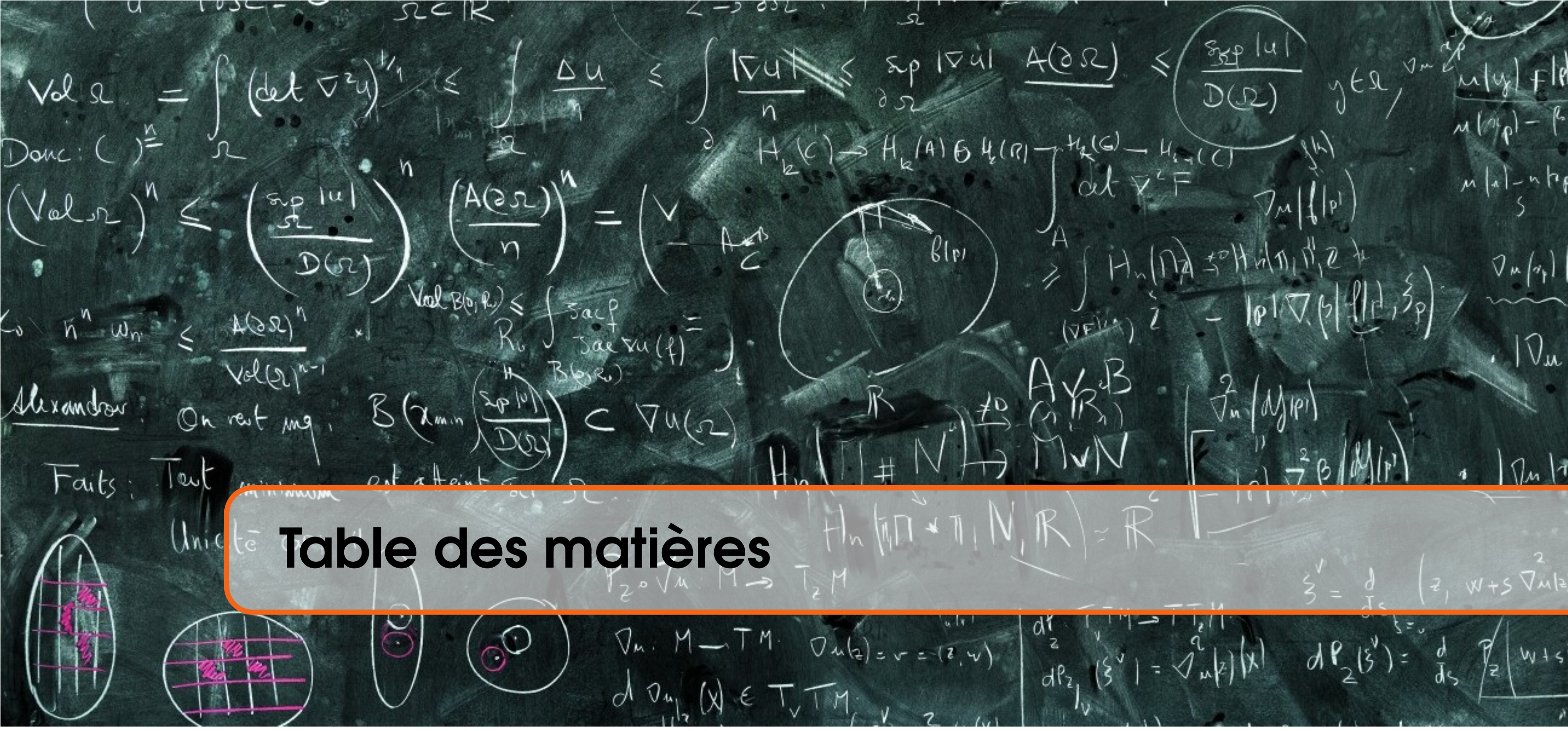
# Enseignement de Spécialité Mathématiques – Première Générale

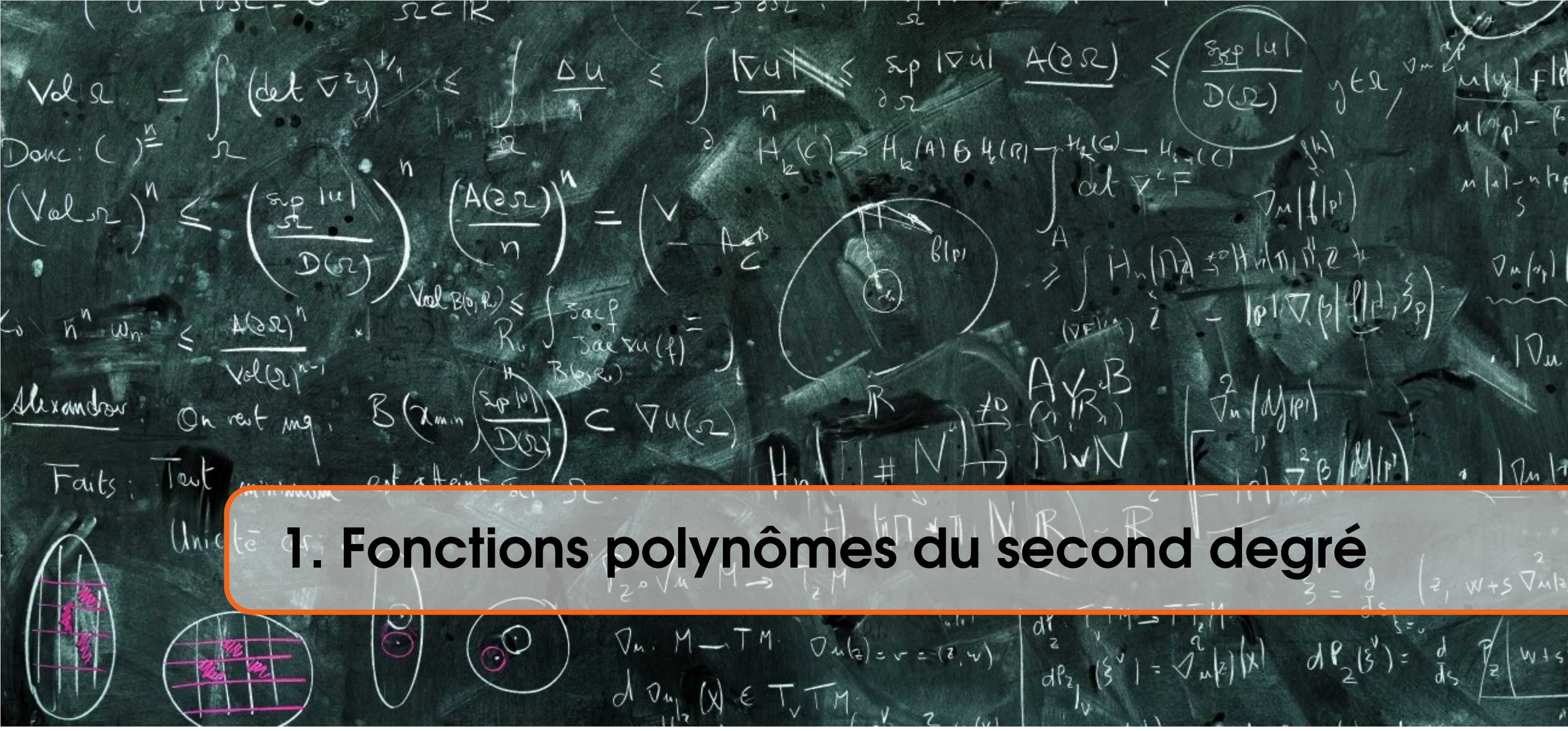
Stage de la Toussaint

**Kevin Cauvin**

*Septième impression, Octobre 2025*



# Table des matières



# 1. Fonctions polynômes du second degré

## 1.1 Qu'est-ce qu'une fonction polynôme du second degré ?

**Définition 1.1** Une *fonction polynôme du second degré*, ou *fonction trinôme*, est une fonction $f$ définie par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels, avec $a \neq 0$.

**R** Il sera capital de savoir correctement ces coefficients $a$, $b$ et $c$ car ils auront une importance capitale pour la suite...

■ **Exemple 1.1** Avez-vous compris pourquoi on impose que $a \neq 0$ ? ..........................

■ **Exemple 1.2** Pour chacune des fonctions du second degré suivantes, identifier les valeurs des coefficients $a$, $b$ et $c$.

1. $f(x) = 5x^2 + 3x - 7$.
2. $g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$.
3. $h(x) = -11 - 2x + 3x^2$.
4. $i(x) = (2 - 3x)(x - 2)$.
5. $j(x) = -9 - x^2$.

## 1.2 À quoi sert la forme canonique ?

### 1.2.1 Comment trouver une forme canonique ?

**Proposition 1.1** Toute fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous une forme, appelée *forme canonique*, du type :

$$f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

où l'on peut calculer $\alpha$ et $\beta$ grâce aux relations $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

R Avec votre enseignant, vous avez certainement dû voir la démonstration permettant de comprendre comment on peut obtenir une forme canonique. Dans cette démonstration, on essaie d'obtenir, à partir de la forme développée, une expression ressemblant à une identité remarquable que l'on factorise par la suite. Il convient donc de savoir déterminer une forme canonique de deux manières différentes :

1. Par le calcul « simple » de $\alpha$ et $\beta$, puis en écrivant la forme canonique ci-dessus.
2. Par la factorisation, comme vu en cours.

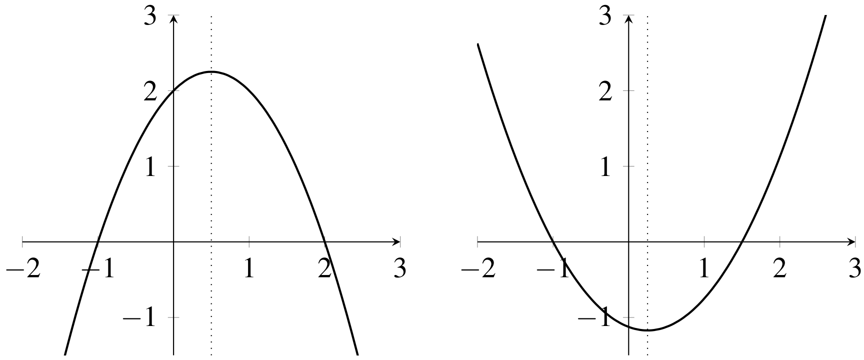
■ **Exemple 1.3** Déterminer, par deux méthodes différentes, les formes canoniques des fonctions polynômes du second degré définies par $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$ et $g(x) = -3x^2 - 6x - 10$.

### 1.2.2 Quelles sont les variations d'une fonction polynôme du second degré ?

**Proposition 1.2** La courbe représentant une fonction du second degré s'appelle une *parabole*, et admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

— On dit qu'elle est « *tournée vers le bas* » si $a < 0$. Dans ce cas :
  1. $f$ est croissante, puis décroissante.
  2. Le *sommet* correspond à un maximum, qui vaut $\beta$, et atteint en $x = \alpha$.

— On dit qu'elle est « *tournée vers le haut* » si $a > 0$. Dans ce cas :
  1. $f$ est décroissante, puis croissante.
  2. Le *sommet* correspond à un minimum, qui vaut $\beta$, et atteint en $x = \alpha$.




$a < 0$ $a > 0$

■ **Exemple 1.4** On définit des fonctions polynômes du second degré par $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$, $g(x) = -3x^2 - 6x - 10$ et $h(x) = -4(x+7)^2 - 3$. Pour chacune de ces fonctions :

1. Préciser la forme de la courbe.
2. Donner l'équation de leur axe de symétrie.
3. Dresser leur tableau de variations.

## 1.3 À quoi sert la forme factorisée ?

### 1.3.1 Comment résoudre une équation du second degré ?

**Définition 1.2** Une *équation du second degré* est de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$.

**Proposition 1.3** Pour résoudre une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$, il faut déjà calculer le *discriminant* $\Delta$ grâce à la formule $\Delta = b^2-4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

■ **Exemple 1.5** Résoudre les équations du second degré suivantes.

1. $x^2+4x-1=0$.
2. $-2x^2+7x-1=0$.
3. $-2x^2+x-1=0$.
4. $5x^2+12x-7=21$.

### 1.3.2 Comment résoudre une inéquation du second degré ?

**Proposition 1.4** On considère une fonction du second degré dont l'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et $\Delta$ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, la *forme factorisée* de $f$ est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, et son tableau de signes est :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

2. Si $\Delta = 0$, la *forme factorisée* de $f$ est $f(x) = a(x - x_0)^2$, et son tableau de signes est :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $a$ | |

3. Si $\Delta < 0$, l'expression de $f$ ne peut pas se factoriser, et son tableau de signes est :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | signe de $a$ | |

R Les tableaux de signes précédents se résument à l'aide de cette phrase : « *Une fonction du second degré est toujours du signe de a, sauf entre ses éventuelles racines.* »

■ **Exemple 1.6** Déterminer les formes factorisées (lorsqu'elles existent), et les tableaux de signes des polynômes suivants.

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$.
2. $g(x) = -2x^2 + 7x - 1$.
3. $h(x) = -2x^2 + x - 1$.
4. $i(x) = 5x^2 + 12x - 28$.

■ **Exemple 1.7** Déduire de l'exercice précédente les solutions aux inéquations suivantes.

1. $x^2 + 4x - 1 > 0$.
2. $-2x^2 + 7x - 1 \leqslant 0$.
3. $-2x^2 + x - 1 \leqslant 0$.
4. $5x^2 + 12x - 28 \geqslant 0$.

## 1.4 Comment passer d'une forme à une autre ?

R Pour passer d'une forme développée à canonique, il faut revoir la section **1.2**.

R Pour passer d'une forme développée à factorisée, il faut revoir la section **1.3**.

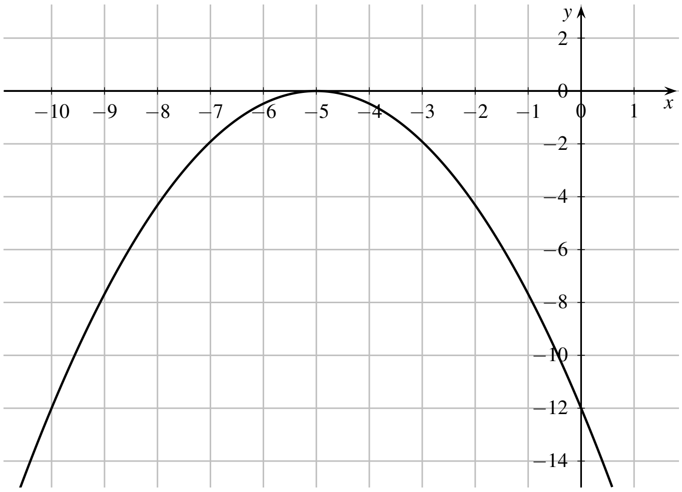
R Pour passer d'une forme canonique ou factorisée à développée, il suffit... de développer.

■ **Exemple 1.8** Déterminer les formes développées des polynômes ainsi définis.

1. $f(x) = -2(x+3)^2 - 4$.
2. $g(x) = 4(x-6)^2 + 10$.
3. $h(x) = (x-1)(x-3)$.
4. $i(x) = -4(x+1)(x-5)$.
5. $j(x) = -3(x+1)^2$.

## 1.5 Mise en application : des exercices-types bilans

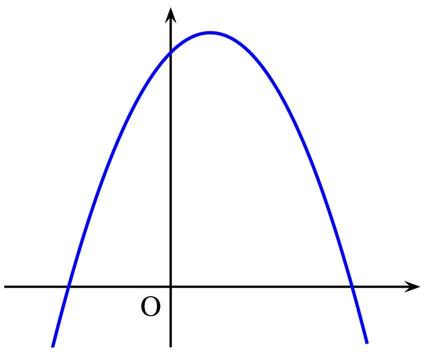
■ **Exemple 1.9** Soit $f$ une fonction polynôme du second degré donnée, pour tout nombre réel $x$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a$, $b$, $c$ sont réels. On note $\Delta$ son discriminant. On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ *et on suppose qu'elle admet l'axe des abscisses comme tangente en un de ses points*.




On peut affirmer que :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $a < 0$ et $\Delta < 0$ | **b.** $a > 0$ et $\Delta = 0$ | **c.** $a < 0$ et $\Delta = 0$ | **d.** $a < 0$ et $\Delta > 0$ |

■ **Exemple 1.10** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels. On considère dans un repère la courbe représentative de $f$ tracée ci-contre. On appelle $\Delta$ son discriminant.




On peut affirmer que :

| | |
|---|---|
| **a.** $a > 0$ ou $c < 0$ | **c.** $a < 0$ et $c < 0$. |
| **b.** $c$ et $\Delta$ sont du même signe | **d.** $a < 0$ et $\Delta < 0$. |

■ **Exemple 1.11** On considère l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$. On note $S$ la somme des racines de cette équation et $P$ leur produit. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $S = 2, P = -8$ | **b.** $S = -2, P = -8$ | **c.** $S = -2, P = 8$ | **d.** $S = 2, P = 8$ |

■ **Exemple 1.12** L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = x^2 + x + 3$ est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $y = x$ | **b.** $y = -0,5x + 1$ | **c.** $y = -0,5$ | **d.** $x = -0,5$ |

■ **Exemple 1.13** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$. L'abscisse du minimum de $f$ est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $-\frac{3}{2}$ | **b.** $\frac{2}{3}$ | **c.** $\frac{3}{2}$ | **d.** 1 |

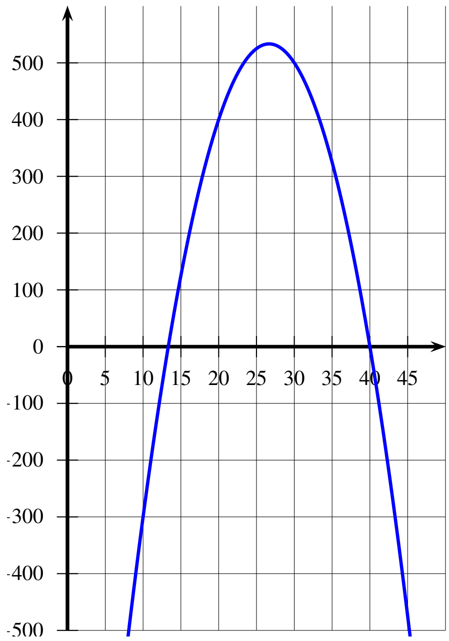
■ **Exemple 1.14** Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0,5(x-2)^2 - 8$ ?

| | |
|---|---|
| **a.** $0,5x^2 - 2x - 6$ | **b.** $0,5(x+10)(x-6)$ |
| **c.** $0,5(x-6)(x+2)$ | **d.** $0,5(x-10)(x+6)$ |

■ **Exemple 1.15** L'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** n'a pas de solution | **b.** a une seule solution | **c.** a pour ensemble de solutions l'intervalle [1 ; 2] | **d.** a pour solution l'ensemble des nombres réels |

■ **Exemple 1.16** Une entreprise fabrique des lampes solaires. Elle ne peut pas produire plus de 5 000 lampes par mois. Le résultat qu'elle peut réaliser en un mois, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction $b$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. On rappelle que lorsque le résultat est positif, on l'appelle bénéfice. L'axe des abscisses indique le nombre de lampes produites et vendues exprimé en centaines.




1. En utilisant le graphique :
   a. Lire $b(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Déterminer avec la précision que la lecture graphique permet, le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et les quantités de lampes à fabriquer correspondantes.
2. La fonction $b$ est définie par l'expression suivante :

$$b(x) = -3x^2 + 160x - 1600$$

   a. Montrer que $b(x) = (x-40)(-3x+40)$.
   b. Résoudre $b(x) = 0$.
   c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction $b$ et en quel nombre il est atteint.

■ **Exemple 1.17** Une entreprise produit mensuellement entre 200 et 3 000 panneaux solaires. On modélise le résultat de l'entreprise réalisé sur la vente de $x$ centaines de panneaux solaires par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[2\,;\,30]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400.$$

1. On admet que, pour tout $x$ de l'intervalle $[2\,;\,30]$, on a $f(x) = -2(x-40)(x-5)$. Donner le tableau de signes de la fonction $f$ sur l'intervalle $[2\,;\,30]$.
2. À partir de quel volume de production de panneaux solaires le résultat réalisé par l'entreprise est positif ?
3. Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[2\,;\,30]$.
4. Déterminer la valeur du bénéfice maximal et le volume de production correspondant.

■ **Exemple 1.18** Un agriculteur vend des cartons de pots de miel. Le coût, en euro, de production de $x$ cartons, où $x \leqslant 120$, est modélisé par le nombre $C(x)$, où $C$ est la fonction définie sur $[0\,;\,120]$ par :

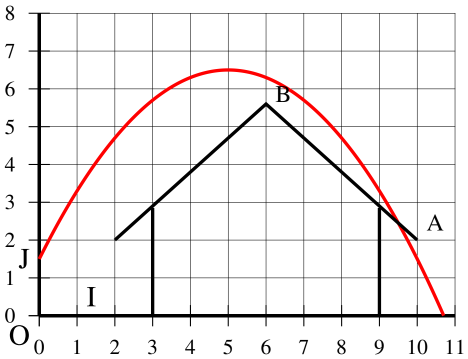
$$C(x) = 0,25x^2 + 500.$$

1. Calculer le coût de fabrication de 40 cartons.
2. On considère le bénéfice, en euro. réalisé après la production et la vente de $x$ cartons. On admet qu'il est modélisé par le nombre $B(x)$, où $B$ est la fonction définie sur $[0\,;\,120]$ par :

   $$B(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$$

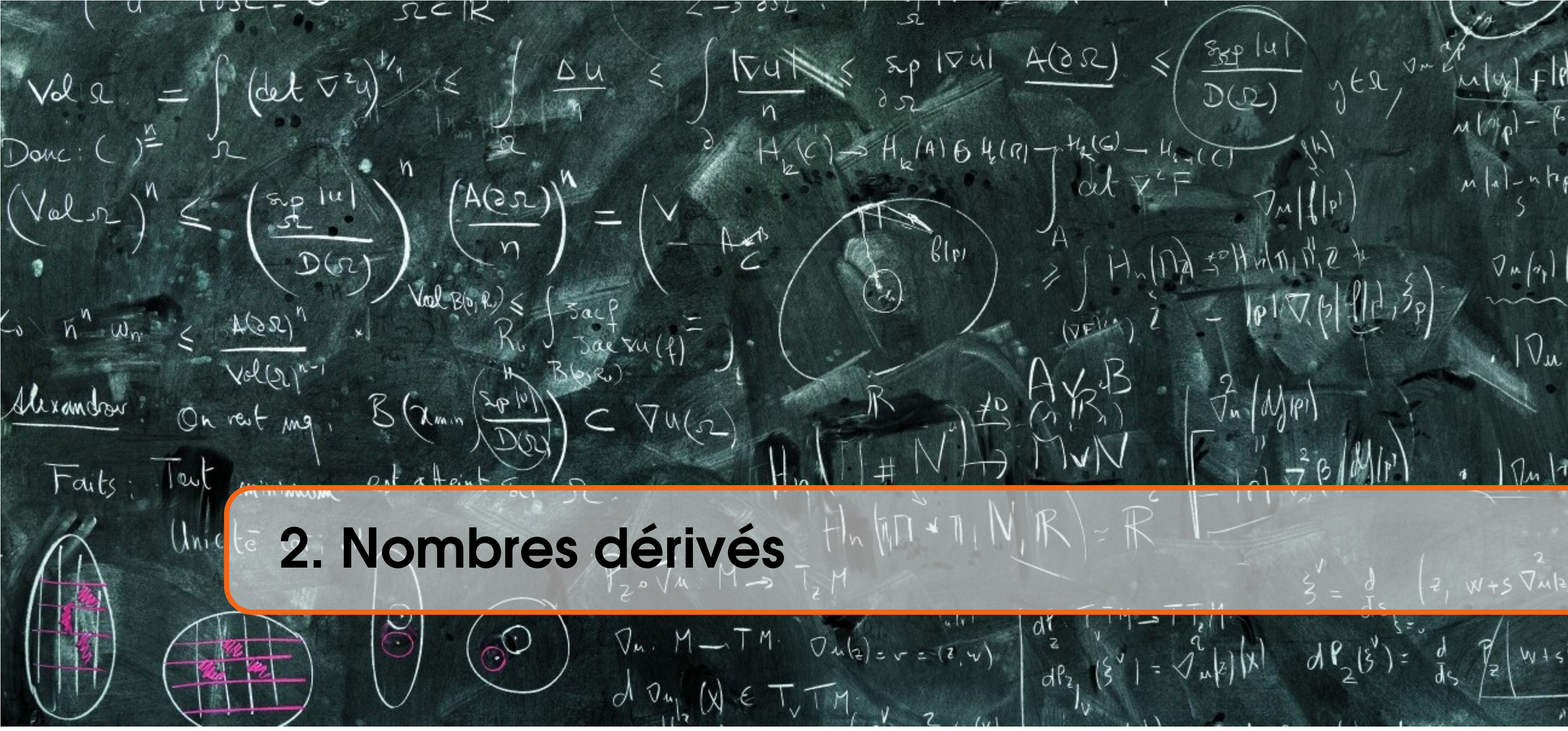
   Montrer que pour tout $x$ appartenant à $[0\,;\,120]$, $B(x) = -0.25(x-20)(x-100)$.
3. Déterminer le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;\,120]$.
4. Combien de cartons doit produire et vendre l'apiculteur pour réaliser un bénéfice ?
5. Déterminer le nombre de cartons à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.

■ **Exemple 1.19** Durant une balade en forêt, un enfant se fabrique un arc et des flèches. Il s'intéresse à la trajectoire d'une de ses flèches. L'enfant décide de tirer sa flèche par dessus un hangar désaffecté. La trajectoire est une portion de la courbe représentative de la fonction $f$ située dans le quart de plan rapporté au repère (O, I, J) ci-contre et définie pour tout réel $x$, par $f(x) = -0,2(x-5)^2 + 6,5$.




Une unité graphique correspond à 1 mètre dans la réalité.

1. a. De quelle hauteur, en mètre, la flèche est-elle tirée ? Justifier la réponse.
   b. Quelle hauteur maximale, en mètre, atteint-elle ? Justifier la réponse.
2. On admettra que la droite (AB) est représentée par la fonction définie par $g(x) = -0,9x + 11$. Démontrer que pour tout réel $x$, $f(x) - g(x) = -0,2(x-5)(x-9,5)$.
3. Quelles sont les coordonnées exactes du point d'impact sur le toit ?



# 2. Nombres dérivés

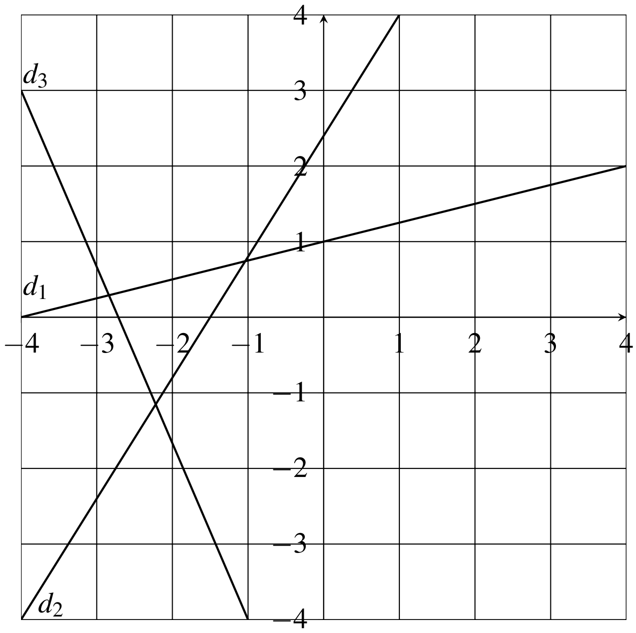
## 2.1 Comment trouver le coefficient directeur d'une droite ?

**Proposition 2.1** Toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = ax + b$, où $a$ est le *coefficient directeur* (ou encore la *pente*) et $b$ est l'*ordonnée à l'origine*.

**Proposition 2.2** Si la droite passe par deux points $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$, alors on peut calculer son coefficient directeur grâce à la formule suivante :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

■ **Exemple 2.1** Déterminer les coefficients directeurs et équations des droites tracées ci-dessous.



## 2.2 Comment calculer une limite ?

R En mathématiques, la notion de limite sera définie avec précision en classe de Terminale. On présentera ici une définition qui se veut être la plus « intuitive » possible. Par exemple, si on souhaite calculer cette limite :

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

On regardera, intuitivement, comment se comportent les valeurs $f(x)$ lorsque l'on prend des valeurs de $x$ très proches de $a$.

■ **Exemple 2.2** Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^2$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + 1$.
3. $\lim\limits_{x \to 3} x^2$.
4. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 1$.
5. $\lim\limits_{a \to 3} 2a - 1$.
6. $\lim\limits_{a \to 3} \dfrac{a}{a+1}$.
7. $\lim\limits_{x \to 0} 5x^2 + 7x - 9$.
8. $\lim\limits_{h \to 0} 1 + h^2 + \dfrac{2h}{h+1}$.
9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$.
10. $\lim\limits_{a \to 1} 2a\sqrt{a+1} - \sqrt{3-a}$.

## 2.3 Comment calculer un nombre dérivé ?

**Définition 2.1** Lorsqu'il existe, le *nombre dérivé de $f$ en $a$* est le nombre ainsi défini :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

■ **Exemple 2.3** Dans cet exercice, on souhaite déterminer le nombre dérivé de $f$ en 7, noté $f'(7)$, où $f$ désigne la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

1. Exprimer $f(7+h) - f(7)$ en fonction de $h$.
2. En déduire la valeur de $f'(7)$.

■ **Exemple 2.4** Sur le même modèle que précédemment, déterminer :

1. $f'(-5)$, si $f$ est définie par $f(x) = 9 - 7x$.
2. $f'(0)$, si $f$ est définie par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$.
3. $f'(1)$, si $f$ est définie par $f(x) = x^3$.
4. $f'(2)$, si $f$ est définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

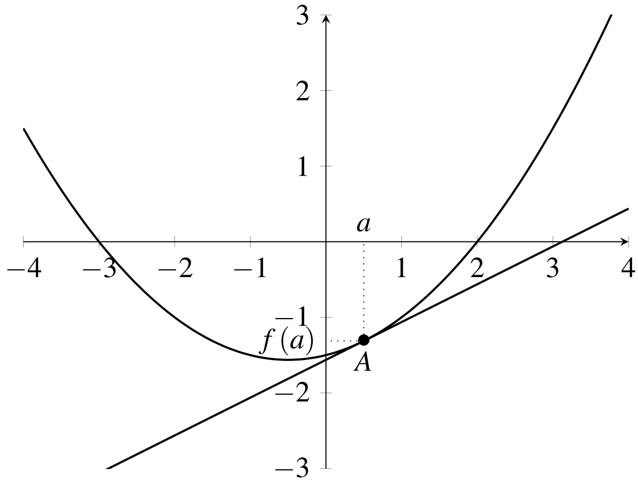
## 2.4 Qu'est-ce qu'une tangente à la courbe d'une fonction en un point ?

On considère une fonction $f$ définie sur un certain intervalle. Sur sa courbe représentative, on note $A$ un point d'abscisse $a$.

**Définition 2.2** La *tangente à la courbe représentant $f$ en $a$* est la droite passant par $A$ et dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$. Elle « épouse le plus possible la forme de la courbe au niveau de $A$ ».

**Proposition 2.3** Si $f$ est une fonction, et $a$ un nombre appartenant à l'ensemble de définition de $f$, l'équation de la tangente à la courbe représentant $f$ en $a$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

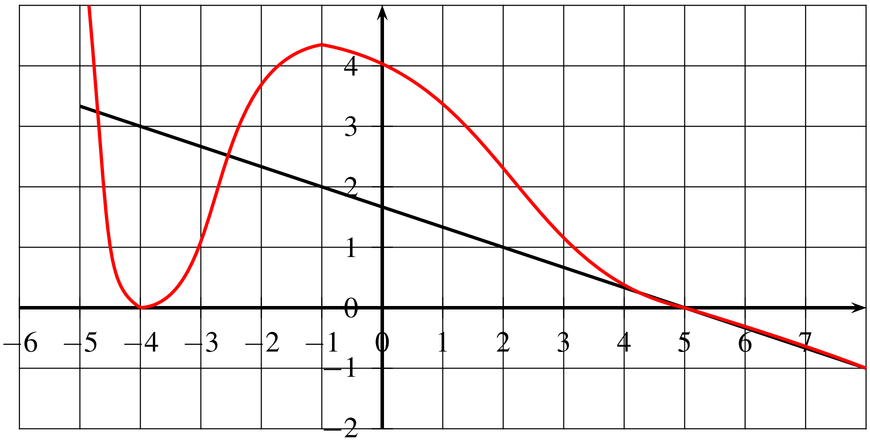



■ **Exemple 2.5** On pose la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Déterminer la valeur de $f'(7)$, sur le même modèle que celui détaillé en section **2.3**.
2. Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point $A$ d'abscisse 7 est $y = 14x - 48$.
3. Simplifier l'expression de $f(x) - (14x - 48)$, puis étudier son signe. En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 7.

## 2.5 Mise en application : des exercices-types bilans

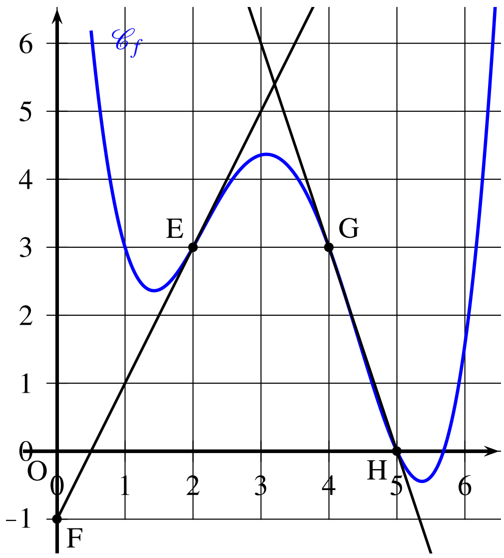
■ **Exemple 2.6** On se place dans un repère orthonormé du plan. Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée $C$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. La droite $D$ est tangente à la courbe $C$ au point A(5 ; 0).




On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$, Alors $f'(5)$ est égal à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $3$ | **b.** $-3$ | **c.** $\frac{1}{3}$ | **d.** $-\frac{1}{3}$ |

■ **Exemple 2.7** On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ dans un repère orthonormé, ainsi que deux de ses tangentes, au point E d'abscisse 2 et au point G d'abscisse 4. Les coordonnées des points E, F, G, H placés dans le repère ci-contre peuvent être lues graphiquement, ce sont des entiers. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E est la droite (EF). La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point G est la droite (GH). On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.




Quelle affirmation est vraie ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $f'(2) = 4$ | **b.** $f'(2) = 3$ | **c.** $f'(4) = 3$ | **d.** $f'(4) = -3$ |

■ **Exemple 2.8** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 4x + 5$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de $g$ dans un repère orthonormé au point d'abscisse $-1$ est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $y = 8x + 7$ | **b.** $y = -7x + 1$ | **c.** $y = -x + 7$ | **d.** $x = -0,5$ |

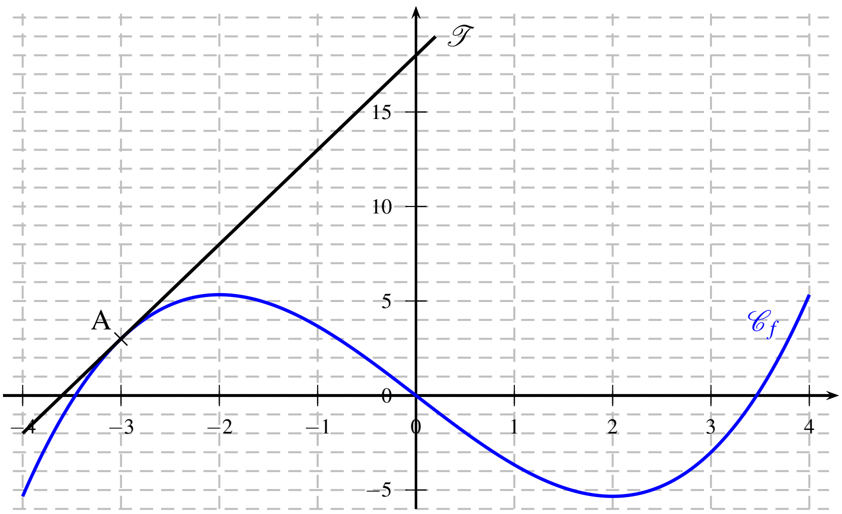
■ **Exemple 2.9** On considère une fonction $f$ dont le tableau de variations est :

| $x$ | $-10$ | | $-2$ | | $3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $3$ |

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** 0 | **b.** 3 | **c.** 4 | **d.** 10. |

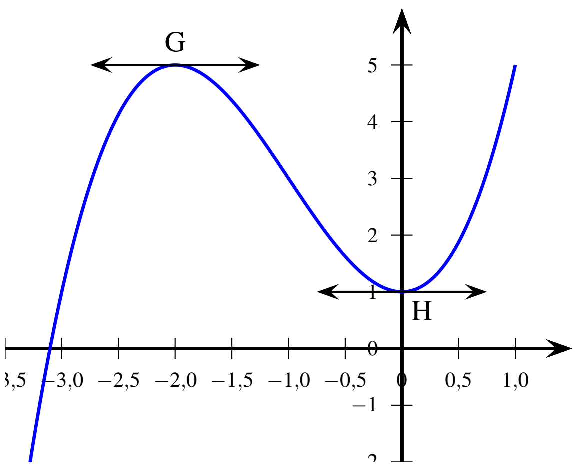
■ **Exemple 2.10** On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$. Cette courbe a une tangente $\mathscr{T}$ au point $A(-3\ ;\ 3)$.




L'équation réduite de cette tangente est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $y = \frac{1}{5}x - 3{,}7$ | **b.** $y = \frac{1}{5}x + 18$ | **c.** $y = 5x + 18$ | **d.** $y = 5x - 3{,}7$. |

■ **Exemple 2.11** La courbe ci-dessous représente une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les tangentes à la courbe aux points G$(-2\ ;\ 5)$ et H$(0\ ;\ 1)$ sont horizontales.

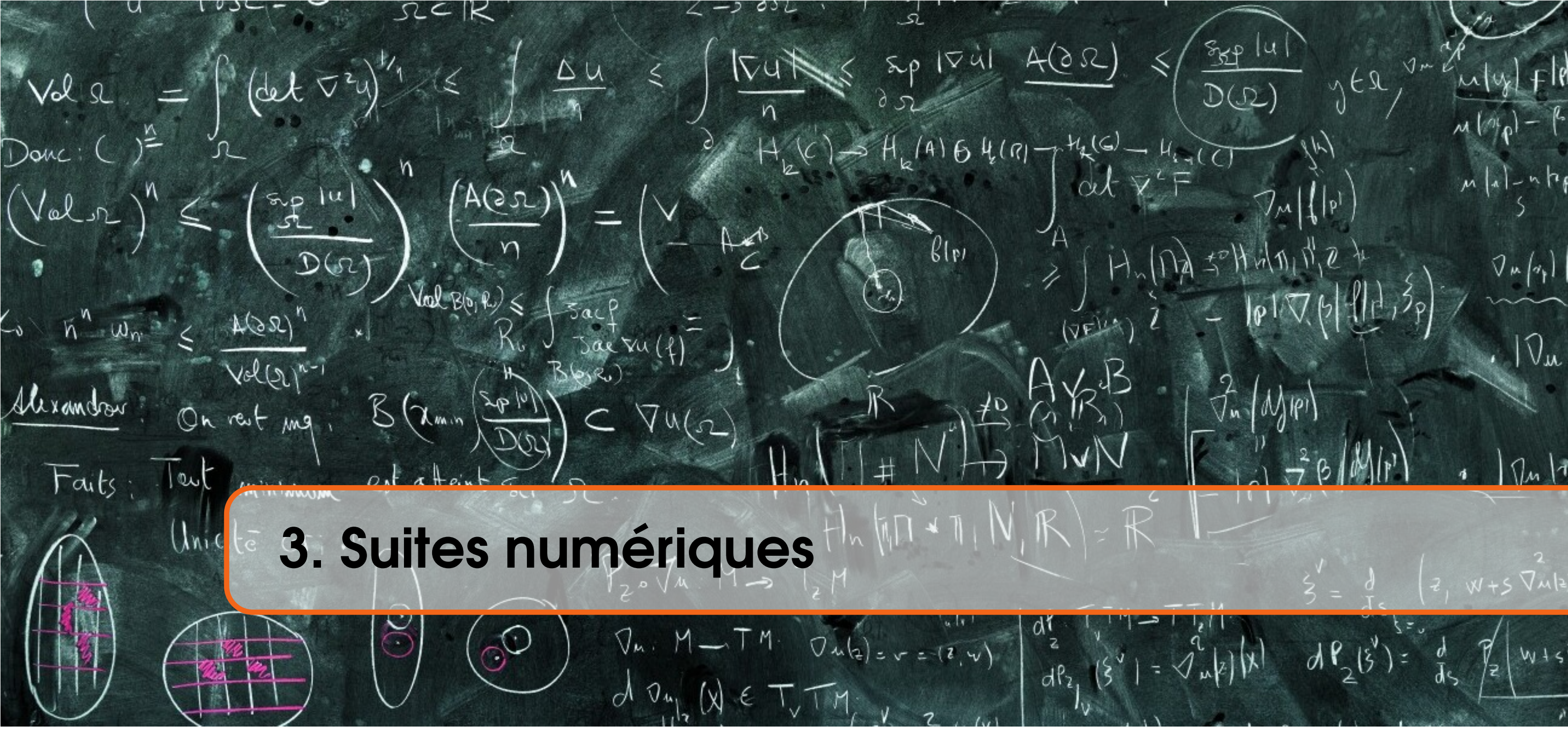



Déterminer $f(0)$, $f(-2)$, $f'(0)$ et $f'(-2)$.

■ **Exemple 2.12** Des pucerons envahissent une roseraie. On introduit alors des coccinelles, prédatrices des pucerons, à l'instant $t = 0$, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de pucerons à partir de cet instant et sur une période de 20 jours. Dans le repère ci-dessous, on a tracé :

- La courbe $\mathscr{C}$ représentant le nombre de milliers de pucerons en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles.
- La tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par les points A(0 ; 2,1) et B(2 ; 4,3).


1. Déterminer par lecture graphique le nombre de pucerons à l'instant où l'on introduit les coccinelles puis le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours.
2. On assimile la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t$ au nombre dérivé $f'(t)$. Déterminer graphiquement la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t = 0$.



# 3. Suites numériques

## 3.1 Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

**Définition 3.1** Une *suite numérique* est une fonction $u$ définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels).

**Définition 3.2** Une suite $u$ est définie *explicitement* lorsque l'on a une formule de calcul, appelée *terme général de u*, qui permet de calculer n'importe quel terme, en fonction de $n$.

**R** Avec une suite définie explicitement, on peut calculer n'importe quel terme, facilement et directement. Le risque d'erreur dans les calculs est très limité !

■ **Exemple 3.1** On définit la suite $u$ par $u_n = \frac{2}{3}n - \frac{4}{3}$. Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_{12}$.

**Définition 3.3** Une suite $u$ est définie *par récurrence* lorsque l'on dispose de la valeur d'un terme (par exemple $u_0$) et d'une formule de calcul, appelée *relation de récurrence de u*, qui permet de calculer un terme à partir de son prédécesseur.

**R** Avec une suite définie par récurrence, attention à ne pas faire d'erreurs dans les calculs : si l'on se trompe sur le calcul d'un terme, alors tous les termes suivants risquent d'être erronés !

■ **Exemple 3.2** On définit la suite $u$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n$ par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$. Calculer $u_2$.

■ **Exemple 3.3** On définit la suite $u$ par $u_0 = 100$ et pour tout entier $n$ par $u_{n+1} = \frac{u_n}{10}$. Calculer $u_3$.

## 3.2 Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

**Définition 3.4** On dira qu'une suite $u$ est *monotone* si on est dans un des cas suivants :

1. $u$ est *croissante* c'est-à-dire si, pour tout entier $n$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. $u$ est *décroissante* c'est-à-dire si, pour tout entier $n$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

R Pour étudier le sens de variation d'une suite, on calculera généralement le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si elle est positive (resp. négative), alors $u$ est croissante (resp. décroissante).

■ **Exemple 3.4** Démontrer que la suite définie par $u_n = 7n - 6$ est croissante.

■ **Exemple 3.5** Démontrer que la suite définie par $v_n = 2n^2 + 6n - 4$ est croissante.

■ **Exemple 3.6** Démontrer que la suite définie par $w_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est décroissante.

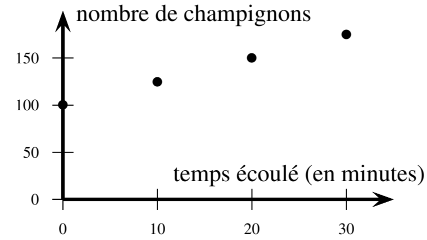
■ **Exemple 3.7** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour qu'une suite affine, définie par $w_n = an + b$, soit croissante.

## 3.3 Mise en application : des exercices-types bilans

■ **Exemple 3.8** On étudie la croissance d'une population de champignons.

**Partie A** – Au début de l'expérience, on dispose de 100 champignons. Toutes les dix minutes, on mesure l'évolution de leur nombre. On obtient les résultats suivants.

| Temps écoulé (en minutes) | Nombre de champignons |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 10 | 125 |
| 20 | 150 |
| 30 | 175 |




Soit $n$ un entier naturel. On note $u_n$ le nombre de champignons après $n$ périodes de dix minutes. Ainsi $u_0 = 100$, $u_1 = 125, u_2 = 150, \ldots$

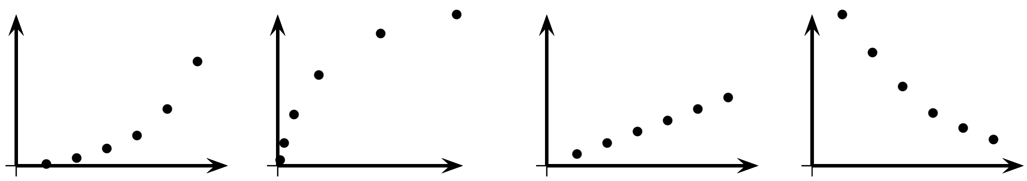
1. Justifier que les termes $u_0$, $u_1$ $u_2$, $u_3$ sont en progression arithmétique, c'est-à-dire que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant, ou en soustrayant, toujours un même nombre réel.
2. En supposant que la population de champignons continue d'évoluer selon le même rythme, montrer qu'elle aura quadruplé deux heures après le début de l'expérience.

**Partie B** – En réalité, on constate que la population de champignons a quadruplé 80 minutes après le début de l'expérience. De nouvelles mesures donnent les résultats suivants.

| Temps écoulé (en minutes) | Nombre de champignons |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 40 | 200 |
| 80 | 400 |
| 120 | 800 |

Soit $n$ un entier naturel. On note $v_n$ le nombre de champignons, après $n$ périodes de **quarante** minutes. Ainsi $v_0 = 100, v_1 = 200, v_2 = 400...$

1. Montrer que les termes $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$ sont en progression géométrique, c'est-à-dire que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant, ou en divisant, toujours par un même nombre réel non nul.
2. On suppose que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2.
   Indiquer sans justifier lequel des 4 graphiques ci-dessous est susceptible de représenter la suite $(v_n)$.



Graphique 1 Graphique 2 Graphique 3 Graphique 4

3. Quel sera le nombre de champignons quatre heures après le début de l'expérience ?
4. Cinq heures après le début de l'expérience, on dénombre environ 18000 champignons. Est-ce cohérent avec le modèle choisi ?

| Aide au calcul |
|---|
| $2^6 = 64$ |
| $2^7 = 128$ |
| $2^8 = 256$ |
| $2^9 = 512$ |
| $2^{10} = 1024$ |

■ **Exemple 3.9** Victor sort un plat du four. La température du plat est alors égale à 180 °C. Il place ce plat dans une pièce dont la température est égale à 25 °C. Le plat refroidit. Le plat ne pourra être servi que lorsque sa température sera devenue inférieure ou égale à 40 °C. On étudie le refroidissement du plat selon deux modèles mathématiques.

**Partie A : Premier modèle** – On suppose que la baisse de la température du plat est *proportionnelle* à la durée du refroidissement, c'est-à-dire au nombre de minutes écoulées depuis la sortie du four.

On constate que 3 minutes après la sortie du four, la température du plat est égale à 105 $°C$.

1. De combien de degrés le plat a-t-il baissé en 3 minutes ? En 1 minute ?
2. Vérifier que la température du plat, 5 minutes après la sortie du four, est égale à 55 $°C$.
3. Selon ce modèle, quelle serait la température du plat, 8 minutes après la sortie du four ? Ce premier modèle semble-t-il pertinent ?

**Partie B : Second modèle** – On dispose toujours des données suivantes :

— La température de la pièce est égale à 25 °C.
— La température du plat à la sortie du four est égale à 180 °C.
— La température du plat, 3 minutes après la sortie du four, est égale à 105 °C.

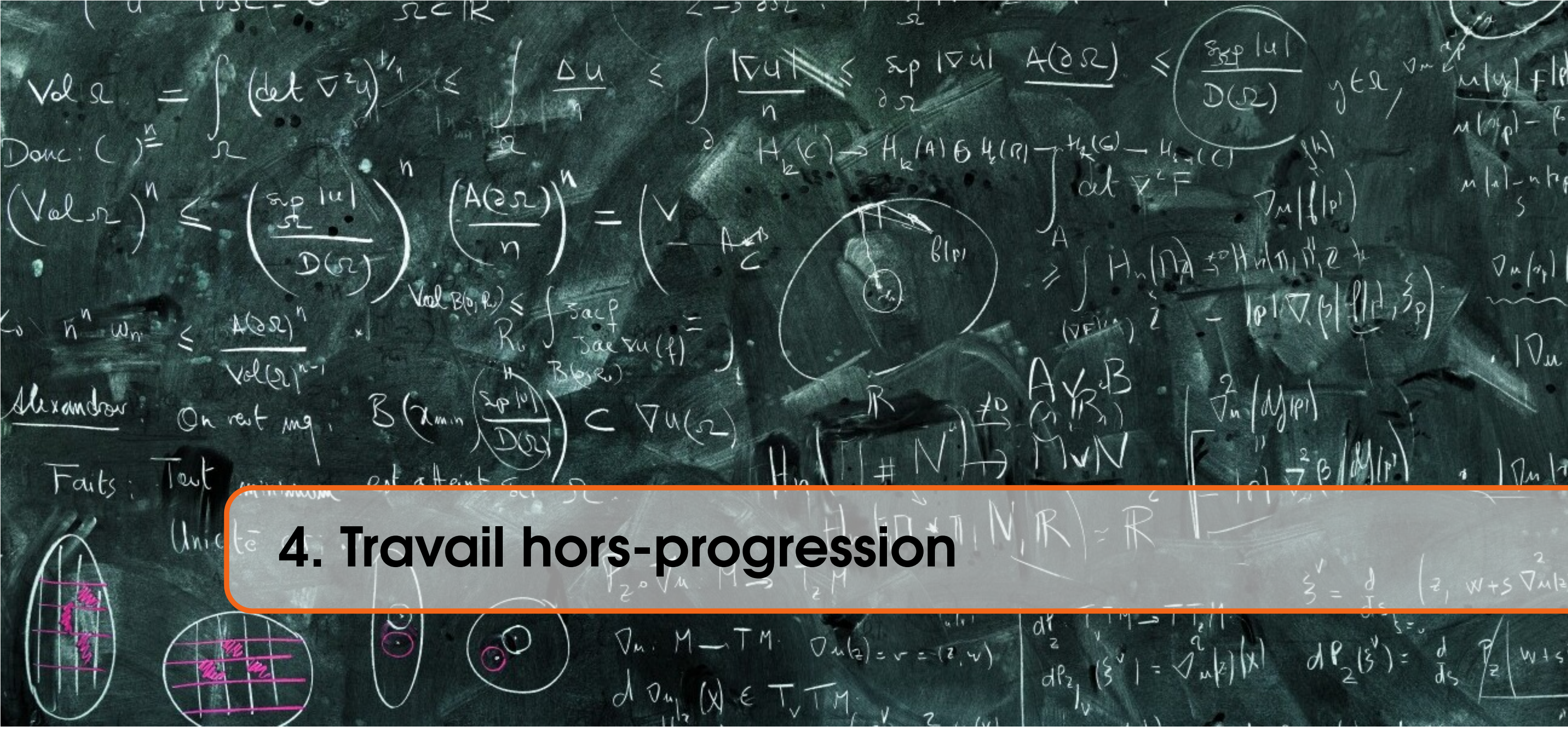
Pour tout entier naturel $n$ on note $U_n$, la différence entre la température du plat et la température de la pièce, $n$ minutes après la sortie du four.

*Exemple* : 3 minutes après la sortie du four, l'écart avec la température de la pièce est égal à $105 - 25 = 80$. On a donc $U_3 = 80$.

1. Justifier que $U_0 = 155$.
2. On suppose que, chaque minute, la différence $U_n$ diminue de 20 %.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a $U_{n+1} = 0,8U_n$.
   b. Exprimer $U_n$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$.
   c. On dispose des données suivantes :

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_n$ arrondi à $10^{-1}$ | 80 | 64 | 51,2 | 41 | 32,8 | 26,2 | 21 | 16,8 | 13,4 | 10,7 | 8,6 | 6,9 | 5,5 |

   Au bout de combien de minutes, Victor pourra-t-il servir le plat ?



# 4. Travail hors-progression

## 4.1 Pour travailler vos automatismes.

| | MathALEA | MathsMentales | MathsAuQuotidien |
|---|---|---|---|
| **Accès direct au site** | | | |

## 4.2 Pour vous entraîner sur des sujets zéros.

Il existe actuellement deux sujets-type, et leurs corrigés.

| | Sujet 1 | Sujet 2 |
|---|---|---|
| **Énoncé** | | |
| **Corrigé** | | |