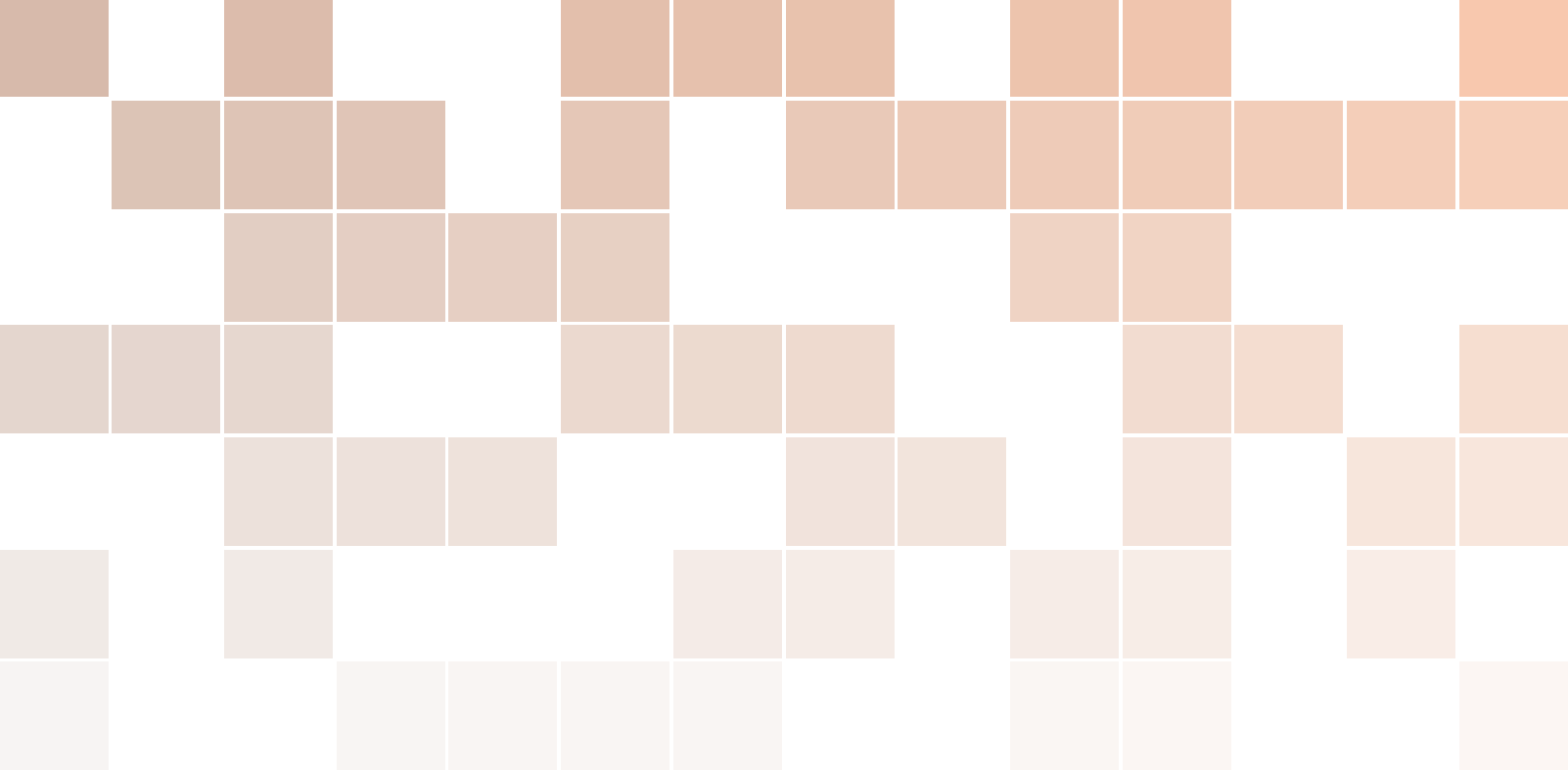
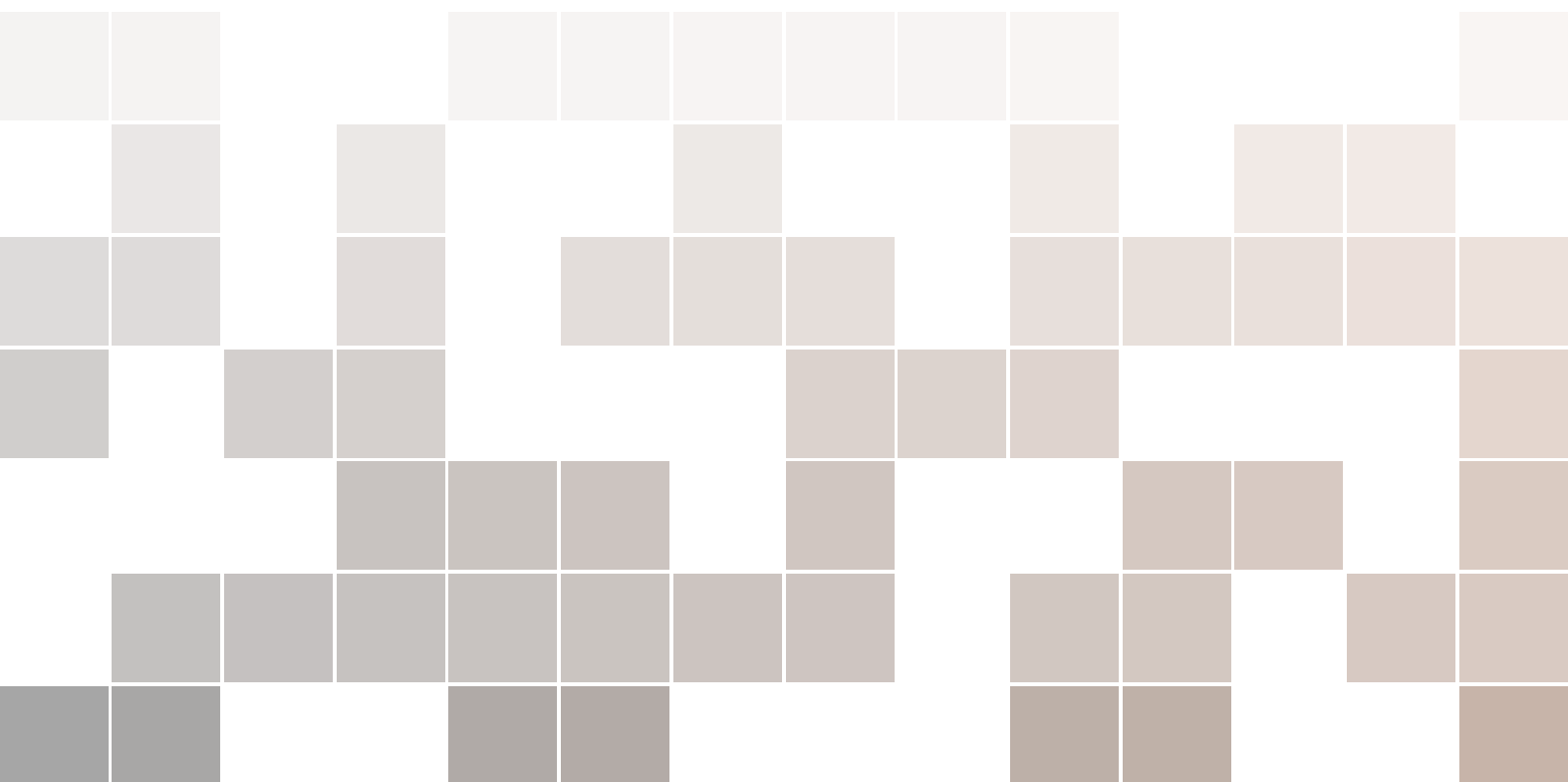




Mathématiques appliquées

BTS C1

Kevin Cauvin



Copyright © 2026 Kevin Cauvin

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0> ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Troisième impression, Juillet 2026

Table des matières

1	Information chiffrée	5
1.1	Proportions	5
1.1.1	Proportion d'une sous-population dans une population	5
1.1.2	Union, intersection et inclusion de sous-populations	6
1.2	Taux d'évolution	7
1.2.1	Taux d'évolution global, taux d'évolution réciproque	7
1.2.2	Taux d'évolution moyen	8
1.3	Indice en base 100	8
2	Fonctions polynomiales	9
2.1	Fonctions affines, ou polynômes de degré 1	9
2.2	Fonctions du second degré, ou polynômes de degré 2	10
2.2.1	Définition, forme développée	10
2.2.2	Représentation graphique, sens de variation	10
2.2.3	Équations du second degré, discriminant	11
2.2.4	Signe, forme factorisée	12
3	Statistiques descriptives	15
3.1	Série statistique à une variable	15
3.1.1	Généralités	15
3.1.2	Moyenne, variance et écart-type	16
3.1.3	Médiane, quartiles et étendue	16
3.1.4	Représentations graphiques	16
3.2	Série statistique à deux variables	17
3.2.1	Généralités	17
3.2.2	Représentation graphique, point moyen	18
3.2.3	Corrélation et ajustements	18
4	Suites arithmétiques et géométriques	21
4.1	Généralités sur les suites	21
4.1.1	Définition, modes de génération d'une suite	21

4.1.2	Représentation graphique d'une suite	21
4.1.3	Monotonie, sens de variation d'une suite	22
4.2	Suites arithmétiques	22
4.2.1	Définition, expression du terme général	22
4.2.2	Sens de variation, représentation graphique	22
4.2.3	Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique	23
4.3	Suites géométriques	23
4.3.1	Définition, expression du terme général	23
4.3.2	Sens de variation, représentation graphique	24
4.3.3	Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique	24
5	Fonctions logarithme et exponentielle	25
5.1	Fonction logarithme népérien	25
5.1.1	Définition, propriétés algébriques	25
5.1.2	Sens de variation, signe, représentation graphique	25
5.1.3	Fonction logarithme décimal	26
5.2	Fonction exponentielle	26
5.2.1	Définition, propriétés algébriques	26
5.2.2	Sens de variation, signe, représentation graphique	26
5.3	Résolution d'(in)équations	27
5.3.1	Résolution d'(in)équations avec une puissance inconnue	27
5.3.2	Résolution d'(in)équations avec $\ln$ ou $\exp$ dans au moins un membre	27
6	Mathématiques financières	29
6.1	Placements à intérêts simples	29
6.1.1	Motivations, définition	29
6.1.2	Valeur acquise par un capital placé	29
6.1.3	Valeur actuelle d'un capital placé	29
6.1.4	Équivalence entre taux annuel et taux mensuel	30
6.2	Placements à intérêts composés	30
6.2.1	Motivations, définition	30
6.2.2	Valeur acquise par un capital placé	30
6.2.3	Valeur actuelle d'un capital placé	30
6.2.4	Équivalence entre taux annuel et taux mensuel	31
6.3	Calculs d'annuités, tableaux d'amortissements	31
6.3.1	Placement à annuités constantes	31
6.3.2	Emprunt à annuités constantes	32
6.3.3	Tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes	32

1. Information chiffrée

1.1 Proportions

1.1.1 Proportion d'une sous-population dans une population

Définition 1.1 Lorsque l'on fait une étude statistique, la *population* E est l'ensemble des *individus* sur lesquels porte cette étude. Dans cette population, on peut être amené à ne considérer qu'un petit groupe de cette population : dans ce cas, on dira que l'on s'intéresse à une *sous-population* de E . L'*effectif* d'une population ou d'une sous-population est le nombre d'individus de celle-ci.

Définition 1.2 On considère une population E , et A une sous-population de E . La *proportion* (ou *fréquence*) de A dans E est le nombre défini par :

$$p_A = \frac{\text{Effectif de la sous-population } A}{\text{Effectif de la population } E}$$

- R** Une proportion est un nombre sans unité, compris entre 0 et 1. Elle peut s'écrire sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou de pourcentage.
- R** Si on connaît deux des trois nombres précédents (proportion de A dans E , effectif de A , effectif de E), on peut toujours trouver le troisième nombre, éventuellement en faisant un produit en croix.

■ **Exemple 1.1** Les questions suivantes sont indépendantes.

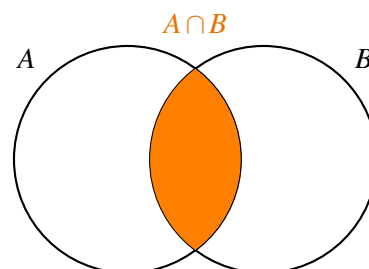
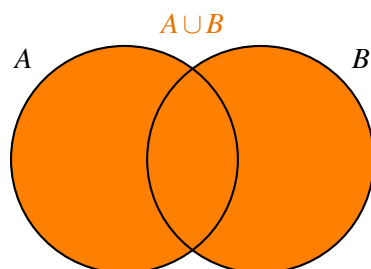
1. Une conserve de sauce tomate de 500 grammes est constituée à 492,5 grammes de tomate. Quelle est la proportion de tomate dans cette conserve ?
.....
.....
2. Dans une classe de 30 étudiants, 40% viennent au lycée à pieds. Combien d'étudiants de cette classe se déplacent à pieds pour aller au lycée ?
.....
.....
3. En 2018, on dénombrait 631 337 femmes enseignantes, ce qui représente 70% des enseignants en France. Combien pouvait-on dénombrier d'enseignants en 2018 ?
.....
.....

1.1.2 Union, intersection et inclusion de sous-populations

Définition 1.3 On considère deux sous-populations A et B d'une population E .

1. L'union de A et B , notée $A \cup B$ (A union B), est la sous-population constituée des individus qui appartiennent à A **ou** à B , c'est-à-dire à au moins une des deux sous-populations.
2. L'intersection de A et B , notée $A \cap B$ (A inter B), est la sous-population constituée des individus qui appartiennent à A **et** à B , c'est-à-dire aux deux sous-populations.

R Si A et B n'ont rien en commun, on dira que A et B sont *disjoints*, et on notera $A \cap B = \emptyset$.



Proposition 1.1 On considère deux sous-populations A et B d'une population E .

$$\begin{aligned} p_{A \cup B} &= p_A + p_B - p_{A \cap B} \\ &= p_A + p_B \end{aligned}$$

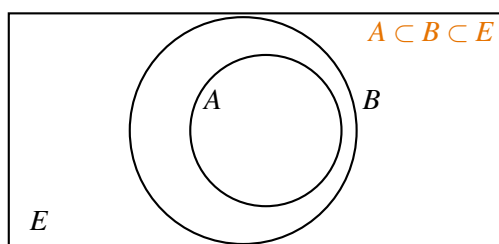
(si A et B ne sont pas disjoints)

(si A et B sont disjoints)

■ **Exemple 1.2** Dans un club multi-sports, 38% de ses adhérents pratiquent la voile, 12% pratiquent l'escalade en bloc, et 9% pratiquent ces deux sports. Déterminer la proportion des adhérents qui pratiquent au moins un de ces deux sports.

.....

Définition 1.4 On considère deux sous-populations A et B d'une population E . Dire que A est *inclus dans* B , ce que l'on note $A \subset B$, signifie que A est une sous-population de B .



Proposition 1.2 Soient A et B deux sous-populations d'une population E , telles que $A \subset B \subset E$. On note $p_{A,B}$ la proportion d'éléments de A dans B , $p_{B,E}$ la proportion d'éléments de B dans E et $p_{A,E}$ la proportion d'éléments de A dans E . Alors $p_{A,E} = p_{A,B} \times p_{B,E}$.

■ **Exemple 1.3** 55% des batteries sont fabriquées dans un atelier A , parmi lesquelles 94% n'ont aucun défaut. Déterminer la proportion de batteries fabriquées dans A et défectueuses, parmi toute la production.

.....

1.2 Taux d'évolution

1.2.1 Taux d'évolution global, taux d'évolution réciproque

Définition 1.5 On considère une grandeur qui évolue d'une valeur $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.



1. Le *taux d'évolution*, ou la *variation relative*, de cette grandeur est $T = \frac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}}$.
2. Le *coefficient multiplicateur* de cette grandeur est $C = \frac{V_{\text{arrivée}}}{V_{\text{départ}}}$, ou encore $C = 1 + T$.

R Une grandeur qui augmente (resp. qui diminue) correspond à un taux d'évolution positif (resp. négatif) et un coefficient multiplicateur supérieur (resp. inférieur) à 1.

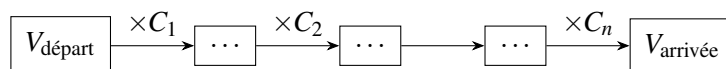
■ **Exemple 1.4** Le prix d'un vélo tout-terrain (VTT) passe de 500 € à 410 €. Calculer le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution du prix du VTT.

.....

.....

.....

Proposition 1.3 On considère une grandeur, qui subit plusieurs évolutions.



Le coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution. Autrement dit, $C_{\text{global}} = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$.

■ **Exemple 1.5** Le volume d'un petit lac diminue de 10% chaque semaine. Déterminer le taux d'évolution du volume de ce petit lac sur 1 mois, c'est-à-dire sur 4 semaines.

.....

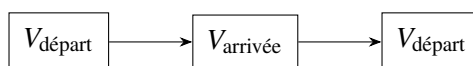
.....

■ **Exemple 1.6** Déterminer le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution du prix d'un article qui a été augmenté de 10%, puis de 20%.

.....

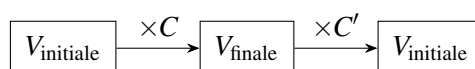
.....

Définition 1.6 On considère une grandeur, qui subit deux évolutions, comme celles-ci :



Deux évolutions qui, appliquées à une grandeur, lui permettent de retrouver sa valeur initiale, sont appelées *évolutions réciproques*.

Proposition 1.4 On considère une grandeur, qui subit deux évolutions réciproques :



Le coefficient multiplicateur permettant à une grandeur de retrouver sa valeur de départ est égal à l'inverse de son coefficient multiplicateur. Autrement dit, on a $C' = \frac{1}{C}$.

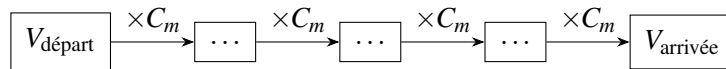
■ **Exemple 1.7** Dans chaque cas, déterminer le taux d'évolution réciproque.

1. Une action boursière a baissé de 20%. Pour revenir à sa valeur avant la baisse, quel doit être le pourcentage d'augmentation de cette action ?
.....
.....

2. Quel taux faut-il appliquer pour compenser une hausse des prix de 10% ?
.....
.....

1.2.2 Taux d'évolution moyen

Proposition 1.5 On considère une grandeur, qui subit n évolutions successives identiques de coefficient multiplicateur C_m . On note C le coefficient multiplicateur global, permettant à cette grandeur d'évoluer de $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.



Alors le coefficient multiplicateur moyen est $C_m = \sqrt[n]{C} = C^{\frac{1}{n}}$.

■ **Exemple 1.8** Dans chaque cas, déterminer le taux moyen équivalent.

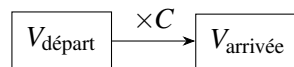
1. Montrer que le taux mensuel équivalent au taux annuel de 5% est d'environ 0,407%.
.....
.....

2. Déterminer le taux semestriel équivalent au taux annuel de 3%.
.....
.....

3. Déterminer le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 6%.
.....
.....

1.3 Indice en base 100

Définition 1.7 On considère une grandeur, qui évolue d'une valeur $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$. On note C le coefficient multiplicateur et T le taux d'évolution de cette évolution.



L'indice de $V_{\text{arrivée}}$ par rapport à $V_{\text{départ}}$ est le nombre I tel que :

$$I = 100 \times \frac{V_{\text{finale}}}{V_{\text{initiale}}} = 100 \times C = 100 \times (1 + T)$$

■ **Exemple 1.9** On considère l'évolution du nombre d'adhérents d'un club sportif, entre 2018 et 2022, consignée dans le tableau ci-dessous.

Année	2018	2019	2020	2021	2022
Nombre d'adhérents	163	136	158	178	226

Déterminer l'indice du nombre d'adhérents en 2022, en prenant 2018 pour année de référence. En déduire le taux d'évolution du nombre d'adhérents sur cette période.
.....
.....

2. Fonctions polynomiales

2.1 Fonctions affines, ou polynômes de degré 1

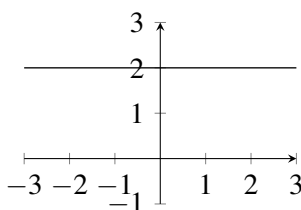
Définition 2.1 Une fonction est *affine* lorsqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = mx + p$, où m est le *coefficient directeur* et p est l'*ordonnée à l'origine*.

1. Si $m = 0$, alors $f(x) = p$ et on dira que f est *constante*.
2. Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$ et on dira que f est *linéaire*.

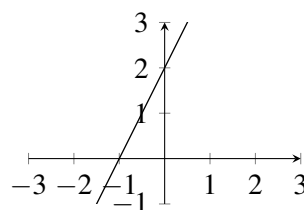
■ **Exemple 2.1** Parmi les expressions de fonctions suivantes, indiquer lesquelles pourraient être affines, linéaires, constantes. Préciser la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine lorsque cela est possible.

1. $f_1(x) = -5x$
2. $f_2(x) = -\frac{2}{3}$
3. $f_3(x) = x^2 + 3x - 4$
4. $f_4(x) = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x$

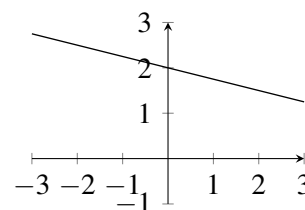
Proposition 2.1 Une fonction affine est représentée une droite coupant l'axe des ordonnées en p .



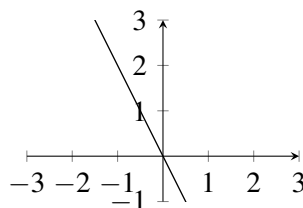
Si $m = 0$, la fonction est constante.



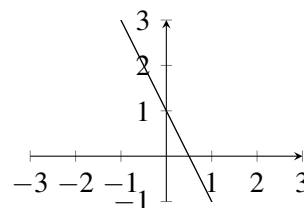
Si $m > 0$, la fonction est strictement croissante.



Si $m < 0$, la fonction est strictement décroissante.



Si $p = 0$, cette droite passe par l'origine.



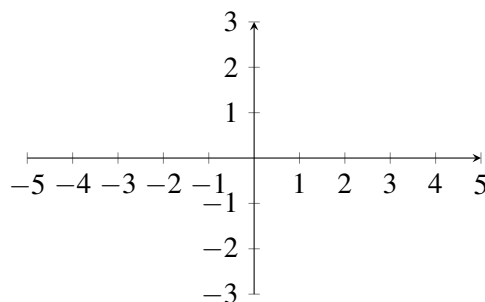
Si $p \neq 0$, cette droite ne passe pas par l'origine (ici, $p = 1$).

Proposition 2.2 On considère une fonction affine f dont le coefficient directeur est m . Pour n'importe quels points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartenant à la droite représentant f , on peut écrire que :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

■ **Exemple 2.2** On considère la fonction définie par $f(x) = 0,5x + 1$. Dresser son tableau de signes et de variations sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe ci-dessous.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		
Variations de f		



2.2 Fonctions du second degré, ou polynômes de degré 2

2.2.1 Définition, forme développée

Définition 2.2 Une fonction est *du second degré*, *polynomiale de degré 2*, ou encore *trinôme*, lorsqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ par une expression appelée *forme développée*, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

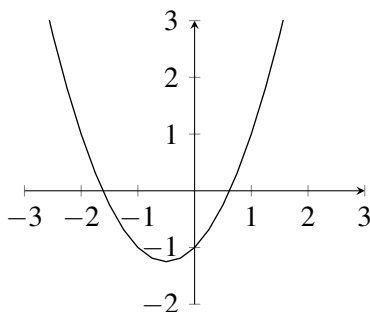
■ **Exemple 2.3** Parmi les expressions de fonctions suivantes, indiquer lesquelles pourraient être du second degré. Préciser les valeurs des coefficients a , b et c lorsque cela est possible.

1. $f_1(x) = -0,5x^2 + 3x - 1$
2. $f_2(x) = 3x - 3$
3. $f_3(x) = 1 + 2x - 3x^2$
4. $f_4(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{5}$
5. $f_5(x) = x^3 - 24x^2 + 17x - 1$
6. $f_6(x) = \frac{3x^2 - 5x + 7}{4}$
7. $f_7(x) = (x - 1)(x - 2)$
8. $f_8(x) = (x - 1)^2$

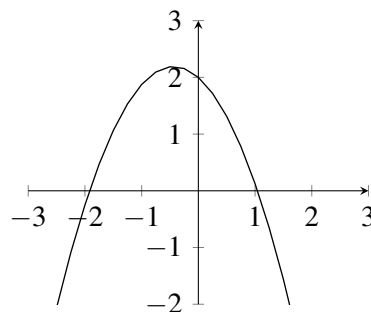
2.2.2 Représentation graphique, sens de variation

Définition 2.3 La représentation graphique d'une fonction f du second degré est appelée *parabole*. Le *sommet de la parabole* est le point de cette parabole dont l'abscisse est $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et l'ordonnée est $\beta = f(\alpha)$.

Proposition 2.3 Le graphe d'une fonction du second degré dépend du signe de a .



Si $a > 0$, la parabole est *orientée vers le haut*.
La fonction est décroissante, puis croissante.
Le sommet est le minimum de la fonction.



Si $a < 0$, la parabole est *orientée vers le bas*.
La fonction est croissante, puis décroissante.
Le sommet est le maximum de la fonction.

■ **Exemple 2.4** On considère la fonction du second degré définie par $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en précisant les coordonnées de l'extremum (maximum ou minimum).

.....
.....
.....
.....
.....
.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

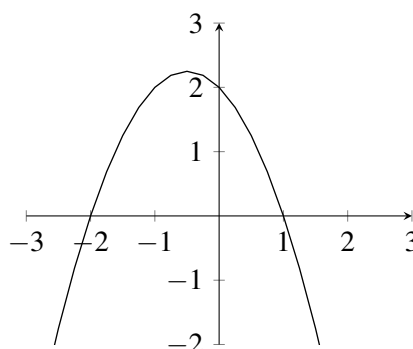
2.2.3 Équations du second degré, discriminant

Définition 2.4 On considère une expression du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.

1. Une *racine* de cette expression est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Le *discriminant* de cette expression est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

■ **Exemple 2.5** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que 3 est racine de $x^2 - 5x + 6$.
.....
2. Trouver une racine de $x^2 - 4$.
.....
3. Lire la valeur des racines de la fonction du second degré représentée ci-contre.
.....
4. Calculer le discriminant de $x^2 - 4x + 3$.
.....



Théorème 2.1 On considère une expression du second degré $ax^2 + bx + c$ de discriminant Δ .

- Si $\Delta > 0$, alors l'expression a deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'expression a une seule racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'expression n'a aucune racine réelle.

■ **Exemple 2.6** Déterminer les racines des fonctions du second degré suivantes.

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$.

.....

2. f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$.

.....

3. f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = x^2 + 1$.

.....

2.2.4 Signe, forme factorisée

Théorème 2.2 On considère une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Si $\Delta > 0$, la *forme factorisée* de f est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

2. Si $\Delta = 0$, la *forme factorisée* de f est $f(x) = a(x - x_0)^2$. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

3. Si $\Delta < 0$, l'expression de f ne peut pas se factoriser. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	



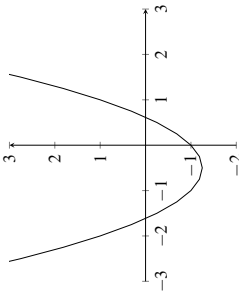
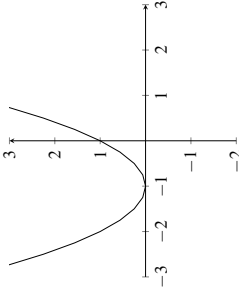
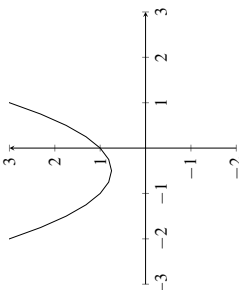
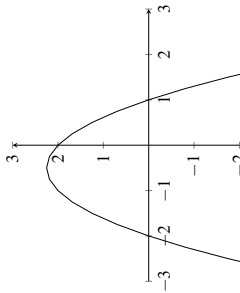
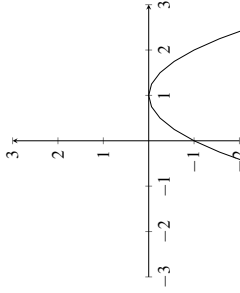
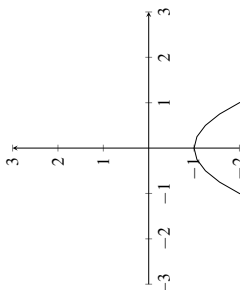
On retiendra la phrase suivante : « Une expression du second degré est toujours du signe de a , sauf entre ses (éventuelles) racines. »

■ **Exemple 2.7** On reprend les fonctions de l'exemple 2.6. Pour chacune d'entre elles, dresser leur tableau de signes.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_2(x)$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_3(x)$		

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
Racines	Deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une seule racine : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	Pas de racine réelle.																								
Factorisation	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation.																								
Allure de la parabole (si $a > 0$)																											
Allure de la parabole (si $a < 0$)																											
Tableau de signes	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td><td>0</td><td>$\text{sgn}(-a)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	$\text{sgn}(a)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td><td>0</td><td>$\text{sgn}(a)$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td><td>$\text{sgn}(a)$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	$\text{sgn}(a)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																							
$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	$\text{sgn}(a)$																							
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																								
$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$																								
x	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	$\text{sgn}(a)$	$\text{sgn}(a)$																									

3. Statistiques descriptives

3.1 Série statistique à une variable

3.1.1 Généralités

Définition 3.1 Une *série statistique* est un ensemble d'informations collectées sur une *population*. Pour simplifier l'étude, on pourra se limiter à une *sous-population*, également appelée *échantillon*. Pour chaque *individu* de la population, on s'intéresse à un *caractère* pouvant prendre plusieurs valeurs, que l'on appelle *modalités*.

- R** Il existe deux types de séries statistiques :
- Les séries *qualitatives*, lorsque les modalités ne sont pas des nombres.
 - Les séries *quantitatives*, lorsque les modalités sont des nombres. Elles peuvent être :
 - *continues* lorsque les modalités prennent n'importe quel nombre d'un intervalle.
 - *discrètes* lorsque les modalités prennent un nombre fini de valeurs.

On relèvera généralement les *effectifs* ou les *fréquences* de ces modalités, ou bien on les regroupera en *classes de valeurs*, c'est-à-dire en intervalles, dans le cas d'une série quantitative comportant trop de modalités différentes.

■ **Exemple 3.1** Le texte suivant propose un exemple d'étude de série statistique. Donner la population étudiée, l'échantillon étudié, le caractère étudié. Donner ensuite les modalités possibles, puis le type de série statistique.

On a sélectionné 90 personnes au hasard parmi les 330 élèves d'un lycée passant le baccalauréat. À ces élèves, on leur a posé la question suivante :

« Quelle mention visez-vous pour le Baccalauréat ? »

.....

.....

.....

.....

- R** Il y a généralement trois manières de présenter une série statistique.
1. Par une **liste** de tous ses éléments, présentés sous forme d'un ensemble (sans ordre spécifique, et où un même élément peut apparaître plusieurs fois). Par exemple : $S = \{\text{Vert} ; \text{Bleu} ; \text{Vert} ; \text{Rose}\}$ ou $S = \{8 ; 9 ; -1 ; 3 ; 16 ; 4,45\}$.
 2. Par un **tableau** d'effectifs ou de fréquences de chaque modalité ou classe de modalités.

Valeur	x_1	...	x_p
Effectif	n_1	...	n_p
Fréquence	f_1	...	f_p

Classe	$[x_1 ; x_2[$	...	$[x_p ; x_{p+1}[$
Effectif	n_1	...	n_p
Fréquence	f_1	...	f_p

3.1.2 Moyenne, variance et écart-type

Définition 3.2 Pour une série statistique quantitative, on pourra utiliser l'indicateur de tendance centrale *moyenne*, et les indicateurs de dispersion autour de cette valeur *variance* et *écart-type* :

1. La *moyenne arithmétique* (ou *moyenne*) est le nombre réel donné par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_px_p}{n_1 + \dots + n_p} = f_1x_1 + \dots + f_px_p$$

2. La *variance* est le nombre réel positif donné par :

$$V = \frac{n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2}{n_1 + \dots + n_p} - \bar{x}^2 = f_1x_1^2 + \dots + f_px_p^2 - \bar{x}^2$$

3. L'*écart-type* est le nombre réel positif donné par $\sigma = \sqrt{V}$.

R Ces indicateurs sont faciles à calculer, mais sensibles aux valeurs extrêmes. Les données sont d'autant plus condensées autour de la moyenne que la variance et l'écart-type sont proches de zéro. Le cas échéant, les données seront dispersées. Attention, si les modalités sont rangées par classes, on remplacera les valeurs x_i par les *centres* de chaque classe. Dans ce cas, les formules précédentes ne donneront qu'une estimation de la moyenne, de la variance et de l'écart-type.

3.1.3 Médiane, quartiles et étendue

Définition 3.3 Pour une série statistique quantitative, on pourra utiliser l'indicateur de tendance centrale *médiane*, et les indicateurs de dispersion autour de cette valeur *quartiles* et *étendue* :

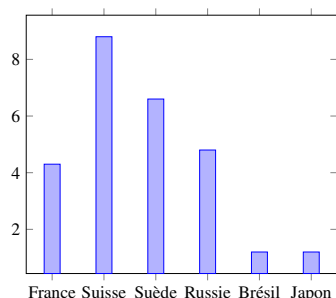
1. La *médiane*, notée **Med**, est la première valeur de la série ordonnée, telle qu'au moins 50% des valeurs de la série ordonnée ont une valeur inférieure ou égale à **Med**.
2. Le *premier quartile*, noté Q_1 , est la première valeur de la série ordonnée, telle qu'au moins 25% des valeurs de la série ordonnée ont une valeur inférieure ou égale à Q_1 .
3. Le *troisième quartile*, noté Q_3 , est la première valeur de la série ordonnée, telle qu'au moins 75% des valeurs de la série ordonnée ont une valeur inférieure ou égale à Q_3 .
4. L'*écart interquartile* est la différence entre le troisième et le premier quartile.
5. L'*étendue* est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

R Ces indicateurs sont plus difficiles à calculer, mais ne sont pas sensibles aux valeurs extrêmes. Les données sont d'autant plus condensées autour de la médiane que l'étendue et l'écart interquartile (pour les petites séries) est faible. Le cas échéant, les données seront dispersées.

3.1.4 Représentations graphiques

Définition 3.4 Un *diagramme en barres*, ou *en bâtons*, est un graphique constitué de barres verticales, dont la hauteur indique la valeur associée au critère indiqué sur les abscisses.

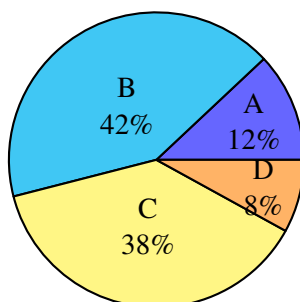
■ **Exemple 3.2** On a relevé la consommation annuelle de chocolats, par habitant, exprimée en kilogrammes, en 2017, pour les pays mentionnés ci-dessous.



1. Estimer la consommation française de chocolat, en 2017 :
2. Compléter la phrase suivante avec deux pays qui conviennent : « Les habitants de consomment environ deux fois plus de chocolat que les habitants de ».

Définition 3.5 Un *diagramme circulaire* est un graphique constitué d'un cercle, divisé en *secteurs angulaires* d'angles proportionnels à l'effectif ou à la fréquence de la valeur considérée.

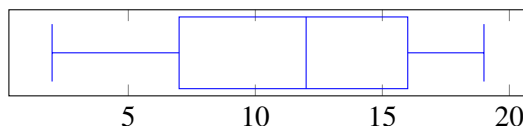
■ **Exemple 3.3** Après un sondage effectué dans un lycée, les étudiants possédant un téléphone portable devaient se ranger en 4 catégories. La catégorie *A* correspond aux étudiants qui ont eu leur premier téléphone portable en classe de 6ème ou avant, la catégorie *B* en 5ème ou en 4ème, la catégorie *C* en 3ème, tandis que la catégorie *D* recense ceux qui ont dû attendre le lycée pour avoir leur premier téléphone.



1. Majoritairement, en quelle classe ces élèves ont eu leur premier téléphone ?
2. Quel est le pourcentage d'élèves qui ont eu leur premier téléphone après la 6ème ?

Définition 3.6 Un *diagramme en boîte* permet de lire la valeur minimale, le premier quartile Q_1 , la médiane **Med**, le troisième quartile Q_3 et la valeur maximale de la série.

■ **Exemple 3.4** La distribution des notes des élèves à une interrogation en classe est résumée sur le diagramme ci-dessous.



Donner, avec la précision permise par le graphique, la valeur des indicateurs suivants : minimum, premier quartile, médiane, troisième quartile et maximum.

.....

3.2 Série statistique à deux variables

3.2.1 Généralités

Définition 3.7 On relève simultanément, sur une même population, les valeurs de deux modalités quantitatives notées $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Une *série statistique à deux variables* est la liste de ces couples d'observations :

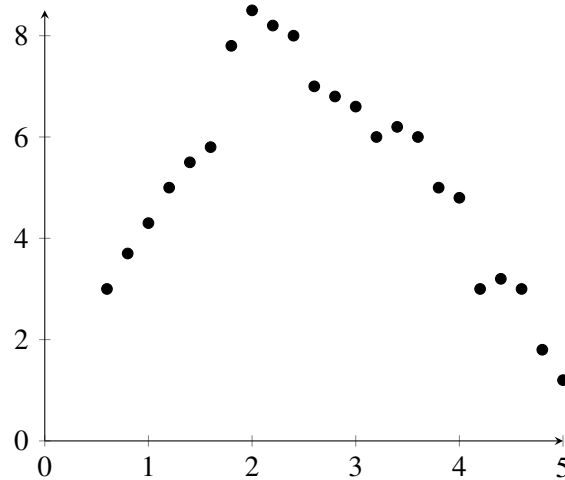
$$\{(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)\}$$

R Une série statistique à deux variables peut être représentée sous la forme d'un tableau, comme ci-dessous.

Valeurs de la variable X	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs de la variable Y	y_1	y_2	...	y_n

3.2.2 Représentation graphique, point moyen

Définition 3.8 On considère une série statistique à deux variables. À chaque observation $(x_i; y_i)$, on lui associe un point du plan, de coordonnées $(x_i; y_i)$.

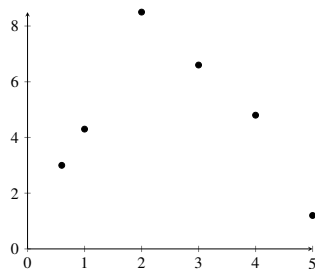


1. L'ensemble de ces points constitue un *nuage de points* associé à cette série statistique.
2. Le *point moyen* de cette série, noté G , est le point dont les coordonnées sont les moyennes des séries $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Autrement dit :

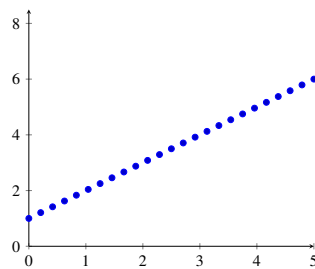
$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}\right)$$

3.2.3 Corrélation et ajustements

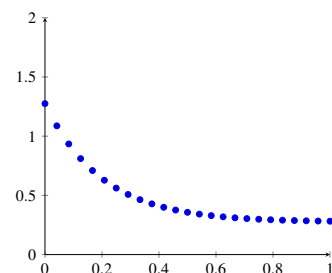
Lorsque l'on trace le nuage de points associé à une série statistique à deux variables, on peut obtenir des informations qualitatives ; notamment le fait de reconnaître s'il existe un « lien » entre les deux variables étudiées. C'est ce que l'on appellera la *corrélation* entre les deux variables.



Absence de corrélation
entre les variables.



Possibilité de corrélation
entre les variables. On
effectuera un *ajustement*
affine.

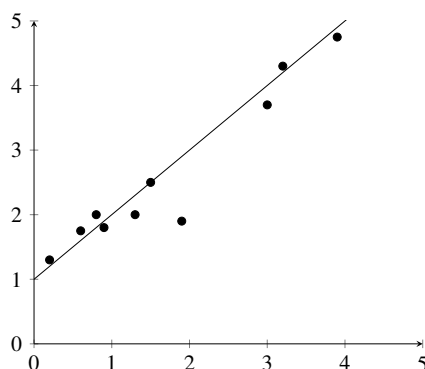


Possibilité de corrélation
entre les variables. On
effectuera un *ajustement*
(non affine).

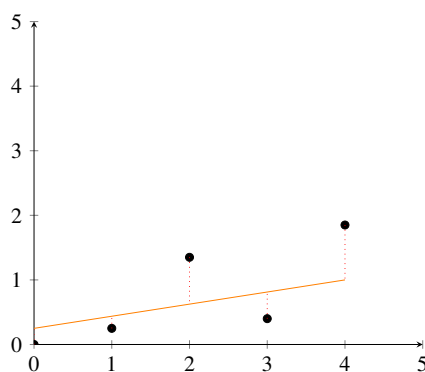
De manière plus quantitative, on appellera *ajustement* entre les deux variables, le fait de trouver l'expression d'une fonction mathématique qui lie ces deux variables.

Définition 3.9 On considère une série statistique à deux variables.

1. Une droite d'ajustement affine tracée *au jugé* est une droite qui passe le plus près possible des points du nuage de points.



2. Une droite d'ajustement affine tracée grâce à la *méthode des moindres carrés*, qu'on appellera *droite de régression de y en x*, est une droite située à égale distance des points situées de part et d'autre de celle-ci. En particulier, cette droite passera par le point moyen du graphe.



Proposition 3.1 À tout ajustement affine, on associe un *coefficient de corrélation*, noté r , tel que :

1. r est compris entre -1 et 1 .
2. La droite d'ajustement « monte » si, et seulement si, r est positif.
3. L'ajustement affine est de bonne qualité si, et seulement si, r est proche de ± 1 .

4. Suites arithmétiques et géométriques

4.1 Généralités sur les suites

4.1.1 Définition, modes de génération d'une suite

Définition 4.1 Une *suite numérique* est une fonction, définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. À chaque entier n , on associe un nombre réel noté u_n , appelé *terme de rang n* .

Définition 4.2 Une suite est définie *explicitement* lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme, directement en fonction de n . Dans ce cas, l'expression de u_n en fonction de n est appelée *terme général de la suite u* .

■ **Exemple 4.1** On définit une suite par $u_n = n^2 + 1$. Calculer u_0 , u_1 et u_{10} .

.....

.....

.....

Définition 4.3 Une suite u est définie *par récurrence* lorsque l'on dispose de la valeur d'un terme, et d'une relation qui permet de calculer la valeur d'un terme en fonction de son prédécesseur (c'est-à-dire que l'on donne l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n). Dans ce cas, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n est appelée *relation de récurrence de la suite u* .

■ **Exemple 4.2** On définit une suite par $u_0 = 4$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 3$. En détaillant votre démarche, calculer u_3 .

.....

.....

.....

R Attention aux erreurs de calculs lorsque l'on souhaite calculer un terme d'une suite définie par récurrence, étant donné qu'il faut calculer tous les termes intermédiaires entre le premier terme (donné dans l'énoncé), et celui que l'on souhaite déterminer...

4.1.2 Représentation graphique d'une suite

Définition 4.4 Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une suite u est un *nuage de points* de coordonnées $(n; u_n)$.

R Pour tracer le nuage de points d'une suite u , on calcule les premiers termes de celles-ci (de u_0 jusqu'à u_4 , par exemple), puis on place les points correspondants dans un repère orthogonal.

4.1.3 Monotonie, sens de variation d'une suite

Définition 4.5 On dira qu'une suite u est *monotone* si elle est dans un de ces cas :

1. *croissante*, c'est-à-dire si, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.
2. *décroissante*, c'est-à-dire si, pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.
3. *constante* ou *stationnaire*, c'est-à-dire si, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$.

R Pour étudier le sens de variation d'une suite, il y a deux méthodes (la deuxième méthode n'est valable que pour une suite dont tous les termes sont non nuls).

1. Si $u_{n+1} - u_n$ est positif (resp. négatif), alors u est croissante (resp. décroissante).
2. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est plus grand (resp. petit) que 1, alors u est croissante (resp. décroissante).

■ **Exemple 4.3** On définit une suite u pour tout entier n par $u_n = n^2 + 1$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 . Quel semble être le sens de variation de u ?

.....

2. Étudier la monotonie de u .

.....

4.2 Suites arithmétiques

4.2.1 Définition, expression du terme général

Définition 4.6 Une suite u est *arithmétique de raison r* si l'une de ces conditions est vérifiée :

- Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r .
- La différence entre deux termes consécutifs est constante, égale à r .
- Il existe un nombre réel r , tel que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = r$.

Proposition 4.1 Soit u une suite arithmétique de raison r . L'expression de u_n en fonction de n est :

1. Si le premier terme de la suite est u_0 , on a $u_n = u_0 + nr$.
2. Si le premier terme de la suite est u_p , on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

■ **Exemple 4.4** Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n - 2$.

1. Calculer les valeurs de u_1 , u_2 et u_3 .

.....

2. La suite u est arithmétique. Donner ses éléments caractéristiques (premier terme et raison).

.....

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis calculer u_{23} .

.....

4.2.2 Sens de variation, représentation graphique

Proposition 4.2 Soit u une suite arithmétique de raison r .

1. Si r est positif (resp. négatif), alors u est strictement croissante (resp. décroissante).
2. La nuage représentant u est constitué de points alignés, dont le coefficient directeur est r .

4.2.3 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Proposition 4.3 Soit u une suite arithmétique de raison r . La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = \text{Nb de termes} \times \frac{\text{Premier terme de la somme} + \text{Dernier terme de la somme}}{2}$$

■ **Exemple 4.5** Yannis travaille pour une grande entreprise de télécommunications mobile. Dans le contrat qu'il a signé avec l'entreprise, il est spécifié que son salaire annuel est de 25 000 € bruts pour la première année d'embauche et que, chaque année, son salaire annuel augmentera de 103,7 € brut. Yannis souhaite savoir combien l'entreprise l'aura payé après dix ans de travail. On note y_n le salaire de Yannis après n années d'embauche.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n , puis calculer u_{10} .

.....

2. En déduire la réponse à la question que se pose Yannis.

.....

4.3 Suites géométriques

4.3.1 Définition, expression du terme général

Définition 4.7 Une suite u est *géométrique de raison q* si l'une de ces conditions est vérifiée :

- Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre q .
- Le quotient entre deux termes consécutifs est constant, égal à q .
- Il existe un nombre réel q , tel que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

R Une situation d'évolutions successives (augmentation ou diminution de $T\%$) est modélisable par une suite géométrique de raison $1 \pm \frac{T}{100}$.

Proposition 4.4 Soit u une suite géométrique de raison q . L'expression de u_n en fonction de n est :

1. Si le premier terme de la suite est u_0 , on a $u_n = u_0 \times q^n$.
2. Si le premier terme de la suite est u_p , on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

■ **Exemple 4.6** Ryan vend ses vêtements sur une célèbre plateforme de vente entre particuliers. Grâce à ses ventes, il en tire un capital de 5 000 euros qu'il décide de placer sur son livret A, au 1^{er} janvier 2022, rémunéré à 3 % chaque année. On note u la suite numérique correspondant à l'argent dont dispose Ryan sur son livret A au 1^{er} janvier de l'année 2022 + n .

1. Donner la valeur de u_0 , puis calculer u_1 et u_2 .

.....

2. Expliquer pourquoi la suite u est géométrique, et donner sa raison.

.....

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis déterminer la somme dont disposera Ryan 1^{er} janvier 2030.

.....

4.3.2 Sens de variation, représentation graphique

Proposition 4.5 Soit u une suite géométrique de raison q , de premier terme strictement positif.

- Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors u est constante.
- Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

4.3.3 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Proposition 4.6 Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par :

$$u_l + u_{l+1} + \dots + u_m = \text{Premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{Nb de termes}}}{1 - q}$$

■ **Exemple 4.7** Voici un texte extrait de Wikipedia.

En Inde, le roi Belkib (ou Bathait), qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire. Le sage Sissa invente alors le Chaturanga, l'ancêtre du jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met.

Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande. Le roi tente de persuader Sissa d'accepter une récompense d'une valeur plus importante. Devant le refus de Sissa, il ordonne que les grains soient apportés. Mais lorsqu'on met en œuvre la demande, on s'aperçoit qu'il n'y a pas assez de grains de riz dans tout le royaume pour la satisfaire.

1. Justifier que le nombre de grains de riz disposé sur la n -ème case de l'échiquier peut se modéliser par une suite u , dont on spécifiera le type, et le premier terme.

.....

2. Déterminer le nombre de grains de riz permettant de recouvrir l'ensemble des 64 cases de l'échiquier.

.....

3. La production annuelle de riz à l'heure actuelle est d'environ 479 millions de tonnes par an, et un grain de riz pèse en moyenne 0,04 gramme. Justifier alors la dernière phrase du texte extrait de Wikipédia.

.....

5. Fonctions logarithme et exponentielle

5.1 Fonction logarithme népérien

5.1.1 Définition, propriétés algébriques

Définition 5.1 La fonction *logarithme népérien* est une fonction, notée $\ln$, qui à tout nombre réel x strictement positif, associe un nombre réel noté $\ln(x)$.

Proposition 5.1 On a $\ln(1) = 0$ et pour tous a et b strictement positifs, et n entier naturel :

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\ln(a^n) = n \ln(a)$
4. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

■ **Exemple 5.1** On considère le nombre $A = 5 \ln(32) - \ln\left(\frac{1}{8}\right) + 2 \ln(32^3)$.

1. Écrire tous les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:

- a. $\ln(32) = \dots\dots\dots$
- b. $\ln\left(\frac{1}{8}\right) = \dots\dots\dots$
- c. $\ln(32^3) = \dots\dots\dots$

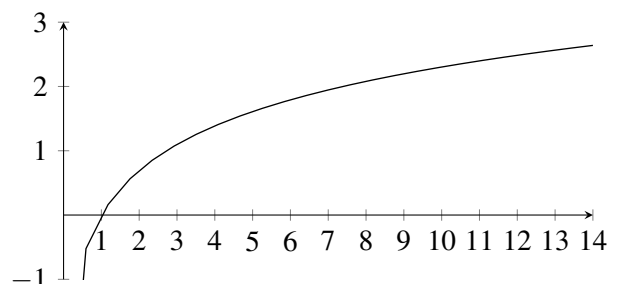
2. En déduire l'écriture la plus simplifiée possible du nombre A .

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

5.1.2 Sens de variation, signe, représentation graphique

Proposition 5.2 La courbe de la fonction logarithme népérien est donnée ci-contre. On en déduit que la fonction $\ln$ est :

1. strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
2. strictement négative sur $]0; 1[$,
3. strictement positive sur $]1; +\infty[$.



5.1.3 Fonction logarithme décimal

Définition 5.2 La fonction *logarithme décimal* est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

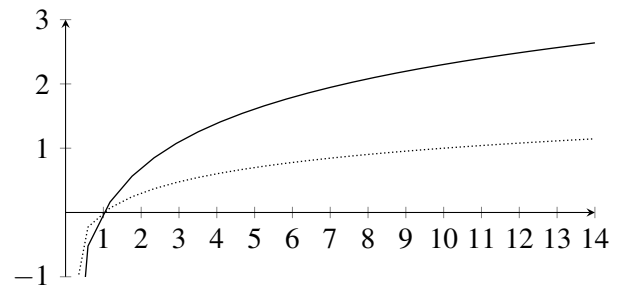
$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Proposition 5.3 On a $\log(1) = 0$ et pour tous a et b strictement positifs, et n entier naturel :

1. $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
3. $\log(a^n) = n \log(a)$
4. $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$

Proposition 5.4 Les courbes des fonctions logarithme népérien (trait plein) et décimal (pointillés) sont données ci-contre. On en déduit que la fonction $\log$ est :

1. strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
2. strictement négative sur $]0; 1[$,
3. strictement positive sur $]1; +\infty[$.



5.2 Fonction exponentielle

5.2.1 Définition, propriétés algébriques

Définition 5.3 Il existe un nombre $e \approx 2,72$ tel que $\ln(e) = 1$. La fonction *exponentielle* est une fonction qui à tout nombre réel x , associe un nombre strictement positif noté e^x .

Proposition 5.5 On a $e^0 = 1$ et pour tous a et b strictement positifs, et n entier naturel :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$
2. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
3. $(e^a)^n = e^{na}$
4. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

■ **Exemple 5.2** Déterminer l'écriture la plus simplifiée possible du nombre suivant :

$$A = \frac{1}{e^{50}} \times \frac{(e^7)^{11}}{e^8 \times e^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

5.2.2 Sens de variation, signe, représentation graphique

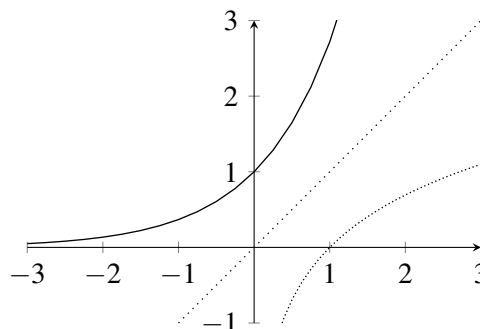
Proposition 5.6 Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.
2. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

R Une conséquence de la proposition précédente est la suivante : la courbe de la fonction exponentielle est la symétrique de la fonction logarithme népérien par rapport à la première bissectrice du repère.

Proposition 5.7 Les courbes de la fonction exponentielle (trait plein) et de la fonction logarithme népérien (pointillés) sont données ci-contre. On en déduit que la fonction exponentielle est :

1. strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
2. strictement positive sur $\mathbb{R}$.



5.3 Résolution d'(in)équations

5.3.1 Résolution d'(in)équations avec une puissance inconnue

■ **Exemple 5.3** Une entreprise réalise 9 600 € de bénéfice net en 2017. Grâce à des améliorations des outils de production, ce bénéfice net augmente de 3% chaque année. On note b_n le bénéfice net réalisé par l'entreprise en $2017 + n$.

1. Donner la nature de cette suite, puis l'expression de b_n en fonction de n .

.....

2. Déterminer à partir de quelle année le bénéfice net sera supérieur à 12 000 €.

.....

5.3.2 Résolution d'(in)équations avec $\ln$ ou $\exp$ dans au moins un membre

Proposition 5.8 Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$. | 3. $\ln(x) = y \iff x = e^y$. |
| 2. $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$. | 4. $\ln(x) < y \iff x < e^y$. |

Proposition 5.9 Pour tous réels x et y , on a :

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. $e^x = e^y \iff x = y$. | 3. $e^x = y \iff x = \ln(y)$ (si $y > 0$). |
| 2. $e^x < e^y \iff x < y$. | 4. $e^x < y \iff x < \ln(y)$ (si $y > 0$). |

6. Mathématiques financières

6.1 Placements à intérêts simples

6.1.1 Motivations, définition

R Ce type de placement est relativement peu utilisé, principalement pour des **placements à très courts termes** (n'excédant pas une année) ou pour des **emprunts d'État**. Dans ce cas, les intérêts sont qualifiés de « simples », ils sont proportionnels à la durée de ce placement.

Définition 6.1 Lorsque l'on place un capital C_0 avec des *intérêts simples* à un *taux nominal* (ou *taux facial*) de $t\%$ sur une période (un jour, une semaine, une quinzaine, un mois, un trimestre, une année, etc.), cela signifie que l'intérêt perçu pour chaque période est toujours égal à $t \times C_0$.

6.1.2 Valeur acquise par un capital placé

Proposition 6.1 Si l'on place un capital C_0 avec des intérêts simples à un taux nominal de $t\%$:

1. La *valeur acquise* C_n pour le placement d'un capital C_0 sur une durée de n périodes est :

$$C_n = (1 + n \times t) \times C_0$$

2. L'intérêt acquis I_n est alors de $I_n = C_n - C_0$, soit $I = n \times t \times C_0$.

■ **Exemple 6.1** Déterminer la valeur et l'intérêt acquis pour le placement sur un an d'un capital de 1 200 € à intérêts simples, au taux trimestriel de 1,5%.

.....

6.1.3 Valeur actuelle d'un capital placé

Proposition 6.2 La *valeur actuelle* d'un capital placé à intérêts simples aujourd'hui, au taux nominal de $t\%$, qui aura une valeur acquise égale à C_n dans n périodes, est :

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \times t}$$

■ **Exemple 6.2** Déterminer la valeur actuelle d'un capital placé à intérêts simples aujourd'hui, au taux annuel de 1%, qui aura la valeur acquise de 2 000 € dans 5 ans.

.....

6.1.4 Équivalence entre taux annuel et taux mensuel

Proposition 6.3 On place un capital avec des intérêts simples.

Un placement au taux mensuel t_m est équivalent à un placement au taux annuel $t_a = 12t_m$.

■ **Exemple 6.3** On place un capital de 1 200 € à intérêts simples, au taux annuel de 3%.

En appliquant un taux proportionnel, déterminer l'intérêt acquis par ce capital après un placement sur une période d'un mois, puis d'un trimestre, et enfin d'un semestre.

.....

.....

.....

.....

.....

6.2 Placements à intérêts composés

6.2.1 Motivations, définition

R Ce type de placement est plus commun, principalement pour des **placements à longs termes**, notamment pour les livrets A, les LDD, CEL ou PEL. Dans ce cas, les intérêts ne sont pas constants.

Définition 6.2 Lorsque l'on place un capital C_0 avec des *intérêts composés* de $t\%$ sur une période (un jour, une semaine, une quinzaine, un mois, un trimestre, une année, etc.), cela signifie que l'intérêt perçu sur une période va s'ajouter au capital et ainsi contribuer à la création d'intérêts supplémentaires sur la période suivante.

6.2.2 Valeur acquise par un capital placé

Proposition 6.4 Si l'on place un capital C_0 avec des intérêts composés à un taux de $t\%$:

1. La *valeur acquise* C_n pour le placement d'un capital C_0 sur une durée de n périodes est :

$$C_n = (1 + t)^n \times C_0$$

2. L'*intérêt acquis* I_n est alors de $I_n = C_n - C_0$, soit $I = [(1 + t)^n - 1] \times C_0$.

■ **Exemple 6.4** Déterminer la valeur et l'intérêt acquis pour le placement sur vingt ans d'un capital de 1 000 € à intérêts composés, au taux annuel de 1%.

.....

.....

.....

6.2.3 Valeur actuelle d'un capital placé

Proposition 6.5 La *valeur actuelle* d'un capital placé à intérêts composés aujourd'hui, au taux nominal de $t\%$, qui aura une valeur acquise égale à C_n dans n périodes, est :

$$C_0 = (1 + t)^{-n} \times C_n$$

■ **Exemple 6.5** Déterminer la valeur actuelle d'un capital placé à intérêts composés aujourd'hui, au taux annuel de 1%, qui aura la valeur acquise de 10 000 € dans 10 ans.

.....

.....

.....

6.2.4 Équivalence entre taux annuel et taux mensuel

Proposition 6.6 On place un capital avec des intérêts composés.

Un placement au taux mensuel t_m est équivalent à un placement au taux annuel t_a . La formule donnant l'équivalence entre ces taux est :

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} \iff 1 + t_m = (1 + t_a)^{\frac{1}{12}}$$

■ **Exemple 6.6** Déterminer le taux annuel, équivalent à un taux mensuel de 0,25%.

.....

■ **Exemple 6.7** Déterminer le taux mensuel, équivalent à un taux annuel de 5%.

.....

6.3 Calculs d'annuités, tableaux d'amortissements

Définition 6.3 En comptabilité, les *annuités* désignent une succession périodique (chaque mois, chaque trimestre, chaque année, etc.) de versements effectués dans le but de se constituer un capital d'épargne, ou bien de rembourser un emprunt ou une dette.

6.3.1 Placement à annuités constantes

On suppose que l'on place une même annuité a , à la fin de chaque période et pendant n périodes, avec des intérêts composés à un taux de $t\%$. On cherche à connaître la valeur acquise par ce capital :

Période	Placement	Valeur acquise par ce placement après n périodes
1	a	$a \times (1+t)^{n-1}$
2	a	$a \times (1+t)^{n-2}$
3	a	$a \times (1+t)^{n-3}$
...	...	...
$n-2$	a	$a \times (1+t)^2$
$n-1$	a	$a \times (1+t)^1$
n	a	a

La valeur acquise par ces placements périodiques après n périodes est égal à $a + a \times (1+t)^1 + \dots + a \times (1+t)^{n-1}$, c'est-à-dire à la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $1+t$.

Proposition 6.7 Au dernier versement, la valeur acquise par le capital placé est $v_n = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$.

L'annuité constante de placement est $a = v_n \times \frac{t}{(1+t)^n - 1}$.

■ **Exemple 6.8** Déterminer la valeur acquise pour le placement d'une annuité constante de 1 500 € par an, pendant une période de 10 ans, sur un compte rémunéré à 3% par an à intérêts composés.

.....

6.3.2 Emprunt à annuités constantes

On suppose que l'on souhaite emprunter un certain capital en versant une même annuité a , à la fin de chaque période et pendant n périodes, avec des intérêts composés à un taux de $t\%$. On cherche à connaître le capital empruntable avec de telles annuités :

Période	Versements	Valeur actuelle de ce versement
1	a	$a \times (1+t)^{-1}$
2	a	$a \times (1+t)^{-2}$
3	a	$a \times (1+t)^{-3}$
...	...	...
$n-2$	a	$a \times (1+t)^{-n+2}$
$n-1$	a	$a \times (1+t)^{-n+1}$
n	a	$a \times (1+t)^{-n}$

La valeur acquise par ces versements périodiques est égal à $a \times (1+t)^{-1} + \dots + a \times (1+t)^{-n}$, c'est-à-dire à la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $a \times (1+t)^{-1}$ et de raison $(1+t)^{-1}$.

Proposition 6.8 Une période avant le premier versement, le capital emprunté est $v_0 = a \times \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$.
L'annuité constante de remboursement est $a = v_0 \times \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}$.

■ **Exemple 6.9** Un couple a contracté un emprunt à annuités constantes, au début de l'année 2018 et pour une durée de 15 ans, la somme de 150 000 € pour acheter un logement neuf, à un taux d'intérêt annuel de 1,75%.

1. Montrer que le montant de l'annuité constante est d'environ 11 456,61 €.

.....
.....
.....

2. Montrer que le coût du crédit, c'est-à-dire le montant total des intérêts versés à l'établissement bancaire à la fin du plan de remboursement, est d'environ 21 849,15 €.

.....
.....
.....

6.3.3 Tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes

Lorsque l'on rembourse un emprunt ou une dette, l'emprunteur ou le débiteur doit s'acquitter, à chaque période, du paiement d'une annuité qui est la somme de deux éléments :

- L'*amortissement*, c'est-à-dire le remboursement d'une partie du capital emprunté.
- Les *intérêts dûs*, qui portent sur le capital restant dû.

La dette doit être totalement remboursée à la fin du plan de remboursement. Le montant total versé (la somme des annuités versées) est égale à la somme du montant de la dette (la somme des amortissements) et du coût du crédit (la somme des intérêts dûs).

Période	Dette déb. pér.	Intérêt dû	Amortissement	Annuité versée	Dette fin pér.
1	v_0	$I_1 = v_0 \times t$	$A_1 = a - I_1$	a	$v_1 = v_0 - A_1$
2	v_1	$I_2 = v_1 \times t$	$A_2 = a - I_2$	a	$v_2 = v_1 - A_2$
...	...	...	...	...	...
n	v_{n-1}	$I_n = v_{n-1} \times t$	$A_n = v_{n-1}$	a	$v_n = 0$