme, sa limite en $\pm\infty$ est égale à sa limite en $\pm\infty$ de son terme de plus haut degré.
2. Lorsque l'on a un quotient de polynômes, sa limite en $\pm\infty$ est égale au quotient des limites en $\pm\infty$ de ses termes de plus haut degré.
3. Pour n'importe quel $\alpha > 0$, on a les « croissances comparées » suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

On retiendra ces quatre propriétés de la manière suivante : « L'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances, qui elles-mêmes l'emportent sur le logarithme népérien ».

■ **Exemple F3.3** Déterminer, en le justifiant, les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 + x - 1.$

.....

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{3x^2 - x - 1}.$

.....

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x + x + 1.$

.....



Lorsque l'on a une composée avec une fonction puissance, exponentielle ou logarithme népérien, il faut d'abord s'intéresser à la limite de ce qui est « dans » la composée.

■ **Exemple F3.4** Déterminer, en le justifiant, les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}.$

.....

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x}{x+3} \right)^3.$

.....

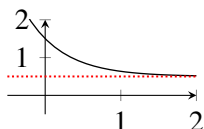
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}.$

.....

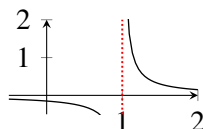
F3.3 Asymptotes à une courbe

Définition F3.1 On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentant une fonction f dans un repère orthogonal.

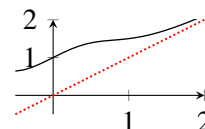
1. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$, la droite d'équation $y = a$ est une *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.



2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$.

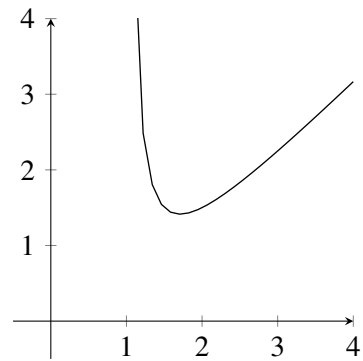


3. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.



■ **Exemple F3.5** On donne, ci-contre, le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{0,5}{x-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale, puis une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$. Tracer ces asymptotes en pointillés, dans le repère ci-contre.

.....





Intégration

I1	Primitives d'une fonction	25
I1.1	Primitives des fonctions de référence	25
I1.2	Opérations usuelles sur les primitives	26
I2	Calcul intégral	27
I2.1	Définition, premières propriétés	27
I2.2	Interprétation graphique : calcul d'aires	28
I2.3	Application : valeurs moyenne et efficace d'une fonction	29

11. Primitives d'une fonction

11.1 Primitives des fonctions de référence

Définition 11.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une *primitive de f sur I* est une fonction F définie et dérivable sur I , telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition 11.1 Si f admet des primitives sur I , elles sont toutes « définies à une constante près », c'est-à-dire qu'elles sont de la forme $F + \text{Constante}$. Si l'on impose en plus une condition du type $F(x_0) = y_0$, cette primitive devient unique.

Proposition 11.2 Le tableau suivant donne les principales primitives à connaître.

Fonction	Primitive
$f(x) = 0$	$F(x) = \text{Constante}$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + b$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$F(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$F(x) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi)$

■ **Exemple 11.1** Trouver **une** primitive F de la fonction f dans chacun des cas suivants.

- $f(x) = \frac{3}{x}$:
- $f(x) = 4x^2 + 3x - 5$:
- $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$:
- $f(x) = x - \sin(2x)$:

■ **Exemple 11.2** Trouver **la** primitive F de la fonction définie par $f(x) = e^x + 1$, telle que $F(0) = 0$.

.....

11.2 Opérations usuelles sur les primitives

Proposition 11.3 Lorsque l'on intégrera, on retiendra également les formules suivantes.

Fonction	Forme des primitives	Commentaires
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u \neq 0.$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u > 0.$
$u' e^u$	e^u	—

■ **Exemple 11.3** Trouver **une** primitive F de la fonction f dans chacun des cas suivants.

- $f(x) = 2x(x^2 + 1)^5 : \dots\dots\dots$
- $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x} : \dots\dots\dots$
- $f(x) = 2xe^{x^2} : \dots\dots\dots$
- $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} : \dots\dots\dots$

■ **Exemple 11.4** Trouver **la** primitive F de la fonction définie par $f(x) = 2xe^{x^2}$, telle que $F(0) = 0$.

.....

I2. Calcul intégral

I2.1 Définition, premières propriétés

Définition I2.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle *intégrale de f sur $[a; b]$* le nombre réel suivant, où F désigne une primitive quelconque de f :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

■ **Exemple I2.1** Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 (2x+1)dx.$

.....

2. $\int_0^1 e^x dx.$

.....

Proposition I2.1 Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

1. **Relation de Chasles.** Si $a \leq b \leq c$, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

2. **Linéarité.** $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$

3. **Positivité.** Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

■ **Exemple I2.2** On considère la fonction f définie « par morceaux » sur l'intervalle $[-1; 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\int_{-1}^1 f(x)dx.$

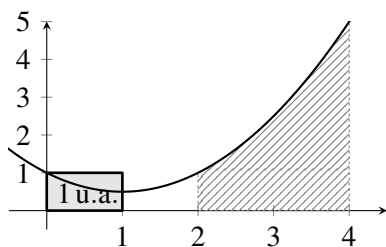
.....

I2.2 Interprétation graphique : calcul d'aires

Proposition I2.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

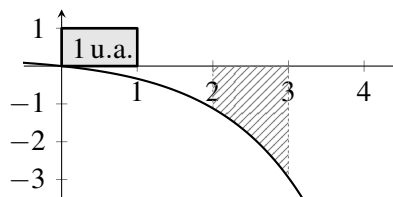
1. Si f est positive sur $[a; b]$, alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$



2. Si f est négative sur $[a; b]$, alors :

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$$



3. Si f change de signe sur $[a; b]$, alors $\mathcal{A}$ est la somme des aires sur chaque domaine où f est de signe constant.

■ **Exemple I2.3** On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-3}$.

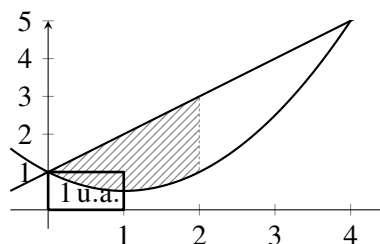
1. Sans justifier, donner le signe de f sur l'intervalle $[4; 6]$.
2. En déduire la valeur de l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 4$ et $x = 6$.

.....

Proposition I2.3 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$, telles que $f \leq g$.

L'aire du domaine, exprimé en unités d'aires, compris entre la courbe de f , la courbe de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



■ **Exemple I2.4** On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = e^x$. On admettra que, pour tout réel x , on a $e^x \geq x + 1$. Calculer l'aire, en unité d'aire, de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1 \leq y \leq e^x \end{cases}$$

.....

I2.3 Application : valeurs moyenne et efficace d'une fonction

Définition I2.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

1. On appelle *valeur moyenne de f sur $[a; b]$* le nombre réel suivant :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

2. On appelle *valeur efficace de f sur $[a; b]$* le nombre réel suivant :

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx}$$



Statistiques

S	Statistiques descriptives	33
S.1	Série statistique à une variable	33
S.2	Série statistique à deux variables	35

S. Statistiques descriptives

S.1 Série statistique à une variable

S.1.1 Généralités

Définition S.1 Une *série statistique* est un ensemble d'informations collectées sur une *population*. Pour simplifier l'étude, on pourra se limiter à une *sous-population*, également appelée *échantillon*. Pour chaque *individu* de la population, on s'intéresse à un *caractère* pouvant prendre plusieurs valeurs, que l'on appelle *modalités*.

- R** Il existe deux types de séries statistiques :
- Les séries *qualitatives*, lorsque les modalités ne sont pas des nombres.
 - Les séries *quantitatives*, lorsque les modalités sont des nombres. Elles peuvent être :
 - *continues* lorsque les modalités prennent n'importe quel nombre d'un intervalle.
 - *discrètes* lorsque les modalités prennent un nombre fini de valeurs.

On relèvera généralement les *effectifs* ou les *fréquences* de ces modalités, ou bien on les regroupera en *classes de valeurs*, c'est-à-dire en intervalles, dans le cas d'une série quantitative comportant trop de modalités différentes.

■ **Exemple S.1** Le texte suivant propose un exemple d'étude de série statistique. Donner la population étudiée, l'échantillon étudié, le caractère étudié. Donner ensuite les modalités possibles, puis le type de série statistique.

On a sélectionné 90 personnes au hasard parmi les 330 élèves d'un lycée passant le baccalauréat. À ces élèves, on leur a posé la question suivante :

« Quelle mention visez-vous pour le Baccalauréat ? »

.....

.....

.....

.....

- R** Il y a généralement trois manières de présenter une série statistique.
1. Par une **liste** de tous ses éléments, présentés sous forme d'un ensemble (sans ordre spécifique, et où un même élément peut apparaître plusieurs fois). Par exemple : $S = \{\text{Vert} ; \text{Bleu} ; \text{Vert} ; \text{Rose}\}$ ou $S = \{8 ; 9 ; -1 ; 3 ; 16 ; 4,45\}$.
 2. Par un **tableau** d'effectifs ou de fréquences de chaque modalité ou classe de modalités.

Valeur	x_1	...	x_p
Effectif	n_1	...	n_p
Fréquence	f_1	...	f_p

Classe	$[x_1 ; x_2[$	...	$[x_p ; x_{p+1}[$
Effectif	n_1	...	n_p
Fréquence	f_1	...	f_p

S.1.2 Six indicateurs statistiques

Définition S.2 Pour une série statistique quantitative, on pourra utiliser l'indicateur de tendance centrale *moyenne*, et les indicateurs de dispersion autour de cette valeur *variance* et *écart-type* :

1. La *moyenne arithmétique* (ou *moyenne*) est le nombre réel donné par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_px_p}{n_1 + \dots + n_p} = f_1x_1 + \dots + f_px_p$$

2. La *variance* est le nombre réel positif donné par :

$$V = \frac{n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2}{n_1 + \dots + n_p} - \bar{x}^2 = f_1x_1^2 + \dots + f_px_p^2 - \bar{x}^2$$

3. L'*écart-type* est le nombre réel positif donné par $\sigma = \sqrt{V}$.

R Ces indicateurs sont faciles à calculer, mais sensibles aux valeurs extrêmes. Les données sont d'autant plus condensées autour de la moyenne que la variance et l'écart-type sont proches de zéro. Le cas échéant, les données seront dispersées. Attention, si les modalités sont rangées par classes, on remplacera les valeurs x_i par les *centres* de chaque classe. Dans ce cas, les formules précédentes ne donneront qu'une estimation de la moyenne, de la variance et de l'écart-type.

Définition S.3 Pour une série statistique quantitative, on pourra utiliser l'indicateur de tendance centrale *médiane*, et les indicateurs de dispersion autour de cette valeur *quartiles* et *étendue* :

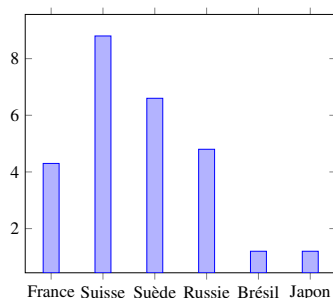
1. La *médiane*, notée **Med**, est la première valeur de la série ordonnée, telle qu'au moins 50% des valeurs de la série ordonnée ont une valeur inférieure ou égale à **Med**.
2. Le *premier quartile*, noté Q_1 , est la première valeur de la série ordonnée, telle qu'au moins 25% des valeurs de la série ordonnée ont une valeur inférieure ou égale à Q_1 .
3. Le *troisième quartile*, noté Q_3 , est la première valeur de la série ordonnée, telle qu'au moins 75% des valeurs de la série ordonnée ont une valeur inférieure ou égale à Q_3 .
4. L'*écart interquartile* est la différence entre le troisième et le premier quartile.
5. L'*étendue* est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

R Ces indicateurs sont plus difficiles à calculer, mais ne sont pas sensibles aux valeurs extrêmes. Les données sont d'autant plus condensées autour de la médiane que l'étendue et l'écart interquartile (pour les petites séries) est faible. Le cas échéant, les données seront dispersées.

S.1.3 Représentations graphiques

Définition S.4 Un *diagramme en barres*, ou *en bâtons*, est un graphique constitué de barres verticales, dont la hauteur indique la valeur associée au critère indiqué sur les abscisses.

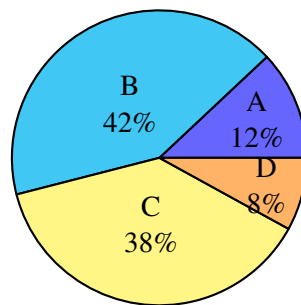
■ **Exemple S.2** On a relevé la consommation annuelle de chocolats, par habitant, exprimée en kilogrammes, en 2017, pour les pays mentionnés ci-dessous.



1. Estimer la consommation française de chocolat, en 2017 :
2. Compléter la phrase suivante avec deux pays qui conviennent : « Les habitants de consomment environ deux fois plus de chocolat que les habitants de ».

Définition S.5 Un *diagramme circulaire* est un graphique constitué d'un cercle, divisé en *secteurs angulaires* d'angles proportionnels à l'effectif ou à la fréquence de la valeur considérée.

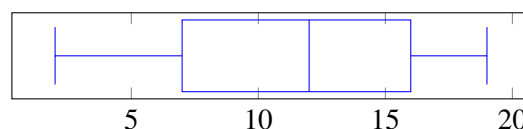
■ **Exemple S.3** Après un sondage effectué dans un lycée, les étudiants possédant un téléphone portable devaient se ranger en 4 catégories. La catégorie *A* correspond aux étudiants qui ont eu leur premier téléphone portable en classe de 6ème ou avant, la catégorie *B* en 5ème ou en 4ème, la catégorie *C* en 3ème, tandis que la catégorie *D* recense ceux qui ont dû attendre le lycée pour avoir leur premier téléphone.



1. Majoritairement, en quelle classe ces élèves ont eu leur premier téléphone ?
2. Quel est le pourcentage d'élèves qui ont eu leur premier téléphone après la 6ème ?

Définition S.6 Un *diagramme en boîte* permet de lire la valeur minimale, le premier quartile Q_1 , la médiane **Med**, le troisième quartile Q_3 et la valeur maximale de la série.

■ **Exemple S.4** La distribution des notes des élèves à une interrogation en classe est résumée sur le diagramme ci-dessous.



Donner, avec la précision permise par le graphique, la valeur des indicateurs suivants : minimum, premier quartile, médiane, troisième quartile et maximum.

.....

S.2 Série statistique à deux variables

S.2.1 Généralités

Définition S.7 On relève simultanément, sur une même population, les valeurs de deux modalités quantitatives notées $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Une *série statistique à deux variables* est la liste de ces couples d'observations :

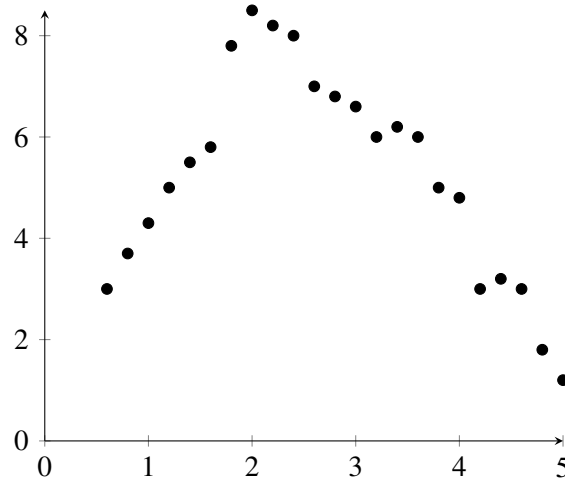
$$\{(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)\}$$

R Une série statistique à deux variables peut être représentée sous la forme d'un tableau, comme ci-dessous.

Valeurs de la variable X	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs de la variable Y	y_1	y_2	...	y_n

S.2.2 Représentation graphique, point moyen

Définition S.8 On considère une série statistique à deux variables. À chaque observation $(x_i; y_i)$, on lui associe un point du plan, de coordonnées $(x_i; y_i)$.

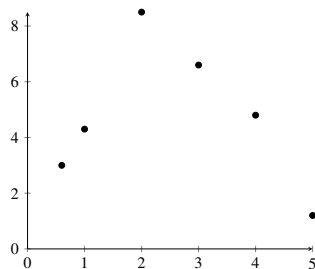


1. L'ensemble de ces points constitue un *nuage de points* associé à cette série statistique.
2. Le *point moyen* de cette série, noté G , est le point dont les coordonnées sont les moyennes des séries $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Autrement dit :

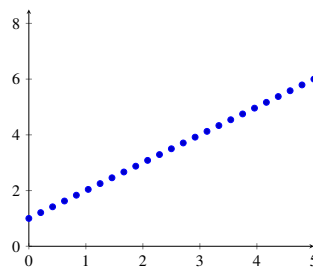
$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}\right)$$

S.2.3 Corrélation et ajustements

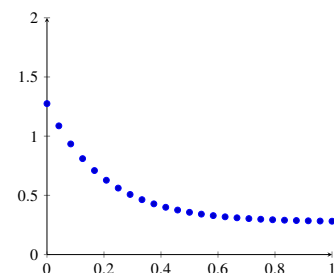
Lorsque l'on trace le nuage de points associé à une série statistique à deux variables, on peut obtenir des informations qualitatives ; notamment le fait de reconnaître s'il existe un « lien » entre les deux variables étudiées. C'est ce que l'on appellera la *corrélation* entre les deux variables.



Absence de corrélation
entre les variables.



Possibilité de corrélation
entre les variables. On
effectuera un *ajustement*
affine.

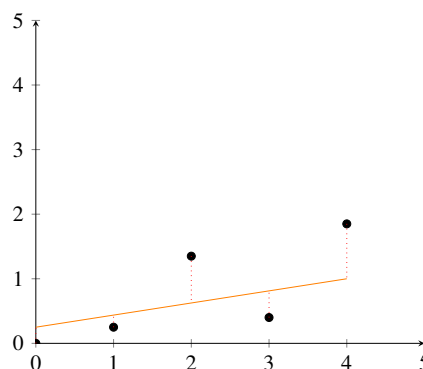
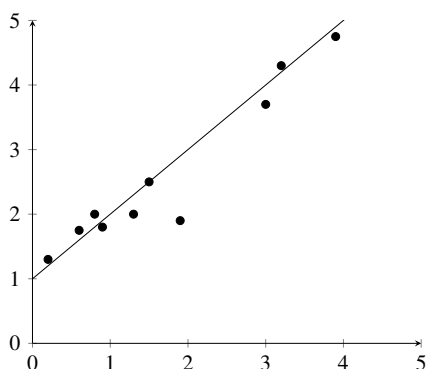


Possibilité de corrélation
entre les variables. On
effectuera un *ajustement*
(non affine).

De manière plus quantitative, on appellera *ajustement* entre les deux variables, le fait de trouver l'expression d'une fonction mathématique qui lie ces deux variables.

Définition S.9 On considère une série statistique à deux variables.

1. Une droite d'ajustement affine tracée *au jugé* est une droite qui passe le plus près possible d'un maximum de points du nuage de points.
2. Une droite *de régression de y en x* , obtenue avec la *méthode des moindres carrés*, est une droite située à égale distance des points situés de part et d'autre de celle-ci. Elle passe par le point moyen du graphe.



Proposition S.1 À tout ajustement affine, on associe un *coefficient de corrélation*, noté r , tel que :

1. r est compris entre -1 et 1 .
2. La droite d'ajustement est croissante si, et seulement si, r est positif.
3. L'ajustement affine est de bonne qualité si, et seulement si, r est proche de ± 1 .

■ **Exemple S.5** Ce tableau donne la part des salariés handicapés dans le public de 2010 à 2015.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5
Part des salariés handicapés (y_i) (en %)	3,98	4,22	4,39	4,64	4,9	5,17

Source : INSEE

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G .
2. À l'aide de la calculatrice, justifier que l'on peut envisager un ajustement affine, et donner l'équation de la droite d'ajustement.
3. On choisit comme droite d'ajustement la droite (D) d'équation : $y = 0,24x + 3,95$.
 - a. Justifier que le point G appartient à cette droite.
 - b. On utilise cet ajustement pour effectuer des prévisions au-delà de l'année 2015. Quelle serait la part des salariés handicapés dans le public en 2020 ?

P

Probabilités

P1	Probabilités conditionnelles, indépendance	41
P1.1	Calcul de probabilités élémentaires	41
P1.2	Probabilités conditionnelles, arbre pondéré	42
P1.3	Indépendance de deux événements	43
P2	Exemple d'une loi discrète	45
P2.1	De l'épreuve de Bernoulli au schéma de Bernoulli	45
P2.2	Lois binomiales	46
P3	Exemples de lois à densité	47
P3.1	Lois uniformes	47
P3.2	Lois normales	47
P3.3	Variables aléatoires indépendantes	48
P3.4	Théorème de la limite centrée	49
P4	Processus aléatoires à temps continu	51
P4.1	Loi exponentielle	51
P4.2	Loi de Poisson	52

P1. Probabilités conditionnelles, indépendance

P1.1 Calcul de probabilités élémentaires

Définition P1.1 Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne connaît les *issues*, c'est-à-dire les résultats possibles, qu'une fois l'expérience réalisée. L'*univers* de cette expérience est l'ensemble des issues possibles. Un *évènement* A est un sous-ensemble de Ω , c'est-à-dire un ensemble d'issues. En particulier :

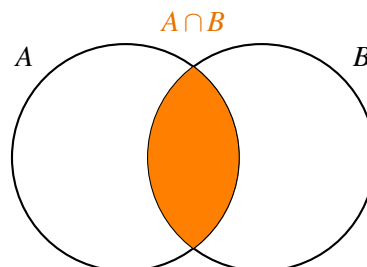
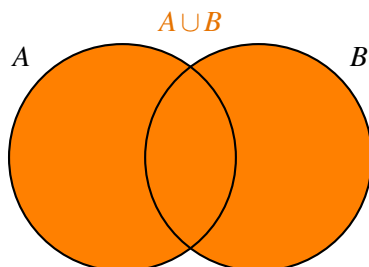
1. L'*évènement contraire* de A , noté $\bar{A}$, est composé des issues qui ne réalisent pas A .
2. Un *évènement impossible* (noté $\emptyset$) est un évènement réalisé par aucune issue.
3. Un *évènement certain* (noté Ω) est un évènement réalisé par toutes les issues.

■ **Exemple P1.1** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu.

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience :
2. Donner un exemple d'évènement impossible :
3. Donner l'évènement contraire de « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » :

Définition P1.2 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω .

1. L'*intersection* de A et B , noté $A \cap B$, est l'évènement réalisé lorsque A et B sont réalisés **en même temps**. Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits *incompatibles*.
2. L'*union* de A et B , noté $A \cup B$, est l'évènement réalisé lorsqu'**au moins un** des évènements A et B est réalisé.



■ **Exemple P1.2** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu. On note A et B les évènements « Tomber sur un nombre inférieur ou égal à 2 » et « Tomber sur un nombre impair ».

1. Décrire $A \cap B$:
2. Décrire $A \cup B$:
3. Donner deux exemples d'évènements incompatibles :

Proposition P1.1 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω .

1. La probabilité d'un évènement est un nombre toujours compris entre 0 et 1.
2. Dans une situation d'*équiprobabilité*, c'est-à-dire lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'être réalisées, la probabilité d'un évènement A est :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre total d'issues}}$$

3. La probabilité de l'évènement contraire de A est $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
4. La probabilité de l'union des évènements A et B est $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

■ **Exemple P1.3** Dans un atelier, une machine produit des pièces dont certaines sont défectueuses. On étudie celles-ci, et on les comptabilise selon qu'elles aient un défaut esthétique (A) ou un défaut mécanique (B). Le résultat est consigné dans le tableau ci-dessous.

	B	$\bar{B}$	Total
A	12	45	
$\bar{A}$	8		63
Total		100	120

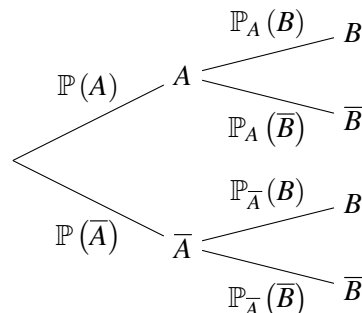
1. Compléter le tableau ci-dessus avec les données manquantes.
2. Indiquer ce que signifie la donnée 45 dans le tableau, et l'écrire en fonction de A et B .
.....
3. Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard ait au moins un des deux défauts.
.....
.....

P1.2 Probabilités conditionnelles, arbre pondéré

Définition P1.3 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω , tel que A ne soit pas un évènement impossible. On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* , que l'on note $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition P1.2 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω . On peut schématiser la situation par un arbre pondéré, comme ci-dessous.

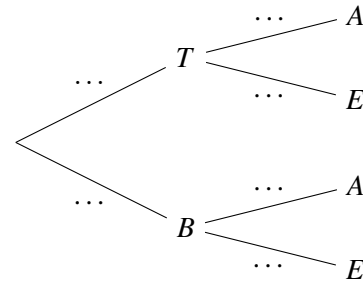


1. Sur les *branches* issues d'un même *noeud*, la somme des probabilités est égale à 1.
2. On peut calculer la probabilité d'un évènement B apparaissant sur la seconde profondeur de l'arbre grâce à la *formule des probabilités totales* :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

■ **Exemple P1.4** Dans un club multisport d'une entreprise, on compte 400 salariés et leurs familles, qui peuvent pratiquer le tennis (T) et le badminton (B), selon qu'ils soient enfants (E) ou adultes (A). On sait que 20 % pratiquent le badminton et parmi ceux-là, le tiers sont des enfants. Le reste pratique le tennis et parmi eux, 30 % sont des adultes.

1. Déterminer la probabilité qu'un licencié du club soit un enfant.
2. Un licencié choisi au hasard est un enfant. Quelle est la probabilité qu'il joue au tennis ?



P1.3 Indépendance de deux évènements

Définition P1.4 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω , tels que A et B ne soient pas des évènements impossibles. On dira que A et B sont *indépendants* si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre. En d'autres termes, si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

■ **Exemple P1.5** On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes, et on considère les évènements A : « Tirer un as », B : « Tirer un cœur » et C : « Tirer un as rouge ».

1. Donner les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(A) = \dots$, $\mathbb{P}(B) = \dots$, $\mathbb{P}(C) = \dots$.
2. Dans cette question, on souhaite étudier si A et B sont indépendants.
 - a. Décrire l'évènement $A \cap B$
 - b. Déterminer la probabilité de $A \cap B$
 - c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier brièvement votre réponse.
3. Dans cette question, on souhaite étudier si B et C sont indépendants.
 - a. Décrire l'évènement $B \cap C$
 - b. Déterminer la probabilité de $B \cap C$
 - c. Les évènements B et C sont-ils indépendants ? Justifier brièvement votre réponse.

P2. Exemple d'une loi discrète

P2.1 De l'épreuve de Bernoulli au schéma de Bernoulli

Définition P2.1 Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire à deux issues contraires :

- Une de ces issues S est appelée *succès*, sa probabilité est notée p .
- L'autre de ces issues $\bar{S}$ est appelée *échec*, sa probabilité est $1 - p$.

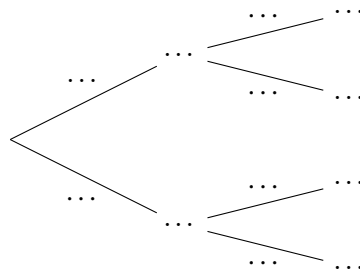
■ **Exemple P2.1** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu. On s'intéresse au fait de tomber sur le nombre 5. Montrer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

■ **Exemple P2.2** Proposer un autre exemple simple d'épreuve de Bernoulli (c'est-à-dire une situation, une issue assimilée à un succès, et sa probabilité).

Définition P2.2 Une répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, est appelée *schéma de Bernoulli*. On la représente avec un arbre pondéré avec n degrés de profondeur.

■ **Exemple P2.3** Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges, indiscernables au toucher. On décide de tirer au hasard une boule, puis la remettre dans l'urne, et ce à deux reprises. On admettra qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli, dont le succès consiste à tirer une boule blanche.

1. Compléter l'arbre pondéré de probabilités schématisant la situation :



2. Déterminer la probabilité de tirer deux boules blanches.
3. Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule rouge.

P2.2 Lois binomiales

Définition P2.3 La loi binomiale de paramètres n et p est une loi de probabilité correspondant au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli, où l'on répète n fois une expérience dont le succès est p . On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

■ **Exemple P2.4** Un élève répond au hasard à un QCM comportant 20 questions. Chaque question comporte 4 réponses, mais une seule d'entre elles est correcte. On suppose que les réponses sont indépendantes les unes des autres, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses proposées par l'élève.

1. Expliquer pourquoi la situation relève d'une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.
.....
.....
.....
2. Calculer ensuite une valeur arrondie au millièème de $\mathbb{P}(X < 1)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
.....
.....

Proposition P2.1 Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors :

1. L'espérance est $\mathbb{E}(X) = np$. Elle correspond au nombre moyen de succès.
2. La variance est $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ et l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
3. Les calculs de probabilités s'obtiennent directement grâce à la calculatrice.

	Avoir k succès $\mathbb{P}(X = k)$	Avoir k succès, ou moins $\mathbb{P}(X \leq k)$
Casio	Menu - Stat - Dist - Binm - Bpd	Menu - Stat - Dist - Binm - Bcd
TI	2de - var - binomFdp	2de - var - binomFRép
Numworks	Probabilités - Binomiale	Probabilités - Binomiale

■ **Exemple P2.5** Une machine produit en moyenne 2% de pièces défectueuses. On prélève 50 pièces au hasard. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses.

1. Expliquer pourquoi la situation relève d'une loi binomiale. Donner ses paramètres.
.....
.....
.....
2. Calculer la probabilité d'avoir 1, 2, 3 puis 4 pièces défectueuses.
.....
.....
3. Déterminer le nombre moyen de pièces défectueuses.
.....

■ **Exemple P2.6** Statistiquement, on observe que 2% des personnes sont gauchères. Calculer la probabilité que, sur 35 personnes, il y ait plus de trois personnes gauchères.

.....
.....
.....
.....

P3. Exemples de lois à densité

P3.1 Lois uniformes

Définition P3.1 La loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est une loi de probabilité modélisant un tirage au hasard d'un nombre sur un intervalle $[a; b]$. On la note $\mathcal{U}([a; b])$.

Proposition P3.1 Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$, alors :

1. L'espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, la variance est $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ et l'écart-type est $\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$.
2. La probabilité que X prenne des valeurs comprises entre α et β est :

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

■ **Exemple P3.1** Il existe une commande sur la calculatrice qui génère un nombre compris entre 0 et 1. Quelle est la probabilité que le nombre généré soit compris entre 0,123 et 0,234 ?

■ **Exemple P3.2** Le temps d'attente T , en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$.

1. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?

P3.2 Lois normales

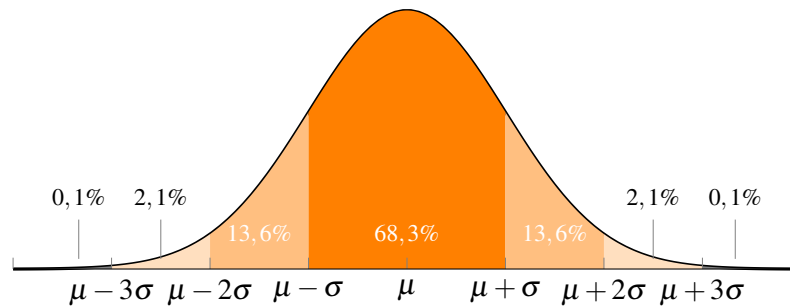
Proposition P3.2 Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , où n est grand et p n'est pas trop extrême (pas trop proche de 0 ou de 1), alors on peut affirmer qu'une approximation de X est une loi normale de paramètres μ et σ , avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. On la note $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$.

Proposition P3.3 Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ , alors :

1. L'espérance est $\mathbb{E}(X) = \mu$, la variance est $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ et l'écart-type est $\sigma(X) = \sigma$.
2. Les calculs de probabilités s'obtiennent directement grâce à la calculatrice.

	Calcul de $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$
Casio	Menu - Stat - Dist - Norm - Ncd
TI	2de - var - normalFRép
Numworks	Probabilités - Normale

Proposition P3.4 Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ , alors la fonction de répartition, dont l'aire sous la courbe sert de support aux calculs de probabilités, est la suivante :



Plus l'écart-type σ est faible, plus la largeur de la courbe autour de μ est resserrée. Enfin, on peut écrire la « règle 68 – 95 – 99 », encore appelée « règle des intervalles centrés en μ » :

1. $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$.
2. $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.
3. $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

■ **Exemple P3.3** La variable aléatoire X , égale au diamètre du tronc d'une variété de pin, suit une loi normale de paramètre $\mu = 150$ cm. Estimer σ , en sachant que $\mathbb{P}(120 \leq X \leq 180) \approx 0,68$.

Proposition P3.5 Lorsque n est suffisamment grand, et p n'est pas trop proche de 0 ou de 1, on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$. Dans la pratique, on choisira cette approximation lorsque $n \geq 50$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

■ **Exemple P3.4** On étudie un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans. On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. On note X la variable aléatoire égale au nombre de graines qui germent, dans cet échantillon.

1. On admettra que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Vérifier que les trois conditions d'approximation ci-dessus sont réunies :
 - $n \geq 50$:
 - $np \geq 5$:
 - $n(1-p) \geq 5$:
3. En déduire que l'on peut considérer que X suit une loi normale. Donner ses paramètres. ...
4. Estimer la probabilité $\mathbb{P}(X \leq 24)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

P3.3 Variables aléatoires indépendantes

Proposition P3.6 Soient X et Y deux variables aléatoires, α et β deux nombres. On a :

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta ; \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) ; \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$$

Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* lorsque, pour tous réels x et y , on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq y)$$

Dans ce cas, si l'on note $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ les écarts-types de X et Y , on a :

$$\sigma(\alpha X + \beta) = |\alpha| \times \sigma(X) ; \sigma(X + Y) = \sigma(X - Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$$

■ **Exemple P3.5** Une entreprise conditionne du lait dans des briques dont le poids est supposé être de 900 grammes. On suppose que la variable aléatoire X égale au poids d’une brique de lait suit une loi normale $\mathcal{N}(900; 10)$. On s’intéresse à l’écart de poids entre deux boîtes de lait, grâce à l’étude de la variable aléatoire $\Delta X = X_1 - X_2$, où X_1 et X_2 suivent la même loi normale que X .

- 1. Donner l’espérance et l’écart-type de ΔX .
.....
- 2. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq 15)$, et interpréter le résultat dans le contexte de l’énoncé.
.....
.....

P3.4 Théorème de la limite centrée

Théorème P3.1 On considère n variables aléatoires indépendantes X_i , suivant toutes la même loi d’espérance μ et d’écart-type σ . Pour n assez grand, la variable aléatoire $\bar{X}$ égale à la moyenne des X_i suit approximativement une loi normale d’espérance μ et d’écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

P4. Processus aléatoires à temps continu

P4.1 Loi exponentielle

Définition P4.1 La loi exponentielle de paramètre λ est une loi de probabilité modélisant des phénomènes d'attente, ou encore la durée de vie d'un phénomène ou d'un composant électronique. On la note $\mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition P4.1 Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors :

1. L'espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, la variance est $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, et l'écart-type est égal à $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.
2. Pour α et β positifs, la probabilité que X prenne des valeurs comprises entre α et β est :

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-t} dt = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

■ **Exemple P4.1** La durée de vie, en années, d'un processeur peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Déterminer la durée de vie moyenne d'un processeur.
2. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un processeur soit inférieure à 7 années.

■ **Exemple P4.2** La durée de vie, en mois, d'un composant, peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On admettra que $\mathbb{P}(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.
Sachant que $\mathbb{P}(T \geq 24) = 0,698$, calculer λ et arrondir sa valeur au millièmes.
2. Dans cette question on prendra $\lambda = 0,015$.
 - a. Déterminer l'espérance mathématique de la variable T , arrondie à l'unité. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
 - b. Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 3 ans.

P4.2 Loi de Poisson

Définition P4.2 La loi de Poisson de paramètre λ , avec $\lambda > 0$, est une loi de probabilité modélisant le nombre de fois qu'un événement rare se produise dans un intervalle donné, quand on connaît son rythme moyen d'apparition (nombre de clients entrant dans un magasin en 10 minutes, nombre d'accidents sur une portion de route pendant un mois, etc). On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition P4.2 Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ , alors :

1. L'espérance est $\mathbb{E}(X) = \lambda$, la variance est $\mathbb{V}(X) = \lambda$, et l'écart-type est égal à $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.
2. Les calculs de probabilités s'obtiennent directement grâce à la calculatrice.

	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{P}(X \leq k)$
Casio	Menu - Stat - Dist - Poissn - Ppd	Menu - Stat - Dist - Poissn - Pcd
TI	2de - var - poissonFdp	2de - var - poissonFRép
Numworks	Probabilités - Poisson	Probabilités - Poisson

■ **Exemple P4.3** Une centrale téléphonique reçoit des appels, à raison de 10 appels par heure en moyenne. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par cette centrale, sur un intervalle de temps de deux minutes.

1. On admettra que X suit une loi de Poisson. Justifier que son paramètre est $\lambda = \frac{1}{3}$
2. Calculer la probabilité pour qu'en deux minutes, la centrale ne reçoive aucun appel.
3. Calculer la probabilité pour qu'en deux minutes, la centrale reçoive au moins un appel.
4. Calculer la probabilité pour qu'en deux minutes, la centrale reçoive au moins trois appels.

Proposition P4.3 Lorsque n est suffisamment grand, et que p et np soient suffisamment petits, on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

Dans la pratique, on choisira cette approximation lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$.

■ **Exemple P4.4** Une machine produit, en moyenne, 2% de pièces défectueuses. On prélève 50 pièces au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses, dans cet échantillon.

1. On admettra que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Vérifier que les trois conditions d'approximation ci-dessus sont réunies :
 - $n \geq 30$:
 - $p \leq 0,1$:
 - $np \leq 10$:
3. En déduire que l'on peut considérer que X suit une loi de Poisson. Donner son paramètre.
4. Estimer la probabilité $\mathbb{P}(X = 4)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.