Mathématiques

Première Générale – Enseignement de Spécialité

Kevin Cauvin

Quatrième impression, Juin 2025

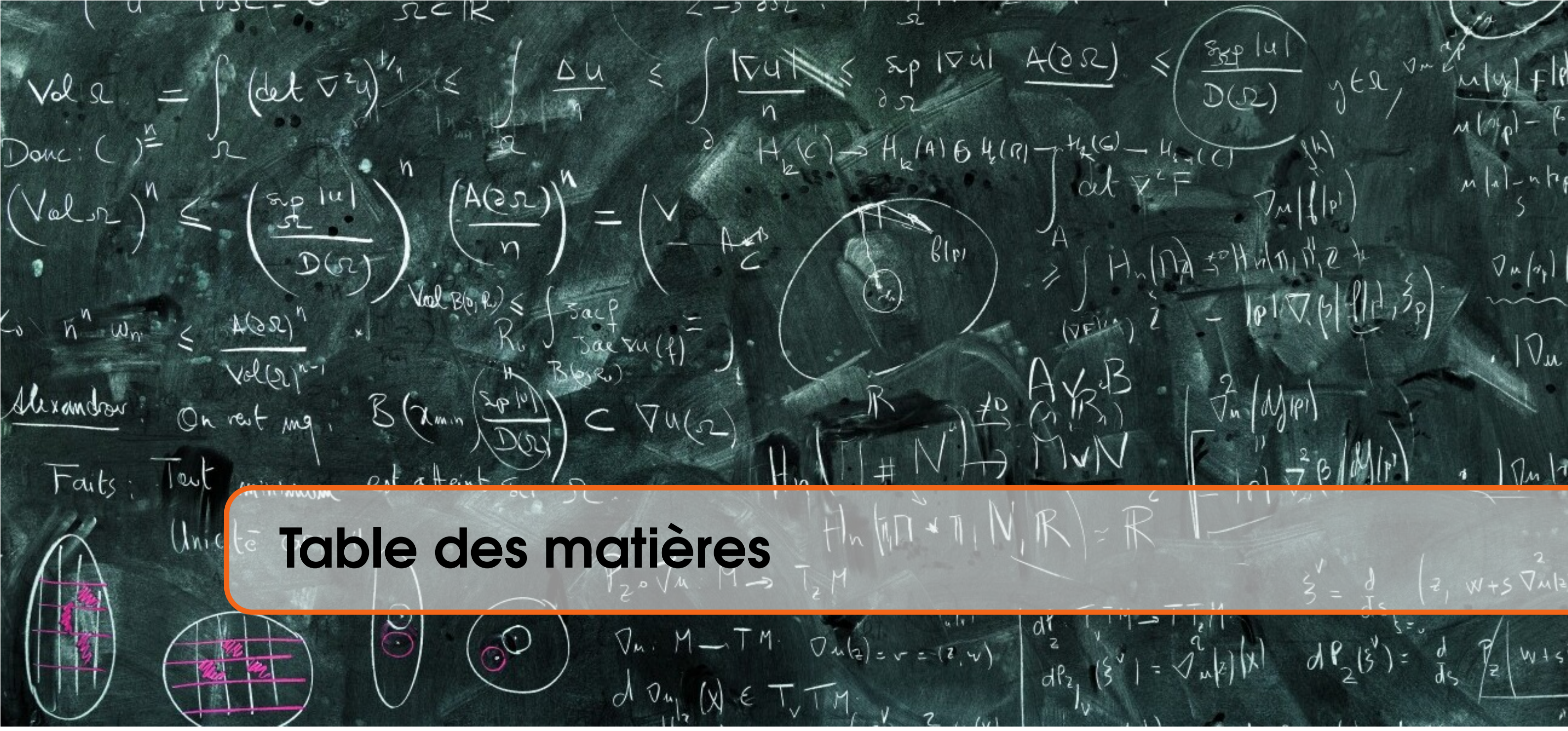
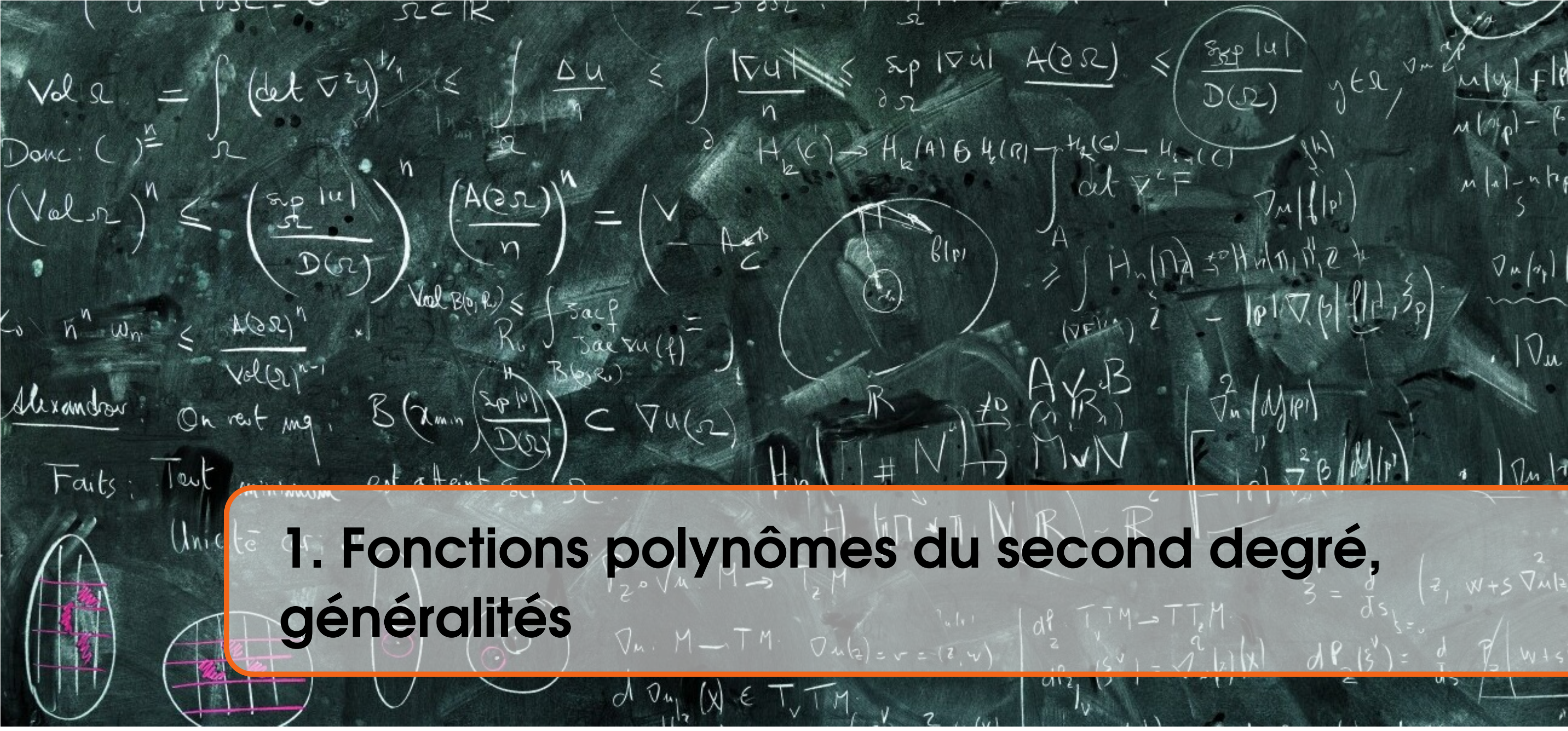


Table des matières

I Analyse réelle (fonctions)

IV Probabilités et Statistiques

Analyse réelle (fonctions)



1. Fonctions polynômes du second degré, généralités

1.1 Définition, exemples et contre-exemples

Définition 1.1 Une *fonction polynôme du second degré*, ou *fonction trinôme*, est une fonction f définie par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels, avec $a \neq 0$.

■ **Exemple 1.1** On donne ci-dessous une liste d'expression de fonctions. Pour celles qui sont du second degré, indiquer les valeurs des coefficients a, b et c. Pour celles qui ne sont pas du second degré, expliquer brièvement pourquoi.

1. $f_1(x) = 3x - 7$: ....
2. $f_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$: ....
3. $f_3(x) = -6x^2 + 8$: ....
4. $f_4(x) = x(x-2)$: ....
5. $f_5(x) = -11x - 2x^2$: ....
6. $f_6(x) = x^6 + 1$: ....

1.2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Proposition 1.1 Toute fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous une forme, appelée *forme canonique*, du type :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

■ **Démonstration 1.1** Si f est une fonction polynôme du second degré, elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. D'où :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c && \text{(en factorisant les termes en } x \text{ par } a \neq 0\text{)} \\
&= a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && \text{(en faisant apparaître le début de l'IR1)} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && \text{(on reconnaît l'IR1)}
\end{aligned}$$

En développant le terme a sur le crochet, on obtient que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c && \text{(en distribuant le carré)} \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c && \text{(en simplifiant par } a\text{)} \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} && \text{(en réduisant au même dénominateur)}
\end{aligned}$$

On obtient donc la forme que l'on souhaitait, en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = f(\alpha)$. ■

■ **Exemple 1.2** Compléter les pointillés suivants pour déterminer la forme canonique du trinôme défini par $f(x) = -2x^2 + 12x - 25$.

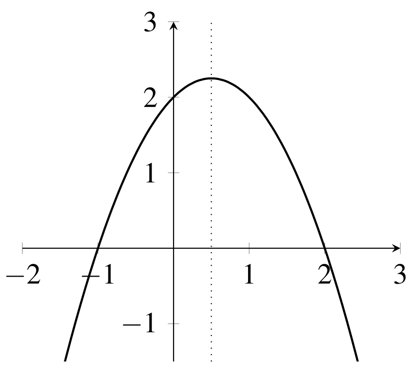
$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 + 12x - 25 \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \text{(en factorisant les termes en } x \text{ par } a \neq 0\text{)} \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \text{(en faisant apparaître le début de l'IR1)} \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \text{(on reconnaît l'IR1)} \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \text{(en développant le terme } a \text{ sur le crochet)} \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \text{(en simplifiant)}
\end{aligned}$$

1.3 Sens de variation, représentation graphique

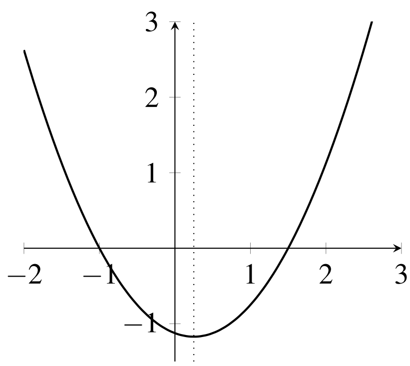
Proposition 1.2 La courbe représentant une fonction du second degré s'appelle une *parabole*, et admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

— On dit qu'elle est « *tournée vers le bas* » si $a < 0$. Dans ce cas :
  1. f est croissante, puis décroissante.
  2. Le *sommet* correspond à un maximum, qui vaut β, et atteint en $x = \alpha$.

— On dit qu'elle est « *tournée vers le haut* » si $a > 0$. Dans ce cas :
  1. f est décroissante, puis croissante.
  2. Le *sommet* correspond à un minimum, qui vaut β, et atteint en $x = \alpha$.

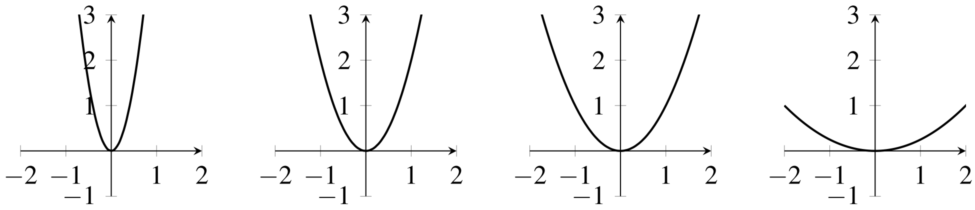


$a < 0$



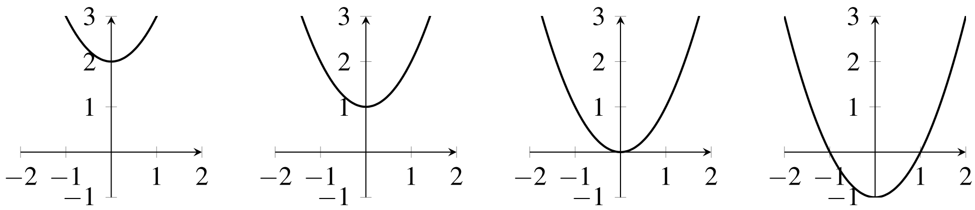
$a > 0$

R La valeur de a influe l'« écartement » de la courbe autour de l'axe des ordonnées.



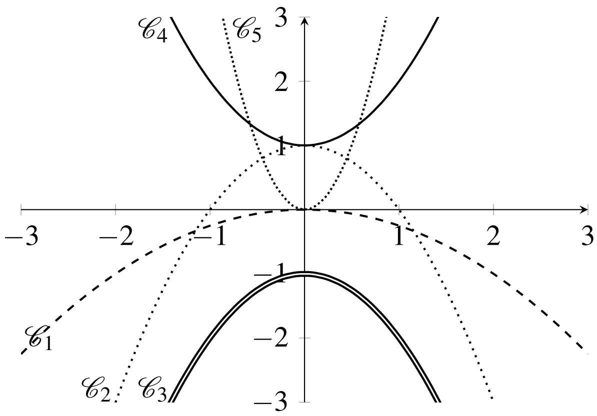
$6x^2$ $2x^2$ x^2 $0,25x^2$

R La valeur de c influe l'intersection de la courbe sur l'axe des ordonnées.



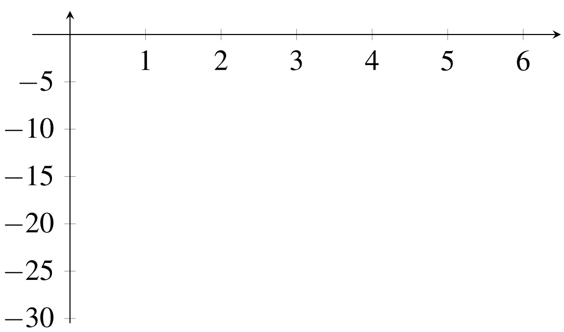
x^2+2 x^2+1 x^2 x^2-1

■ **Exemple 1.3** Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.

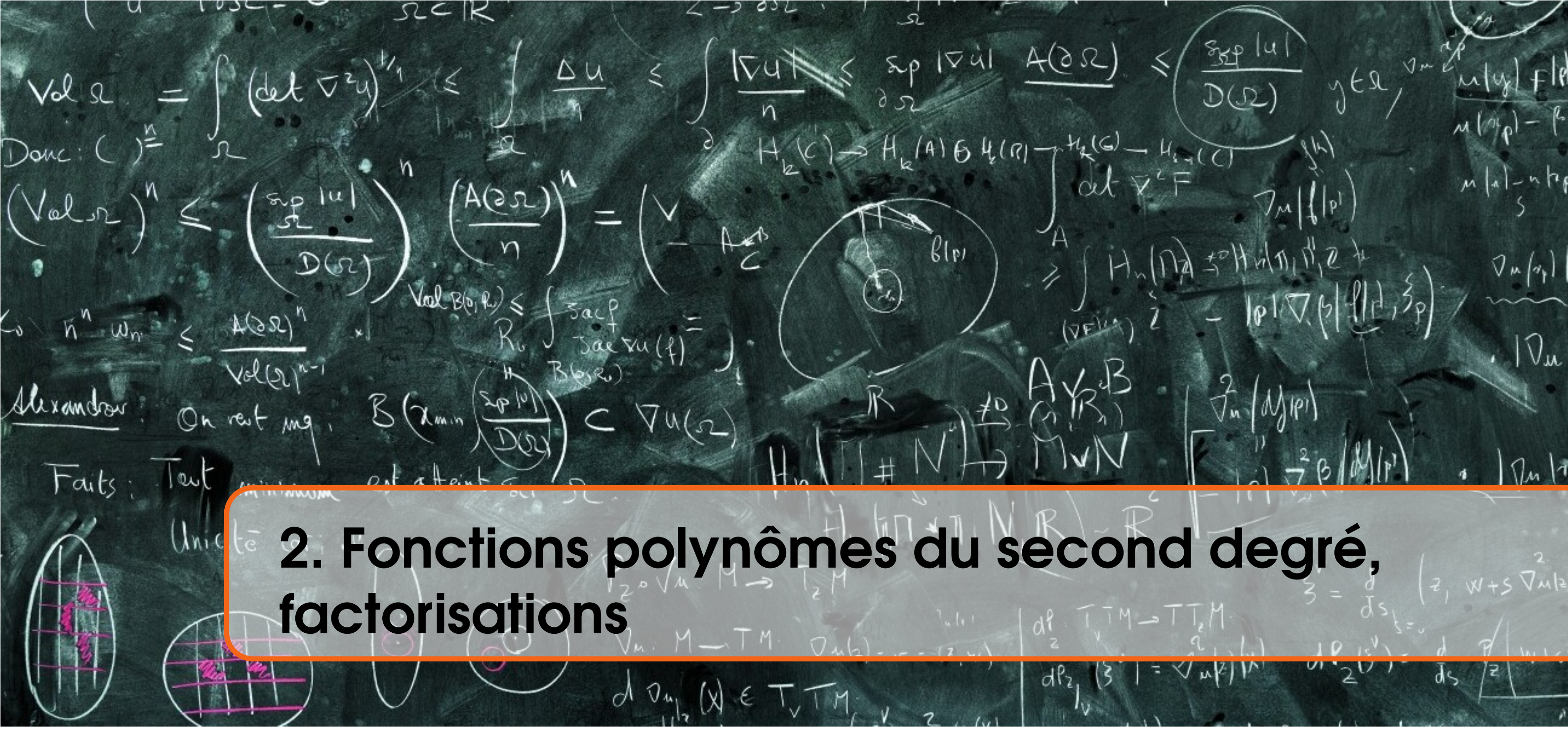


1. $f(x) = -x^2 - 1$ est associée à $\mathscr{C}_{\ldots}$
   ....
2. $g(x) = -0,25x^2$ est associée à $\mathscr{C}_{\ldots}$
   ....
3. $h(x) = x^2 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{\ldots}$
   ....
4. $i(x) = 4x^2$ est associée à $\mathscr{C}_{\ldots}$
   ....
5. $j(x) = -x^2 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{\ldots}$
   ....

■ **Exemple 1.4** Reprenons le trinôme de l'exemple 1.2, défini par $f(x) = -2x^2 + 12x - 25$. Déterminer le sommet de la parabole de f, puis l'équation de son axe de symétrie. Tracer ensuite, dans le repère ci-dessous, l'allure de la courbe de f, à main levée.



Votre réponse :



2. Fonctions polynômes du second degré, factorisations

2.1 Équations du second degré, discriminant

Définition 2.1 Une *équation du second degré* est de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$.

Définition 2.2 Le *discriminant* du trinôme ax^2+bx+c est le nombre réel $\Delta = b^2-4ac$.

Proposition 2.1 On considère une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

Démonstration 2.1 On a déjà prouvé qu'une fonction trinôme de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$, possédait la forme canonique suivante :

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

L'équation $f(x) = 0$ peut donc ainsi se réécrire :

$$\begin{aligned}
& a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0 & \\
\iff & a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 & \text{(par définition de } \Delta) \\
\iff & a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} & \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} & \text{(en divisant par } a \neq 0)
\end{aligned}$$

1. Si $\Delta < 0$, cette dernière équation n'admet aucune solution réelle, puisque l'on aurait un nombre positif égal à un nombre strictement négatif.
2. Si $\Delta = 0$, cette dernière équation se réécrit $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Il vient donc nécessairement que $x+\dfrac{b}{2a} = 0$, donc l'équation admet une unique solution $x = \dfrac{-b}{2a}$.

3. Si $\Delta > 0$, cette dernière équation se réécrit $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Elle admet donc deux solutions distinctes :

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Longleftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

■

■ **Exemple 2.1** Résoudre les équations du second degré suivantes.

1. $x^2+x+1=0$.
2. $x^2-5x+6=0$.
3. $3x^2+42x+147=0$.

Définition 2.3 Si f est une fonction du second degré exprimée sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées *racines de* f. Elles correspondent aux abscisses des points d'intersection de f avec l'axe des abscisses.

Proposition 2.2 Si f est une fonction du second degré exprimée sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, le produit de ses racines est $p = \dfrac{c}{a}$ et la somme de ses racines est $s = -\dfrac{b}{a}$.

■ **Exemple 2.2** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+16x-17$.

1. Vérifier rapidement que 1 est racine de f.
2. À l'aide de la proposition précédente, en déduire la valeur de l'autre racine de f.

2.2 Forme factorisée, signe d'un polynôme du second degré

Proposition 2.3 On considère une fonction du second degré dont l'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et Δ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, la *forme factorisée* de f est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, et son tableau de signes est :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

2. Si $\Delta = 0$, la *forme factorisée* de f est $f(x) = a(x - x_0)^2$, et son tableau de signes est :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

3. Si $\Delta < 0$, l'expression de f ne peut pas se factoriser, et son tableau de signes est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

R Les tableaux de signes précédents se résument à l'aide de cette phrase : « *Une fonction du second degré est toujours du signe de a, sauf entre ses éventuelles racines.* »

■ **Exemple 2.3** Factoriser le trinôme $x^2 - 4x + 1$, puis dresser son tableau de signes.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

■ **Exemple 2.4** Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 5 < x + 3$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

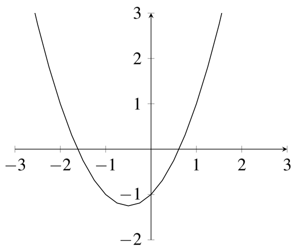
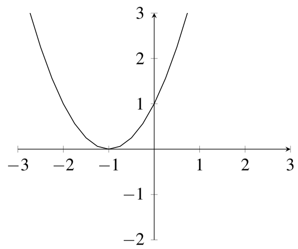
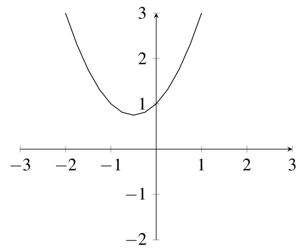
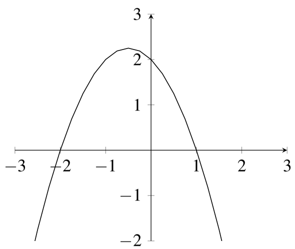
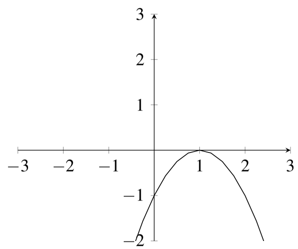
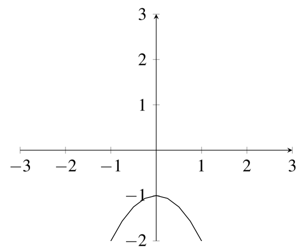
. . . .

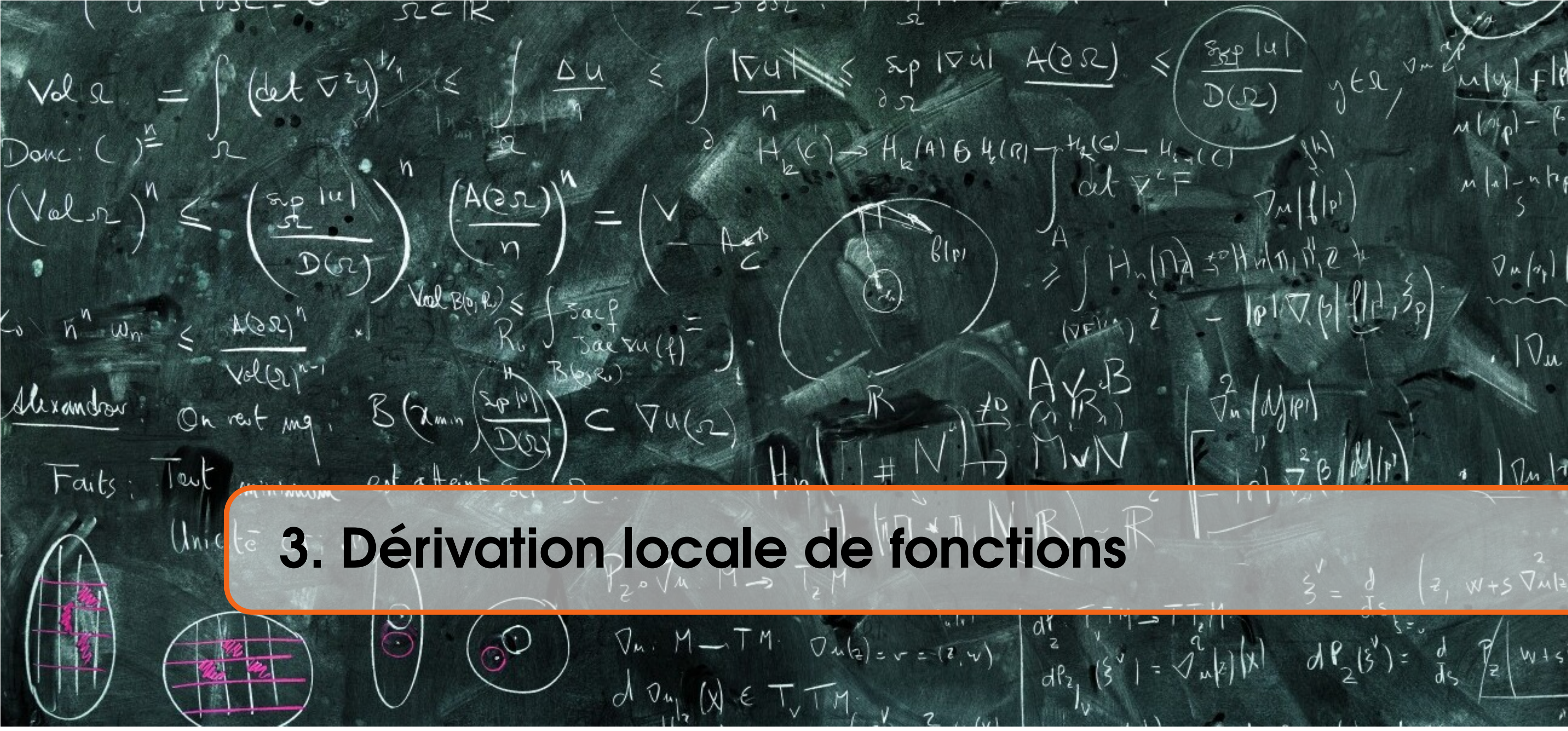
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines du polynôme	Deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Une seule racine : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	Pas de racine réelle.
Factorisation	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	$f(x) = a(x-x_0)^2$	Pas de factorisation.
Allure de la parabole représentant f **(si** $a > 0$**)**			
Allure de la parabole représentant f **(si** $a < 0$**)**			
Tableau de signes du polynôme	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & x_1 & & x_2 & +\infty \\ \hline f(x) & \mathrm{sgn}(a) & 0 & \mathrm{sgn}(-a) & 0 & \mathrm{sgn}(a) \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & x_0 & +\infty \\ \hline f(x) & \mathrm{sgn}(a) & 0 & \mathrm{sgn}(a) \end{array}$	$\begin{array}{c\|cc} x & -\infty & +\infty \\ \hline f(x) & \mathrm{sgn}(a) & \end{array}$



3. Dérivation locale de fonctions

3.1 Limite d'une fonction en un nombre réel

■ **Exemple 3.1** On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

   ....

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-0,1$	$-0,01$	0	$0,01$	$0,1$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de 0, $f(x)$ prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

   ....

   ....

■ **Exemple 3.2** On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$.

   ....

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$1,9$	$1,99$	2	$2,01$	$2,1$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de 2, $f(x)$ prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

   ....

   ....

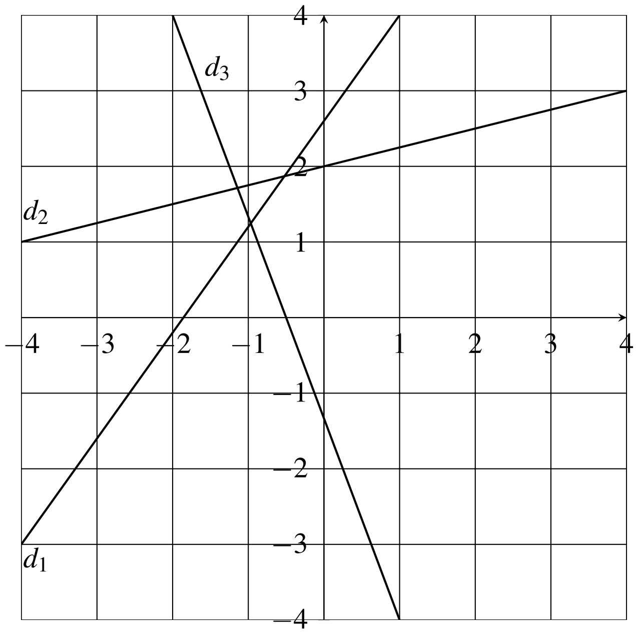
3.2 Nombre dérivé

Proposition 3.1 — Rappel. Le coefficient directeur d'une droite passant par $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

■ **Exemple 3.3** Déterminer les coefficients directeurs, puis les équations des droites tracées ci-dessous.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

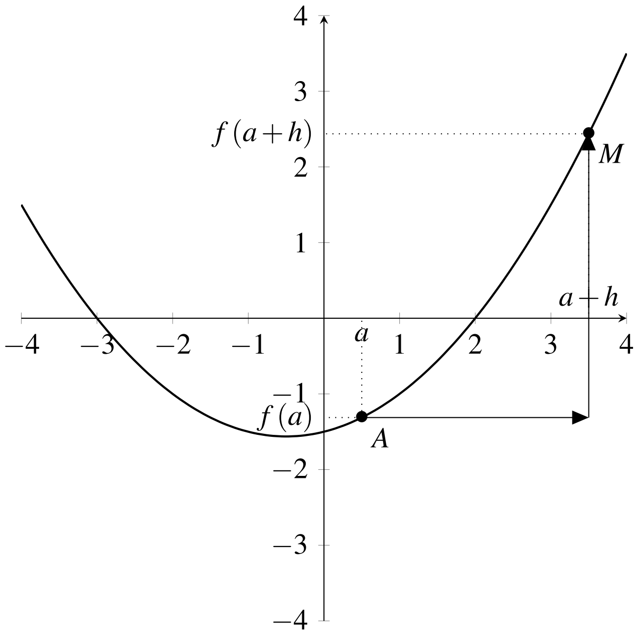


On considère une fonction f définie sur un certain intervalle. Sur sa courbe représentative, on note A un point d'abscisse a et M un point d'abscisse $a+h$.
D'après la sous-section précédente, le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On cherche à évaluer la « pente » de la courbe au niveau du point d'abscisse a. Pour cela, on va essayer de « rapprocher » le point M du point A. Pour cela, on cherche à ce que h prenne des valeurs de plus en plus proche de 0. Dans ce cas, le coefficient directeur de la droite (AM) est donné par :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Définition 3.1 Lorsqu'il existe, le *nombre dérivé de f en a* est le nombre ainsi défini :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

■ **Exemple 3.4** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 2$.

1. Soit h un nombre réel. Montrer que $f(1+h) - f(1) = h^2 + 8h$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. En déduire la valeur du nombre dérivé de f en 1, noté $f'(1)$.

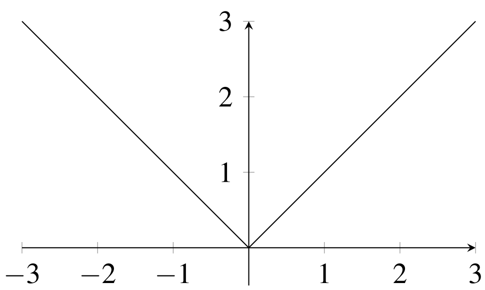
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

R Il est possible que l'on ne puisse pas trouver de nombre dérivé, dans certains cas particuliers. C'est notamment le cas de la fonction valeur absolue qui n'admet pas de nombre dérivé en 0. C'est le but du reste de cette section.

Définition 3.2 On rappelle que la fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$$

Sa courbe est donnée ci-contre.



■ **Exemple 3.5** Calculer la valeur exacte des nombres suivants, de tête. *Pour les expressions comportant une variable x, on supposera que x est un nombre réel quelconque.*

1. $\lvert 6\rvert =$	3. $\lvert 2\pi\rvert =$	5. $\lvert 0\rvert =$	7. $\lvert -x^2\rvert =$ ....
2. $\lvert 3-8\rvert =$	4. $\lvert x^2+1\rvert =$ ...	6. $\lvert 2\pi-2\rvert =$ ..	8. $\lvert \pi-10\rvert =$ ..

Proposition 3.2 La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

■ **Démonstration 3.1** On note f la fonction valeur absolue, définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$. Calculons le taux d'accroissement de f en 0. Pour cela, si h est un nombre réel, on a :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

On raisonne par disjonction de cas :

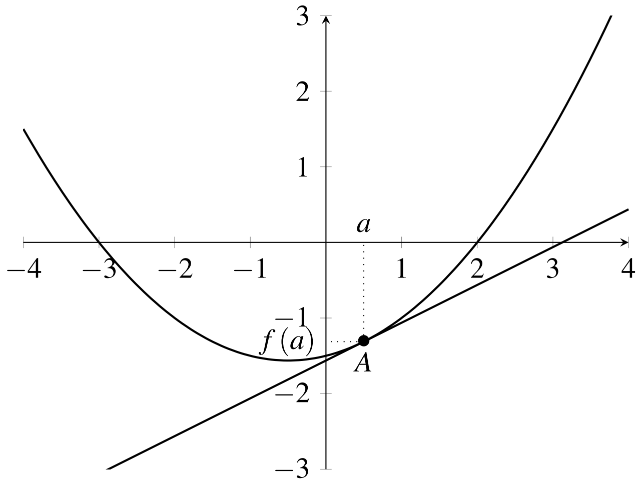
— Si $h \geq 0$, alors $|h| = h$ et le taux d'accroissement précédent se simplifie en $\frac{h}{h} = 1$.

— Si $h \leq 0$, alors $|h| = -h$ et le taux d'accroissement précédent se simplifie en $\frac{-h}{h} = -1$.

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ n'existe pas, puisque la limite ne peut pas être égale à la fois à -1 et à 1.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0. En revanche, on peut reprendre la même démonstration pour prouver qu'elle est dérivable en tout point $x \neq 0$. ■

3.3 Tangente à une courbe en un point

On considère une fonction f définie sur un certain intervalle. Sur sa courbe représentative, on note A un point d'abscisse a.



Définition 3.3 La *tangente à la courbe représentant f en a* est la droite passant par A et dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$. Elle « épouse le plus possible la forme de la courbe au niveau de A ».

Proposition 3.3 Si f est une fonction, et a un nombre appartenant à l'ensemble de définition de f, l'équation de la tangente à la courbe représentant f en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration 3.2 On sait que la tangente à la courbe représentant f en a est une droite dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Son équation est donc de la forme :

$$y = f'(a)x + b$$

où b est un réel à déterminer correspondant à l'ordonnée à l'origine. Or, on sait que la tangente passe également par le point A, dont les coordonnées sont $(a\,;f(a))$. En remplaçant x par a et y par $f(a)$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$f(a) = f'(a)a + b$$

Autrement dit, on obtient $b = f(a) - f'(a)a$. En remplaçant b par cette expression dans l'équation de la tangente, on obtient :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a)$$

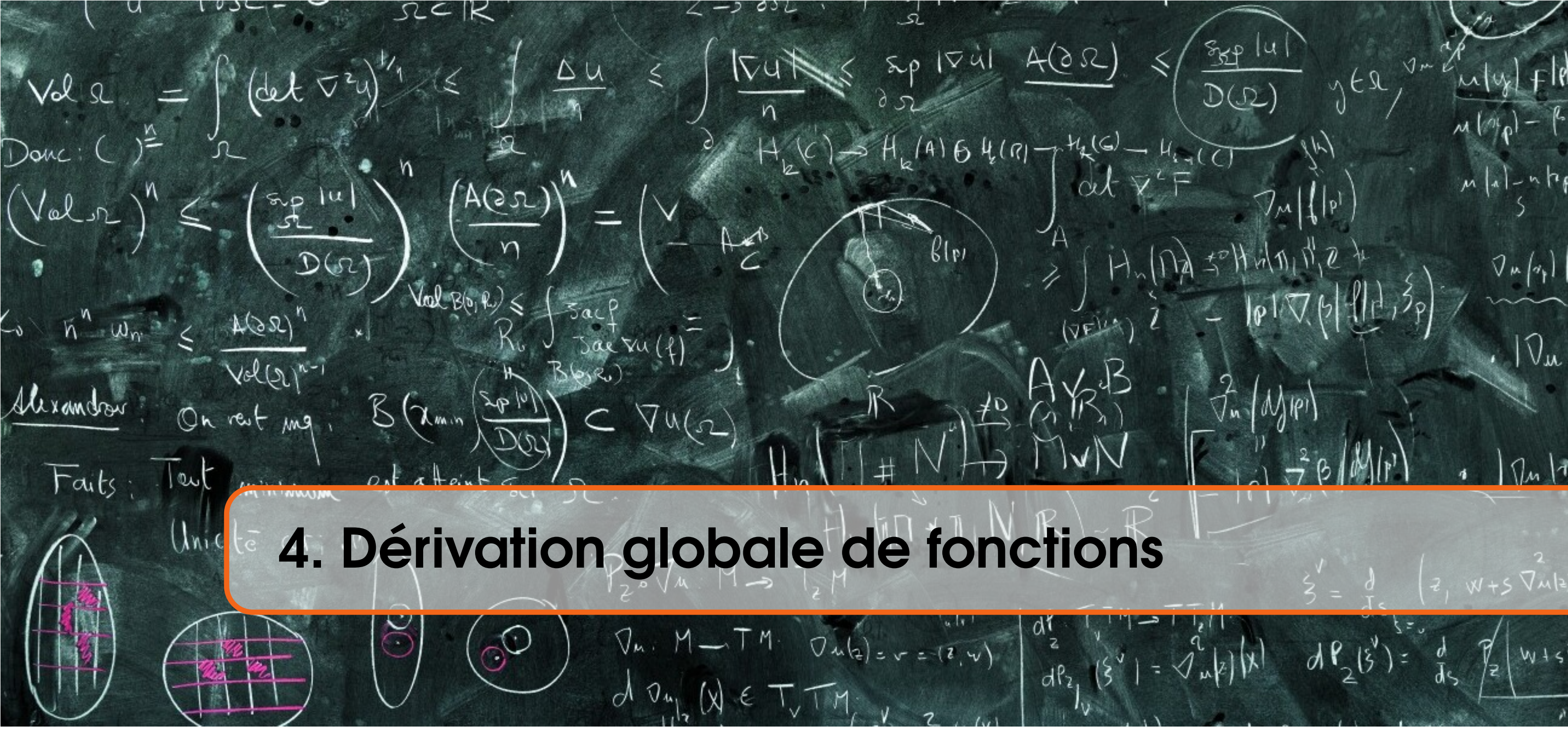
La dernière égalité étant obtenue en factorisant par $f'(a)$. ■

Exemple 3.6 Sur le graphe ci-dessus, on a tracé la courbe d'une certaine fonction f, ainsi que sa tangente au point A d'abscisse $0,5$. Par la lecture graphique, avec la meilleure précision possible, estimer les valeurs de $f(0,5)$ et de $f'(0,5)$. En déduire une équation de la tangente en ce point.

....
....
....
....

Exemple 3.7 Reprenons le trinôme de l'exemple 3.4, défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1.

....
....
....
....



4. Dérivation globale de fonctions

4.1 Notion de fonction dérivée, premières opérations

Définition 4.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *dérivable* en $a \in I$ si le taux d'accroissement suivant admet une limite finie quand h tend vers 0 :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Cette limite, appelée *nombre dérivé de f en a*, est notée $f'(a)$. Si f est dérivable en tout $a \in I$, alors la fonction qui, à x, associe $f'(x)$, est appelée *fonction dérivée* de f sur I.

Proposition 4.1 Le tableau suivant donne les principales dérivées à connaître.

Fonction	Dérivée
$f(x) = \text{Constante}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

■ **Démonstration 4.1** Démontrons ici que la fonction carrée, définie par $f(x) = x^2$, admet pour dérivée la fonction définie par $f'(x) = 2x$. Pour cela, calculons le nombre dérivé de la fonction f en un réel a, quelconque. Si $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a+h = 2a$. On a donc prouvé que, pour tout nombre réel a, le nombre dérivé de f en a est défini par $f'(a) = 2a$. ■

■ **Démonstration 4.2** Démontrons ici que la fonction racine carrée, définie par $f(x) = \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0. Pour cela, essayons de comprendre pourquoi le nombre dérivé de la fonction f en 0 n'existe pas. Si $h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. On a donc prouvé que le nombre dérivé de f en 0 n'existe pas. La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0. ■

■ **Exemple 4.1** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$: . . . .
2. $f(x) = 2x$: . . . .
3. $f(x) = -3x$: . . . .
4. $f(x) = 4x$: . . . .
5. $f(x) = -x^2$: . . . .
6. $f(x) = 3x^2$: . . . .
7. $f(x) = -x^3$: . . . .
8. $f(x) = 2x^3$: . . . .
9. $f(x) = -3x^2$: . . . .
10. $f(x) = -5x$: . . . .
11. $f(x) = 4x^2$: . . . .
12. $f(x) = 3x^3$: . . . .

■ **Exemple 4.2** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x+3$: . . . .
2. $f(x) = -1-4x$: . . . .
3. $f(x) = x^2+x+1$: . . . .
4. $f(x) = x^2+x+2$: . . . .
5. $f(x) = -3x^2-2x$: . . . .
6. $f(x) = -x^2+4x-6$: . . . .
7. $f(x) = -x^3+x-1$: . . . .
8. $f(x) = 2x^3+4x^2-5x+6$: . . . .
9. $f(x) = x^3+x^2+x+1$: . . . .
10. $f(x) = -5x^3-5x^2-6$: . . . .

R Dans l'exemple précédent, on a trouvé deux fonctions qui ont la même dérivée !

4.2 Dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée

Proposition 4.2 On donne, ci-dessous, la dérivée d'un produit, d'un quotient et d'une composée.

Fonction	Produit du type $u\times v$	Quotient du type $\dfrac{u}{v}$	Composée du type $u(ax+b)$
Dérivée	$u'v+uv'$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$au'(ax+b)$

■ **Exemple 4.3** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = (x^2+2)(3x-1)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

■ **Exemple 4.4** Déterminer la dérivée de la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x+4}{5x-3}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

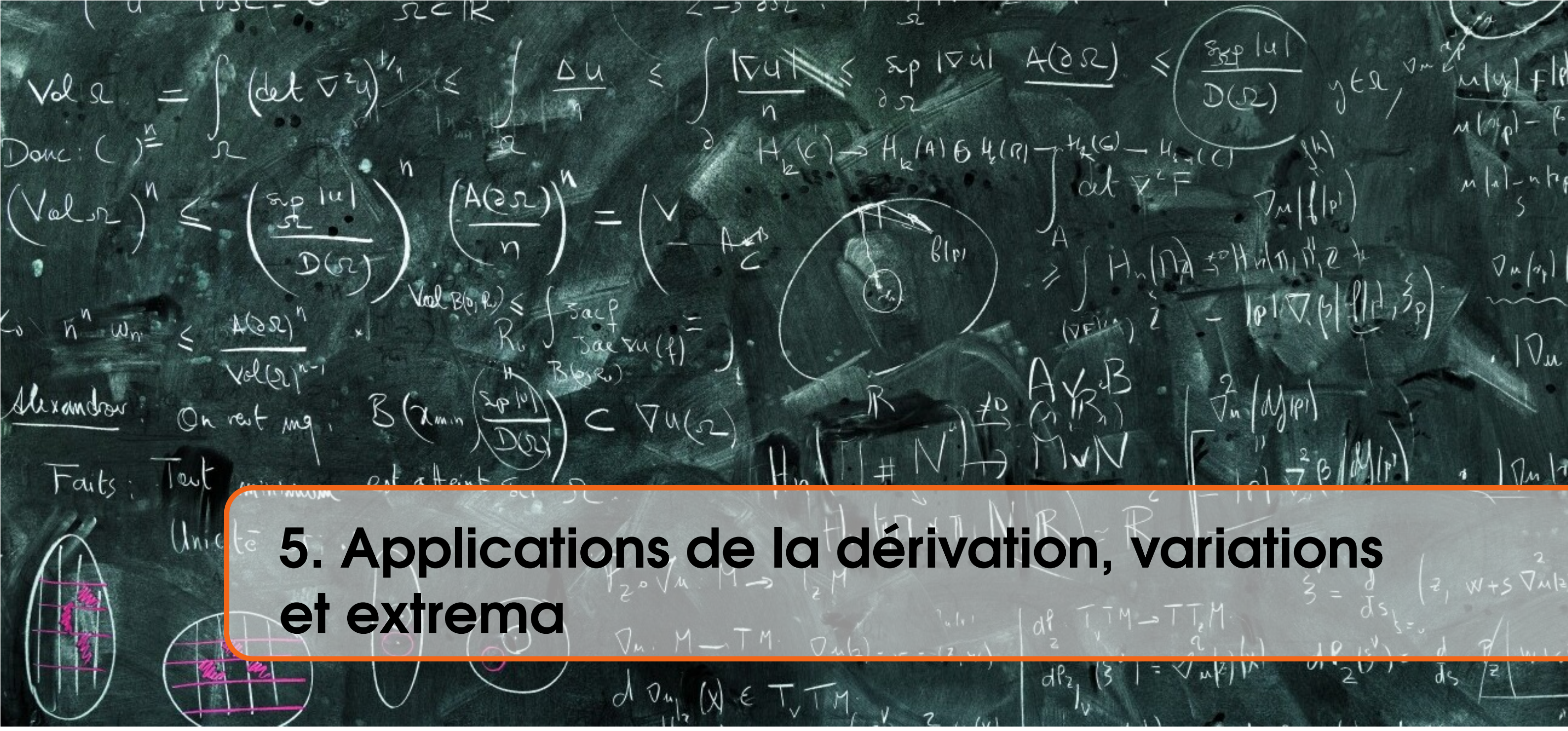
■ **Exemple 4.5** Déterminer les dérivées des fonctions définies par $h(x) = \sqrt{6-x}$ et $i(x) = (4x-9)^7$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

■ **Démonstration 4.3** Démontrons la formule donnant la dérivée d'un produit. Pour cela, on suppose qu'une fonction f s'écrit sous la forme $u \times v$. Calculons le nombre dérivé de la fonction $u \times v$ en un réel a, quelconque. Si $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h)-u(a))\,v(a+h)+u(a)\,(v(a+h)-v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{(v(a+h)-v(a))}{h}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$ par définition des nombres dérivés. De plus, $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} u(a+h) = u(a)$. Donc la limite cherchée est $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$. On a donc démontré la formule de dérivation d'un produit. ■



5. Applications de la dérivation, variations et extrema

5.1 Variations et extrema d'une fonction

Proposition 5.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
2. Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

R Si f est une fonction polynôme du second degré, sa dérivée f' est une fonction affine. On étudie son signe en résolvant une inéquation.

■ **Exemple 5.1** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f : ....
2. Étudier le signe de f', puis en déduire le tableau de variations de f.

....
....
....
....
....
....

R Si f est une fonction polynôme du troisième degré, sa dérivée f' est une fonction polynôme du second degré. On étudie son signe à l'aide du discriminant Δ vu dans le chapitre 3.

■ **Exemple 5.2** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée de g : ....
2. Étudier le signe de g', puis en déduire le tableau de variations de g.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

R Si f est une fonction du type $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (on dira que f est *homographique*), sa dérivée f' est du type $x \mapsto \dfrac{\text{Constante}}{(cx+d)^2}$. On étudie son signe à l'aide du signe de la constante présente au numérateur (puisque le dénominateur est de signe positif).

■ **Exemple 5.3** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de h : ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Étudier le signe de h', puis en déduire le tableau de variations de h.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Proposition 5.2 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors α est un *extremum* (*maximum* ou *minimum*) de f sur I.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

β est le *maximum* de f, atteint en $x = \alpha$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

β est le *minimum* de f, atteint en $x = \alpha$.

■ **Exemple 5.4** Déterminer si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$ admet un extremum. Préciser la nature de cet extremum (minimum ou maximum).

....
....
....
....
....
....

5.2 Applications de la recherche de variations et d'extrema

R Lorsque le signe d'une fonction f n'est pas évident, on peut dans un premier temps construire son tableau de variations (à l'aide du calcul de sa dérivée f', puis de l'étude du signe de f'). Une fois que celui-ci est construit, la valeur des images spécifiées dans la dernière ligne peut nous donner des indications sur le signe de f.

■ **Exemple 5.5** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x - x^3$.

1. Calculer la valeur de $f(1)$: ....
2. Déterminer la fonction dérivée de f : ....
3. Étudier le signe de f', puis en déduire le tableau de variations de f.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
4. Déduire des questions précédentes le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$		0	

R Lorsque l'on cherche à étudier la position relative des courbes de deux fonctions f et g, on peut dans un premier temps construire une fonction h définie par $h = f - g$. On étudie le signe de la fonction h à l'aide de la méthode précédemment vue. On conclura ensuite ainsi :

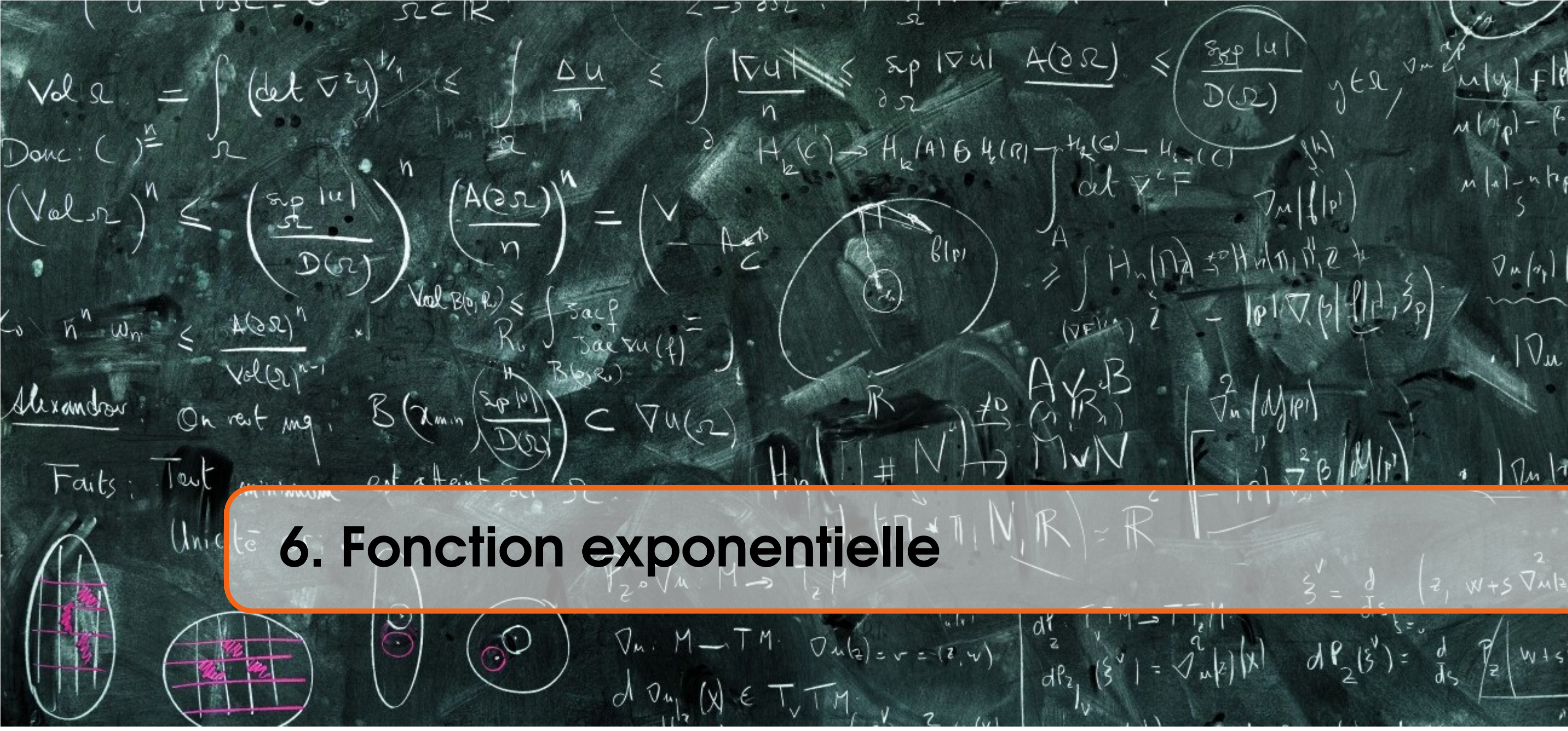
1. Sur l'intervalle où h est positive, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.
2. Sur l'intervalle où h est négative, $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.

■ **Exemple 5.6** Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x - 3$. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Déterminer l'expression de h : ....
2. Vérifier que $h(-1) = 0$: ....
3. Déterminer la fonction dérivée de h : ....
4. Étudier le signe de h', puis en déduire le tableau de variations de h.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
5. Déduire des questions précédentes le tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
$h(x)$		0	

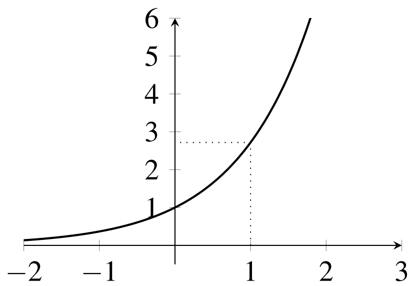
6. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
....
....



6. Fonction exponentielle

6.1 Définition et propriétés de la fonction exponentielle

Proposition 6.1 La *fonction exponentielle* est l'unique fonction, notée exp, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$.
Elle est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$.



Définition 6.1 On appelle *base de l'exponentielle népérienne* le nombre, noté e, tel que $\exp(1) = e$ ($e \approx 2,72$).

Désormais, on notera la fonction exponentielle sous la forme d'une puissance, au lieu d'utiliser la notation exp, pour ne pas alourdir le cours. On retiendra que e^x et $\exp x$ désignent le même nombre.

Proposition 6.2 La fonction exponentielle répond aux propriétés suivantes.

1. **Valeurs numériques particulières.** $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
2. **Signe de la fonction exponentielle.** $e^x > 0$.
3. **Transformations algébriques.** Si a et b sont réels, si n est un entier naturel, on a :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad (e^a)^n = e^{na}$$

■ **Exemple 6.1** À l'aide des règles algébriques précédentes, simplifier ces expressions.

1. $e^2 \times e^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\dfrac{e^9}{e^{16}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\left(e^3\right)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $\dfrac{e^{11}}{e^{-7}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $e^8 \times e^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $\dfrac{1}{e^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple 6.2** À l'aide des règles algébriques précédentes, simplifier l'expression suivante.

$$A(x) = \frac{e^{2x+3} \times \left(e^{2x}\right)^2}{e^x \times e^5}$$

Votre réponse :

Proposition 6.3 On peut résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction exponentielle.

1. Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \iff x = y$.
2. Pour tous réels x et y, $e^x < e^y \iff x < y$.

■ **Exemple 6.3** Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $(E_1)\ :\ e^{2x+3} = e$.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. $(E_2)\ :\ e^{-x^2+2x} - \left(e^3\right)^2 = 0$.

   ....
   ....
   ....
   ....

3. $(I_1)\ :\ e^{-2x+5} \geqslant e^7$.

   ....
   ....
   ....
   ....

4. $(I_2)\ :\ e^{x^2-5} < 1$.

   ....
   ....
   ....
   ....

6.2 Applications de la fonction exponentielle

■ **Exemple 6.4** Étudier les deux fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x+1)\,e^x$.

2. $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Proposition 6.4 On note k un nombre réel quelconque. La fonction f définie par $f(x) = e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est définie par $f'(x) = ke^{kx}$.

1. Si $k > 0$, alors f est strictement croissante.
2. Si $k < 0$, alors f est strictement décroissante.

■ **Exemple 6.5** Étudier les deux fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{-3x+2}$.
2. $g(x) = xe^{-x}$.

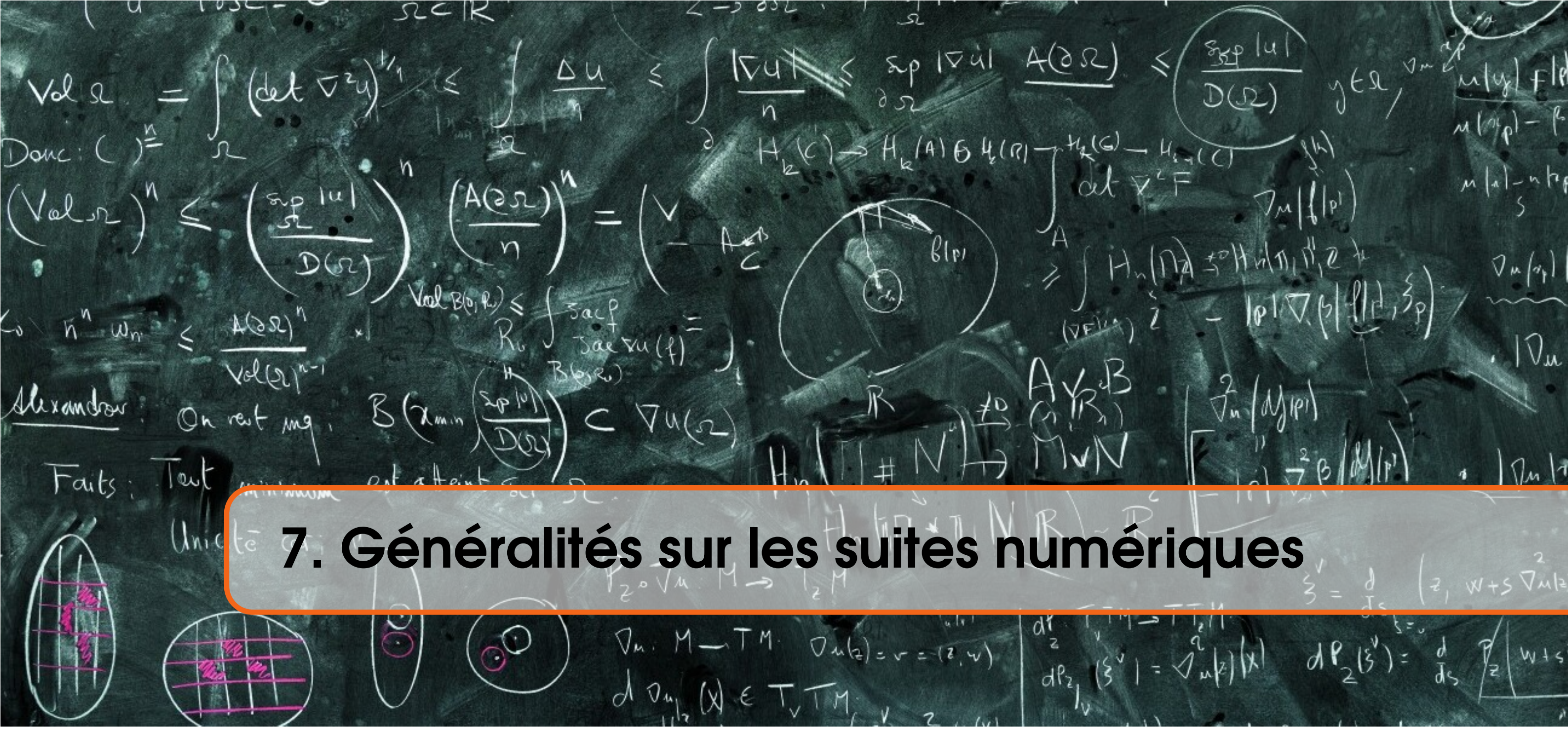
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Proposition 6.5 Étant donné que pour tout nombre réel a et pour tout entier naturel n on a $(e^a)^n = e^{na}$, alors la suite définie par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a.

■ **Exemple 6.6** On définit la suite u par $u_n = 3e^{-n}$.

1. Calculer le premier terme de la suite u.
   . . . .
2. Démontrer que la suite u est géométrique. Préciser sa raison.
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
3. Déterminer, en le justifiant, le sens de variations de u.
   . . . .
   . . . .

II Analyse réelle (suites)



7. Généralités sur les suites numériques

7.1 Définition, modes de génération

Définition 7.1 Une *suite numérique* est une liste ordonnée de nombres, appelés *termes*. On peut l'associer à une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

▪ **Exemple 7.1** Pour chaque suite, trouver « logiquement » les termes suivants.

$u_0 = 1$	$u_1 = 3$	$u_2 = 5$	$u_3 = 7$	$u_4 = \dots\dots$
$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 8$	$u_4 = \dots\dots$
$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 7$	$u_4 = \dots\dots$
$u_0 = 500$	$u_1 = 50$	$u_2 = 5$	$u_3 = 0,5$	$u_4 = \dots\dots$
$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 16$	$u_3 = 256$	$u_4 = \dots\dots$

R Dans le premier exemple, on dit que 1 est le terme de rang 0 ; 3 est le terme de rang 1, 5 est le terme de rang 2, etc. Le *rang* indique le « positionnement » du terme dans la suite.

Définition 7.2 Une suite u est définie *explicitement* lorsque l'on a une formule de calcul, appelée *terme général de u*, qui permet de calculer n'importe quel terme, en fonction de n.

▪ **Exemple 7.2** On définit la suite u par $u_n = 2n+1$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_0 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. $u_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
3. $u_{10} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

▪ **Exemple 7.3** On définit la suite u par $u_n = 3-n$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_0 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. $u_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
3. $u_{10} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

▪ **Exemple 7.4** On définit la suite u par $u_n = n^2+1$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_0 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. $u_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
3. $u_{10} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Définition 7.3 Une suite u est définie *par récurrence* lorsque l'on dispose de la valeur d'un terme (par exemple u_0) et d'une formule de calcul, appelée *relation de récurrence de u*, qui permet de calculer un terme à partir de son prédécesseur.

R Avec une suite définie par récurrence, attention à ne pas faire d'erreurs dans les calculs : si l'on se trompe sur le calcul d'un terme, alors tous les termes suivants risquent d'être erronés !

■ **Exemple 7.5** On définit la suite u par $u_0 = 1$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Calculer la valeur des termes suivants.
1. $u_1 =$ ....
2. $u_2 =$ ....
3. $u_3 =$ ....

■ **Exemple 7.6** On définit la suite u par $u_0 = 5$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 3n$.
Calculer la valeur des termes suivants.
1. $u_1 =$ ....
2. $u_2 =$ ....
3. $u_3 =$ ....

■ **Exemple 7.7** On définit la suite u par l'algorithme suivant, rédigé en langage Python.

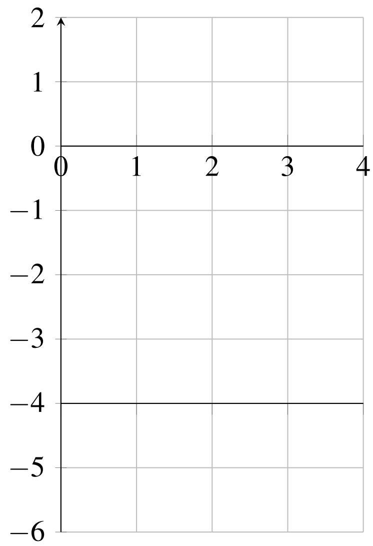
```
def une_suite(n):
    u=2
    for i in range(1,n+1):
        u=3*u-1
    return(u)
```

Calculer ou donner la valeur des termes suivants.
1. $u_0 =$ ....
2. $u_1 =$ ....
3. $u_2 =$ ....

7.2 Représentation graphique d'une suite numérique

R La graphique d'une suite u, appelé *nuage de points de u* est l'ensemble des points $(n\,;\,u_n)$.
Autrement dit, pour tracer le nuage de points d'une suite, il faut :
- Dresser un tableau de valeurs de la suite que l'on souhaite représenter.
- Tracer un repère orthogonal d'origine O.
- Placer les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ **sans** les relier entre eux.

■ **Exemple 7.8** Tracer le nuage de points de la suite définie par $u_n = 2 - 2n$.



7.3 Sens de variation d'une suite numérique

Définition 7.4 Soit u une suite numérique. On dira que u est *monotone* si elle est :

1. soit *croissante* c'est-à-dire si, pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. soit *décroissante* c'est-à-dire si, pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

R Pour étudier le sens de variation d'une suite, on calculera généralement le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si elle est positive (resp. négative), alors u est croissante (resp. décroissante).

■ **Exemple 7.9** Démontrer que la suite définie par $u_n = 2 - 2n$ est décroissante.

....
....
....
....
....

■ **Exemple 7.10** Démontrer que la suite définie par $v_n = n^2 + 3n - 2$ est croissante.

....
....
....
....
....

R Il existe d'autres méthodes permettant d'étudier le sens de variation d'une suite numérique :

1. Si u ne s'annule pas, et que son expression comporte des multiplications ou divisions prioritaires, on peut vérifier si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur (resp. inférieur) à 1, ce qui signifierait que la suite u est croissante (resp. décroissante).
2. Si l'expression de u est de la forme $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de f à l'aide de sa dérivée. Si f est croissante (resp. décroissante), alors u est croissante (resp. décroissante).
   La réciproque, en revanche, n'est pas vraie : c'est le sens de variation de f qui donnera celui de u, et pas l'inverse.

■ **Exemple 7.11** Démontrer que la suite définie par $w_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

7.4 Introduction à la limite d'une suite numérique

■ **Exemple 7.12** On définit la suite u par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

n	1	2	5	10	50
u_n					

2. Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, u_n prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   ....
   ....

■ **Exemple 7.13** On définit la suite v par $v_n = n^2 + n + 1$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

n	1	2	5	10	50
v_n					

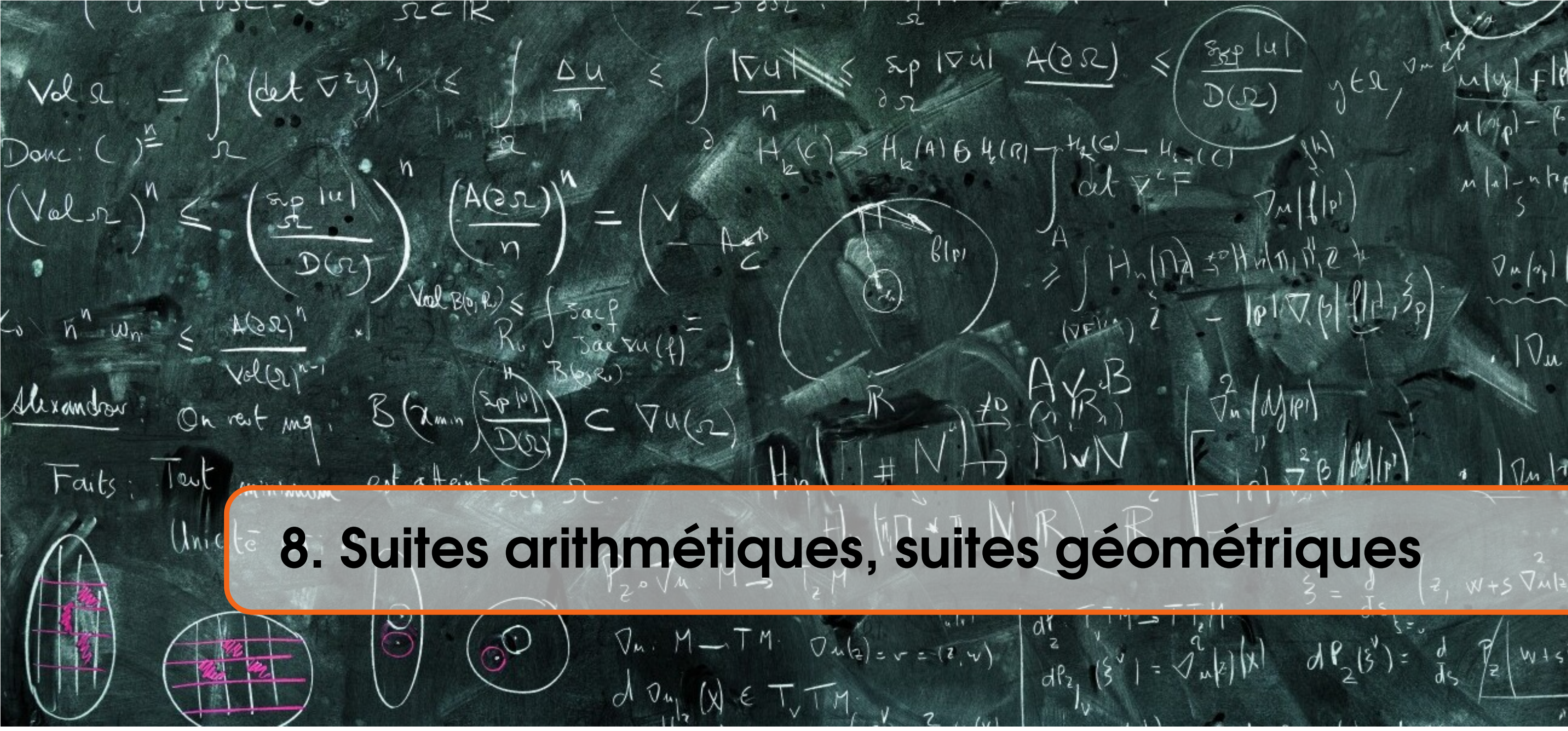
2. Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, que peut-on dire des valeurs de v_n ? En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   ....
   ....

Définition 7.5 Si u est une suite numérique, on peut qualifier son comportement.

1. u *converge* si, lorsque n devient de plus en plus grand, les valeurs de u_n se rapprochent de plus en plus d'une valeur ℓ, qu'on appellera *limite de* u. On notera :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$
2. u *diverge vers* $+\infty$ si, lorsque n devient de plus en plus grand, les valeurs de u_n deviennent de plus en plus grandes dans les nombres positifs, sans jamais atteindre de valeur limite. On notera :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
3. u *diverge vers* $-\infty$ si, lorsque n devient de plus en plus grand, les valeurs de u_n deviennent de plus en plus grandes dans les nombres négatifs, sans jamais atteindre de valeur limite. On notera :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$
4. u *diverge* si elle ne correspond à aucun des trois cas précédents.

■ **Exemple 7.14** Conjecturer le comportement des suites définies par $u_n = \frac{3n+5}{2n-1}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Votre réponse :



8. Suites arithmétiques, suites géométriques

8.1 Suites arithmétiques

8.1.1 Relation de récurrence, formule explicite

Définition 8.1 On dit qu'une suite est *arithmétique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r.
2. Il existe un nombre réel, noté r, tel que $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est alors appelé *raison de la suite*.

$$\begin{tikzcd} \boxed{u_0} \arrow[r, "+r"] \arrow[rrrr, bend right, "+n\times r"'] & \boxed{u_1} \arrow[r, "+r"] & \boxed{u_2} \arrow[r, "+r"] & \boxed{\cdots} \arrow[r, "+r"] & \boxed{u_n} \arrow[r, "+r"] & \boxed{u_{n+1}} \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 8.1** On considère la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 = \dots\dots$, $u_2 = \dots\dots$, $u_3 = \dots\dots$ et $u_4 = \dots\dots$

■ **Exemple 8.2** On considère la suite arithmétique de raison $r = -5$ telle que $u_0 = 100$.
Calculer $u_1 = \dots\dots$, $u_2 = \dots\dots$, $u_3 = \dots\dots$ et $u_4 = \dots\dots$

■ **Exemple 8.3** On considère la suite u définie par $u_n = 7 - 5n$. La suite u est-elle arithmétique ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques (son premier terme et sa raison).

....

....

....

....

....

....

■ **Exemple 8.4** On considère la suite v définie par $u_n = n^2 + 1$. La suite u est-elle arithmétique ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques (son premier terme et sa raison).

....

....

....

....

....

....

....

Proposition 8.1 Si u est une suite arithmétique de raison r, il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n, selon que le premier terme de u soit u_0 ou u_p :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p + (n-p)\,r$$

■ **Démonstration 8.1** Sans perte de généralités, supposons que le premier terme de la suite soit celui de rang 0. Si u est une suite arithmétique de raison r, on peut alors écrire les égalités suivantes, par définition de u :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r \\ u_3 &= u_2 + r \\ &\;\;\ldots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \end{aligned}$$

On additionne toutes les égalités précédentes membre à membre, on obtient alors :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + nr$$

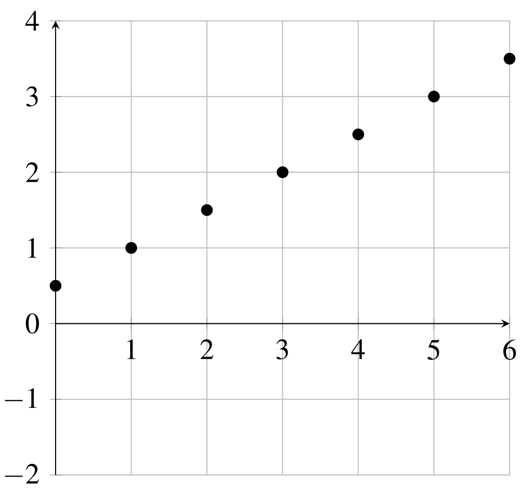
On simplifie les termes identiques de part et d'autre de l'égalité pour obtenir $u_n = u_0 + nr$. ■

■ **Exemple 8.5** On considère la suite arithmétique de raison $r = 0,9$ telle que $u_0 = 2,4$.
La formule explicite est $u_n =$ . . . . On en déduit que $u_{30} =$ . . . .

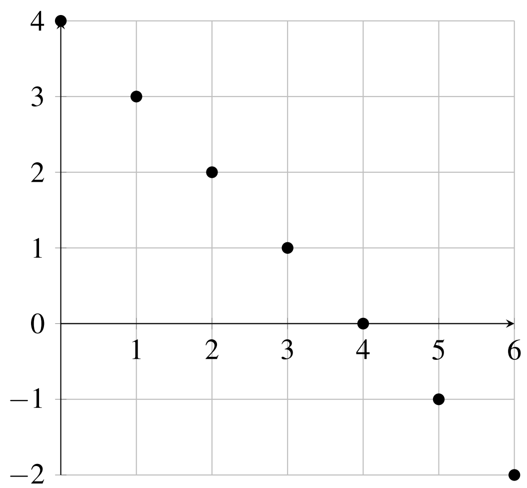
8.1.2 Représentation graphique, sens de variation

Proposition 8.2 Dans un repère, les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

Si $r > 0$, u est strictement croissante.



Si $r < 0$, u est strictement décroissante.



■ **Démonstration 8.2** On suppose que u est une suite arithmétique de raison r. Par définition, on peut donc écrire que $u_{n+1} = u_n + r$, soit encore que $u_{n+1} - u_n = r$.

1. Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n = r > 0$, donc u est strictement croissante.
2. Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n = r < 0$, donc u est strictement décroissante.

■

8.1.3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Proposition 8.3 La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{l-1} + u_l = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

■ **Démonstration 8.3** On étudie le cas où la suite est arithmétique de premier terme 1 et de raison $r = 1$. Écrivons la somme dans l'ordre croissant, puis dans l'ordre décroissant.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 1 \end{array}$$

À l'ordre près des termes, ces deux lignes sont identiques. Additionnons ces deux lignes :

$$(1+2+3+\ldots+n) + (n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1) = 2 \times (1+2+3+\ldots+n)$$

Puisque la somme des termes de chaque colonne est identique (elle fait $n+1$), si l'on additionne ces deux sommes en colonne, cela donne :

$$(1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$$

On a donc $2 \times (1+2+3+\ldots+n) = n(n+1)$, soit encore $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. ■

■ **Exemple 8.6** Calculer la valeur exacte de la somme $90+100+110+\ldots+370$.

....

....

....

....

8.2 Suites géométriques

8.2.1 Relation de récurrence, formule explicite

Définition 8.2 On dit qu'une suite est *géométrique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre $q \neq 0$.
2. Il existe un nombre réel non nul, noté q, tel que $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le nombre q est alors appelé *raison de la suite*.

$$\begin{tikzcd} \boxed{u_0} \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^n"'] & \boxed{u_1} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{u_2} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{\ldots} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{u_n} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{u_{n+1}} \end{tikzcd}$$

Une situation où une grandeur évolue à plusieurs reprises de $\pm T\,\%$ est modélisable par une suite géométrique de raison :

$$q = 1 \pm \frac{T}{100}$$

■ **Exemple 8.7** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple 8.8** On considère la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $u_0 = 1\,000$.
Calculer $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple 8.9** On considère la suite u définie par $u_n = 3 \times 2^n$. La suite u est-elle géométrique ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques (son premier terme et sa raison).

....

....

....

....

....

Proposition 8.4 Si u est une suite géométrique de raison q, il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n, selon que le premier terme de u soit u_0 ou u_p :

$$u_n = u_0 \times q^n \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

■ **Démonstration 8.4** Sans perte de généralités, supposons que le premier terme de la suite soit celui de rang 0. Si u_0 ou q est nul, alors l'égalité est bien vérifiée. Par la suite, on suppose que $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$. Si u est une suite géométrique de raison q, on peut alors écrire les égalités suivantes, par définition de u :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times q \\ u_2 &= u_1 \times q \\ u_3 &= u_2 \times q \\ &\dots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} \times q \\ u_n &= u_{n-1} \times q \end{aligned}$$

On multiplie toutes les égalités précédentes membre à membre, on obtient alors :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-2} \times u_{n-1} \times q^n$$

On simplifie les termes identiques de part et d'autre de l'égalité pour obtenir $u_n = u_0 \times q^n$. ■

■ **Exemple 8.10** Sur un livret A rémunéré à 3% par an, on dépose un capital de 5 000 €. On pose C_n le capital dont on dispose n années après ce dépôt.

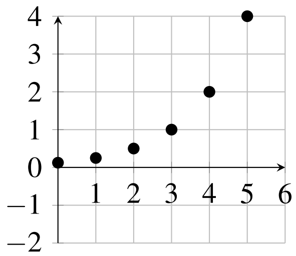
1. Déterminer la formule explicite de C_n : $C_n =$ ....
2. Calculer C_3. $C_3 =$ ....
3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé. ....

   ....

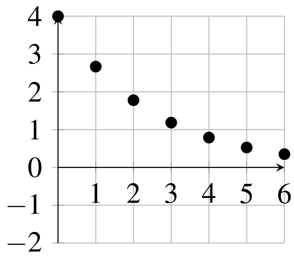
8.2.2 Représentation graphique, sens de variation

Proposition 8.5 Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif.

Si $q > 1$, u est strictement croissante.



Si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante.



Si u_0 est négatif, le sens de variation de la suite u est contraire à ceux indiqués ci-dessus.

■ **Démonstration 8.5** On suppose que u est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif. Par définition, on peut donc écrire que $u_n = u_0 \times q^n$. Évaluons la différence entre deux termes consécutifs de la suite u :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times q - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

1. Si $q > 1$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et u est strictement croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et u est strictement décroissante.

■

8.2.3 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Proposition 8.6 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par :

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{l-1} + u_l = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

■ **Démonstration 8.6** On étudie le cas où la suite est géométrique de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$. Posons S la somme cherchée.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\ q \times S & = & q & + & q^2 & + & q^3 & + & \ldots & + & q^{n+1} \end{array}$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, et en simplifiant les termes doublons apparaissant de part et d'autre de cette somme, on obtient :

$$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$$

En factorisant par S dans le membre de gauche, on obtient :

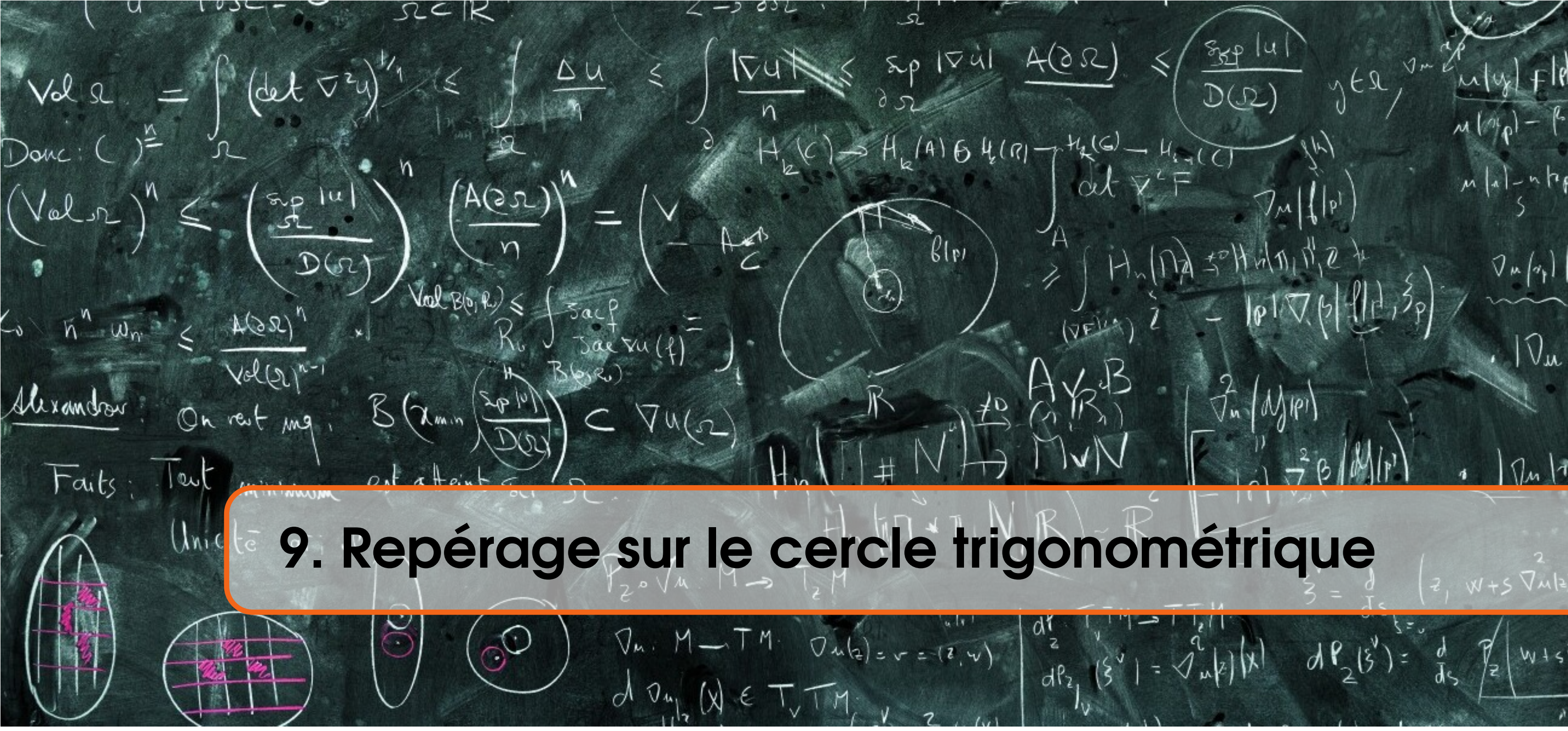
$$S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$$

Enfin, puisque l'on a supposé que $q \neq 1$, alors $1 - q \neq 0$. En divisant les deux membres de l'égalité par $1 - q$, on obtient la formule souhaitée. ■

■ **Exemple 8.11** En Inde, le roi Belkib, qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire. Le sage Sissa invente alors un jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que lon met. Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande. Mais lorsqu'on la met en œuvre, on s'aperçoit qu'il n'y a pas assez de grains de riz dans tout le royaume pour la satisfaire. Justifier cette dernière phrase sachant qu'en 2014, la production mondiale s'élève à environ 12 milliards de grains de riz.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

III Géométrie dans le plan

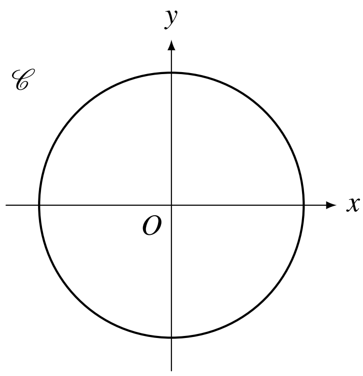


9. Repérage sur le cercle trigonométrique

9.1 Cercle trigonométrique, radians

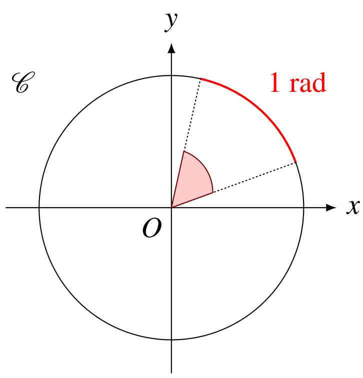
Définition 9.1 Dans un repère orthonormé d'origine 0, le *cercle trigonométrique* est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
On peut le parcourir dans deux sens :

1. Le sens *horaire*, *indirect* ou *négatif*, lorsqu'on le parcourt dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Le sens *trigonométrique*, *direct* ou *positif*, lorsqu'on le parcourt dans le sens contraire.



Définition 9.2 Le *radian* est l'unité de mesure des angles plans dans le système international, correspondant à la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ suivant un arc de longueur 1.
On retiendra la règle de conversion par proportionnalité suivante :

« 2π rad $= 360°$ »



■ **Exemple 9.1** Les mesures d'angles en degré et radians sont proportionnelles. Compléter :

Mesure (°)	0	30	45	60	90	180	360
Mesure (rad)							2π

■ **Exemple 9.2** Effectuer les conversions suivantes.

1. Convertir, en radians, la mesure de l'angle 20°.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

2. Convertir, en radians, la mesure de l'angle 150°.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

3. Convertir, en degrés, la mesure de l'angle $\dfrac{\pi}{5}$ rad.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

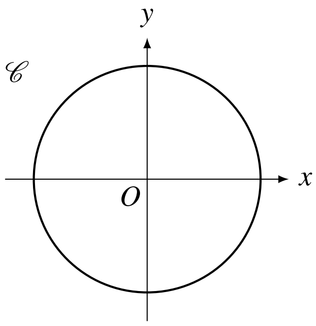
4. Convertir, en degrés, la mesure de l'angle $\dfrac{5\pi}{3}$ rad.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

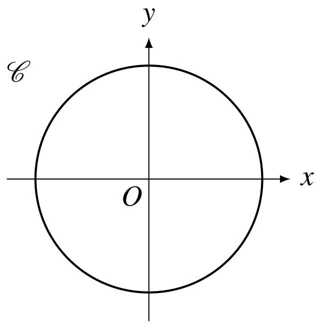
9.2 Mesures d'un angle orienté, mesure principale

■ **Exemple 9.3** Sur chacun des cercles trigonométriques, placer les points associés aux réels.

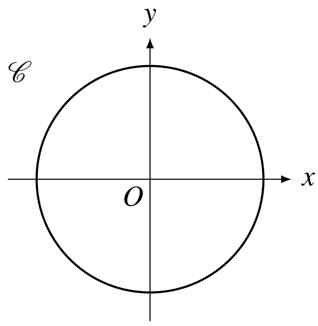
$\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et π.



$\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ et 2π.



$-\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$.

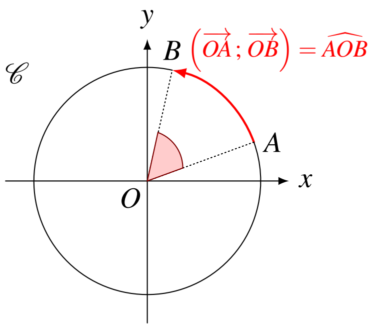


Comparer les cercles trigonométriques entre eux. Que peut-on remarquer sur le positionnement de certains points et leurs nombres associés ?

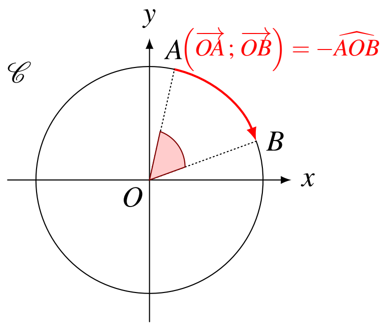
Votre réponse :

Définition 9.3 Un *angle orienté* est un angle qui a un sens.

Si l'angle est orienté dans le sens direct, alors sa mesure est positive.



Si l'angle est orienté dans le sens indirect, alors sa mesure est négative.



Définition 9.4 Un angle orienté a une infinité de mesures, définies à 2π près. La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

■ **Exemple 9.4** Déterminer les mesures principales des angles de mesure $\dfrac{13\pi}{6}$ et $\dfrac{-23\pi}{4}$.

. . . .

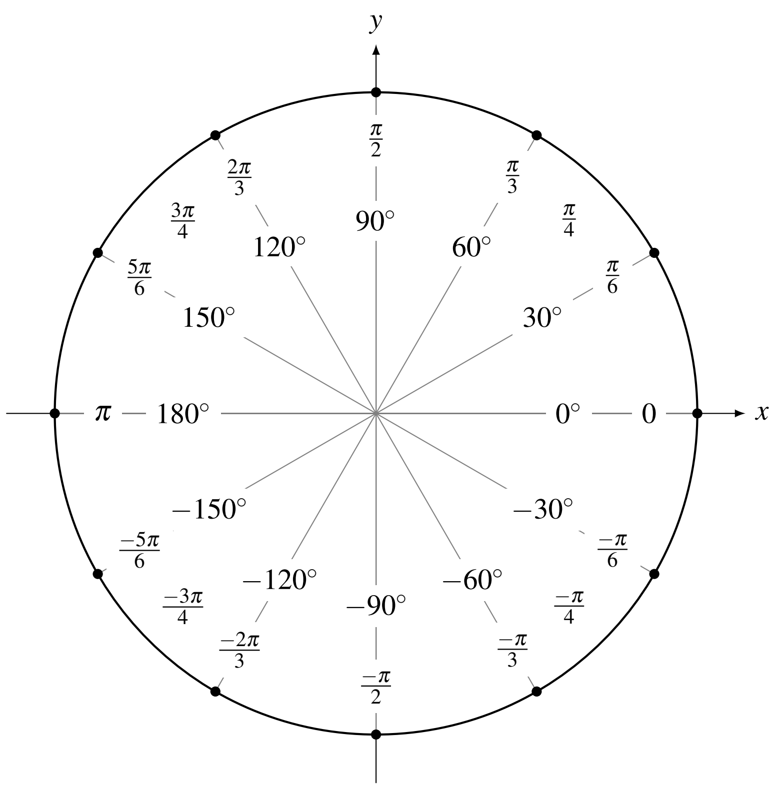
. . . .

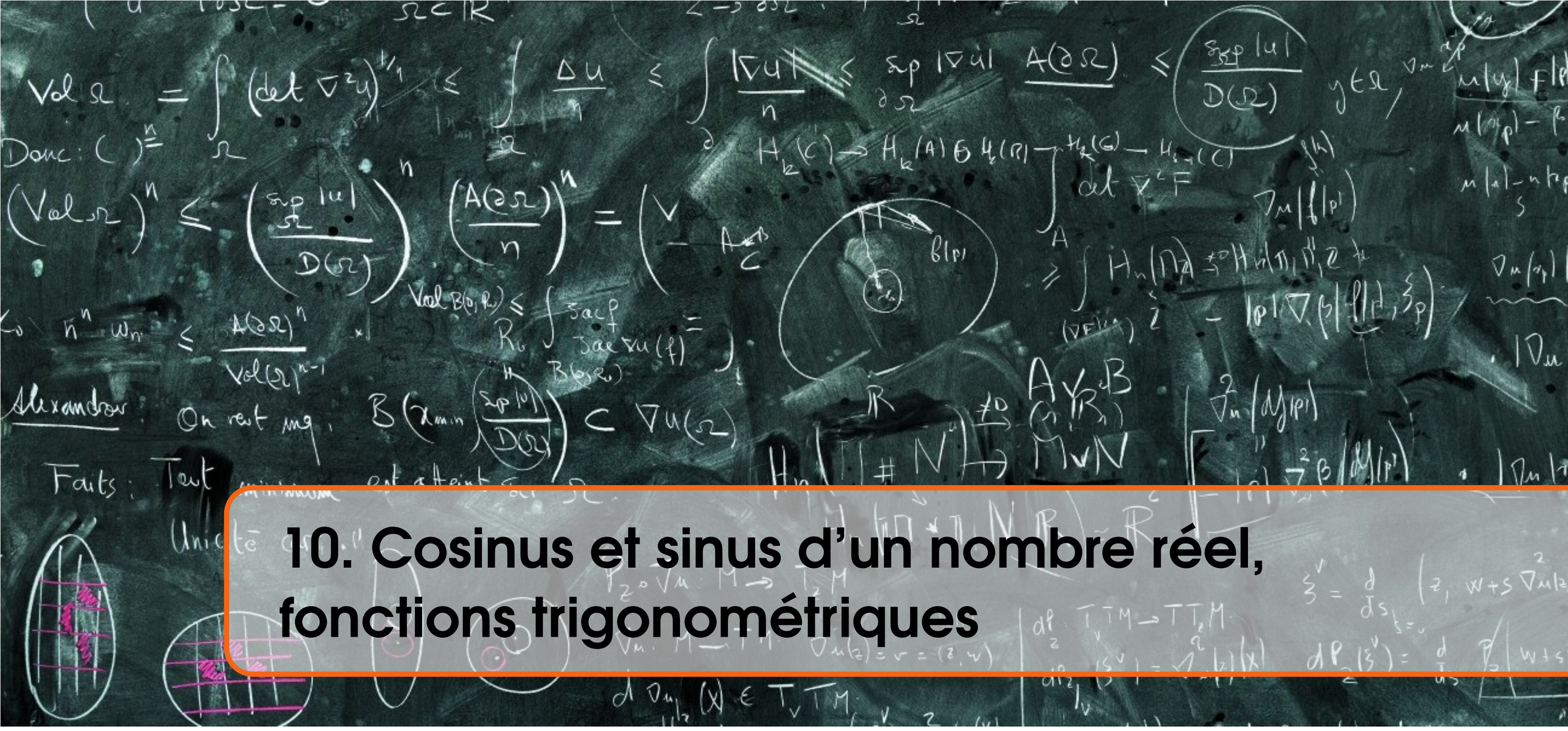
. . . .

. . . .

. . . .

9.3 Addendum : le cercle trigonométrique complet





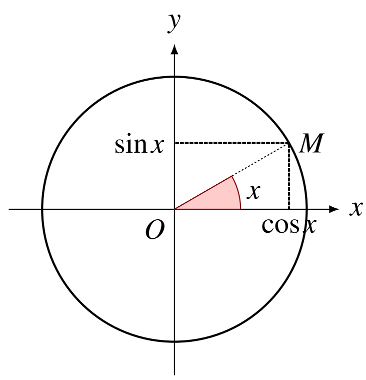
10. Cosinus et sinus d'un nombre réel, fonctions trigonométriques

10.1 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 10.1 Soit M un point du cercle trigonométrique, dont on note x une mesure de l'angle formé par rapport à l'horizontale. Autrement dit, x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})$.

— L'abscisse de M est appelée *cosinus de* x, et est notée $\cos x$.
— L'ordonnée de M est appelée *sinus de* x, et est notée $\sin x$.

On a donc $M\,(\cos x\,;\,\sin x)$.



Proposition 10.1 Le cosinus et le sinus répondent à deux propriétés remarquables.
— **Bornitude.** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
— **Identité trigonométrique.** Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Proposition 10.2 Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs remarquables du cosinus et du sinus, suivant les valeurs des meures d'angles x.

Mesure x, en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ **Exemple 10.1** À l'aide du tableau précédent, donner $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{5\pi}{6}$ et $\sin\frac{5\pi}{4}$.

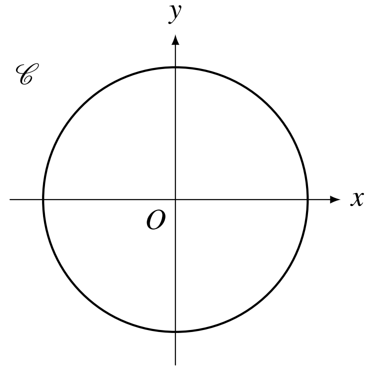
....
....
....
....
....

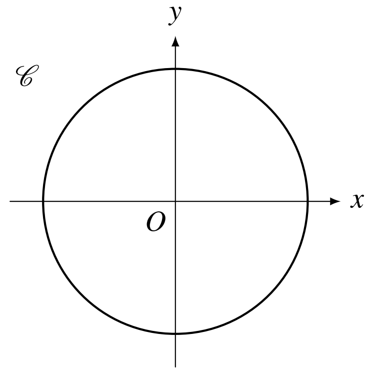
■ **Exemple 10.2** À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les (in)équations suivantes sur l'intervalle proposé.

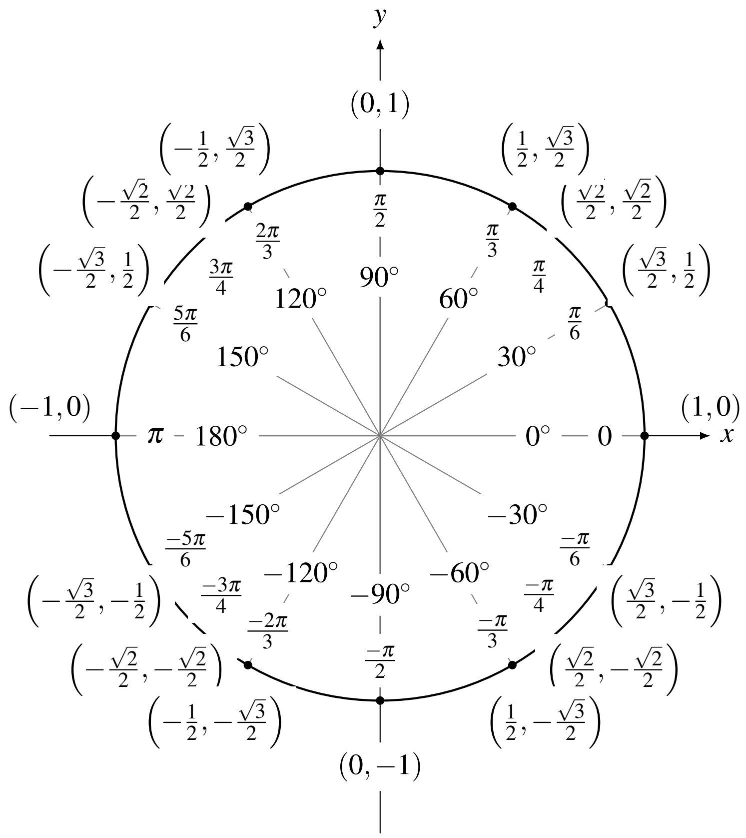
1. $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

2. $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....







10.2 Étude des fonctions trigonométriques

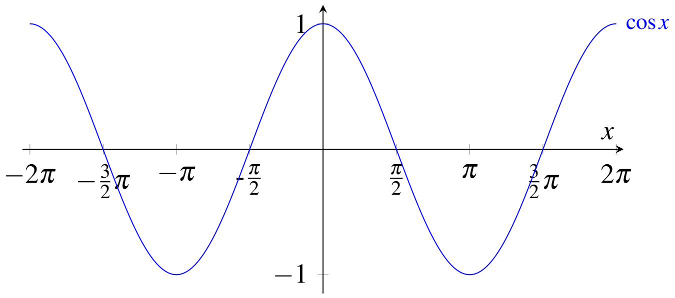
Définition 10.2 Soit x un nombre réel, auquel on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique, tel que x soit une mesure (exprimée en radians, où 2π rad = 360 degrés) de l'angle formé entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1. On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point M. La fonction, qui à tout réel x, associe $\cos x$ est appelée *fonction cosinus*.
2. On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point M. La fonction, qui à tout réel x, associe $\sin x$ est appelée *fonction sinus*.

Proposition 10.3 Les fonctions cosinus et sinus répondent à trois propriétés remarquables.
— **Bornitude.** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
— **Périodicité.** Pour tout réel x, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.
— **Identité trigonométrique.** Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

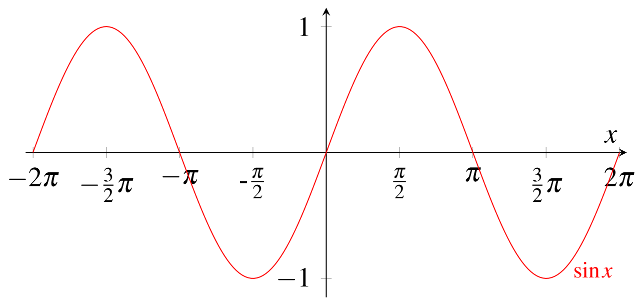
Proposition 10.4 On donne le tableau de variations et la courbe représentant la fonction cos.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1



Proposition 10.5 On donne le tableau de variations et la courbe représentant la fonction sin.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0



Définition 10.3 Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.

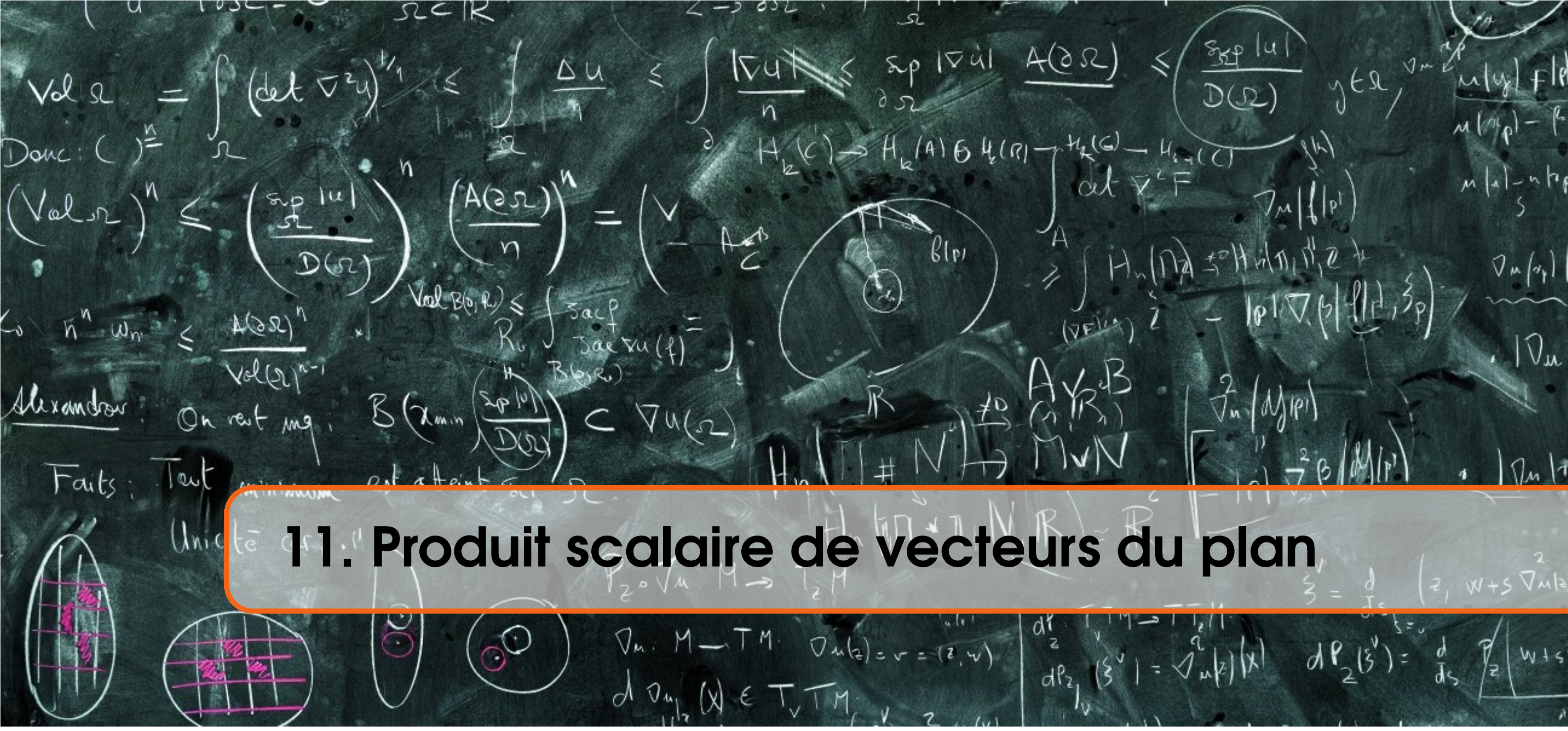
1. f est *paire* si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
2. f est *impaire* si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Proposition 10.6 Les fonctions cosinus et sinus répondent à des propriétés de parité.

1. La fonction cos est paire, c'est-à-dire que $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout x.
   La courbe de la fonction cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La fonction sin est impaire, c'est-à-dire que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout x.
   La courbe de la fonction sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

■ **Exemple 10.3** Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x) - 2\sin(x)$ est impaire.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .



11. Produit scalaire de vecteurs du plan

11.1 Définition à l'aide des angles et normes, premières propriétés

Définition 11.1 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
Le *produit scalaire de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$$

où $||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{v}||$ sont les normes de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ désigne l'angle formé entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

■ **Exemple 11.1** On considère un triangle équilatéral ABC de côté 2 cm. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

....
....
....
....
....

■ **Exemple 11.2** On considère un carré $ABCD$ de côté 4 cm. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

....
....
....
....
....

■ **Exemple 11.3** Démontrer que si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque du plan, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.

....
....
....
....
....

Proposition 11.1 On note λ un réel quelconque, et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques.

— **Commutativité (symétrie).** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
— **Linéarité.** $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.
— **Identités remarquables.**

1. **Identité remarquable 1.** $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.
2. **Identité remarquable 2.** $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.
3. **Identité remarquable 3.** $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2$

11.2 Définition à l'aide des normes

Proposition 11.2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

En particulier, si A, B et C sont trois points quelconques du plan, alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

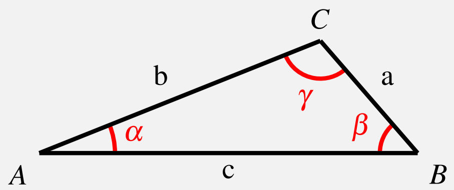
■ **Démonstration 11.1** Il faut poser $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ dans l'identité remarquable 2. ■

■ **Exemple 11.4** On considère un carré $ABCD$ de côté 4 cm et de centre O. Calculer $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

11.3 Application : le Théorème d'Al-Kashi

Théorème 11.1 On considère un triangle ABC avec les notations suivantes :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

R Le deuxième nom du théorème d'Al-Kashi est le « Théorème de Pythagore généralisé ».
En effet, que se passe-t-il si $\gamma = \frac{\pi}{2}$?

■ **Démonstration 11.2** Par exemple, pour la troisième formule, calculons $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

1. D'une part, à l'aide de la première formule de calcul du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = CB \times CA \times \cos\widehat{ACB} = ab\cos\gamma$$

2. D'autre part, à l'aide de la deuxième formule de calcul du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$$

En égalisant les deux écritures précédentes, on obtient $ab\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)$. Il ne reste plus qu'à isoler c^2 dans cette égalité pour obtenir l'égalité donnée par le théorème d'Al-Kâshi. ■

■ **Exemple 11.5** Soit un triangle ABC où $AC = 7$ cm, $BC = 10$ cm et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ rad.
À l'aide du théorème d'Al-Kâshi, déterminer la longueur AB.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

■ **Exemple 11.6** Soit un triangle ABC où $AB = 9$ cm, $AC = 10$ cm et $BC = 7$ cm.
À l'aide du théorème d'Al-Kâshi, déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré près.

. . . .

. . . .

. . . .

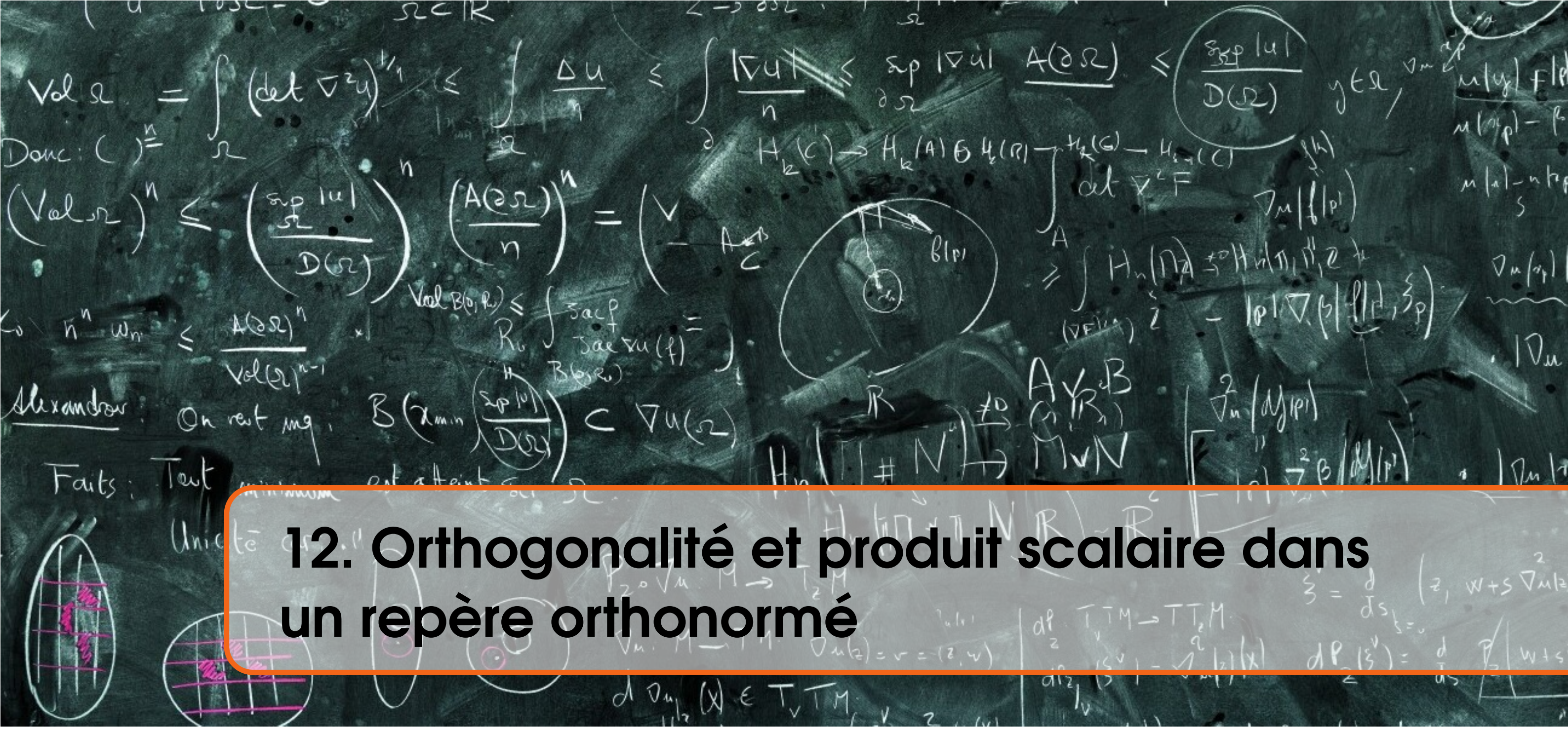
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



12. Orthogonalité et produit scalaire dans un repère orthonormé

12.1 Définition à l'aide des projections orthogonales

Proposition 12.1 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

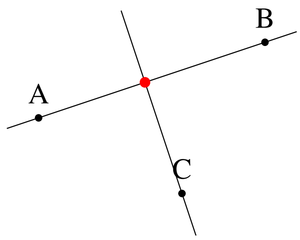
■ **Démonstration 12.1** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si, et seulement si, $||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})=0$. Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un des facteurs est nul. Autrement dit, ce produit est nul si, et seulement si :

— $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux,

— $\cos(\vec{u}\,;\vec{v})=0$, donc $(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

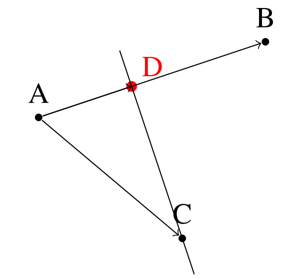
Dans tous les cas, on retrouve que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. ■

Définition 12.1 On considère trois points distincts A, B et C du plan.
Le *projeté orthogonal de C sur* (AB) est le point d'intersection de la droite (AB) avec sa perpendiculaire passant par C.



Définition 12.2 Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note D le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel égal à :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$



■ **Exemple 12.1** On considère un carré $ABCD$ de côté 2 cm. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Proposition 12.2 Si A et B sont deux points du plan, l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

■ **Démonstration 12.2** On note O le milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\iff \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=0 && \text{(à l'aide de la relation de Chasles)}\\
&\iff \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)=0 && \text{(puisque } O \text{ est le milieu de } [AB])\\
&\iff \left\|\overrightarrow{MO}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2=0 && \text{(d'après la troisième identité remarquable)}\\
&\iff MO=OA && \text{(puisque } MO \text{ et } OA \text{ sont deux distances)}
\end{aligned}$$

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$. ■

12.2 Définition à l'aide des cooordonnées

Définition 12.3 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel égal à :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'$$

■ **Exemple 12.2** Soient $\overrightarrow{u}\,(-1\,;-3)$ et $\overrightarrow{v}\,(3\,;-1)$ deux vecteurs du plan. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

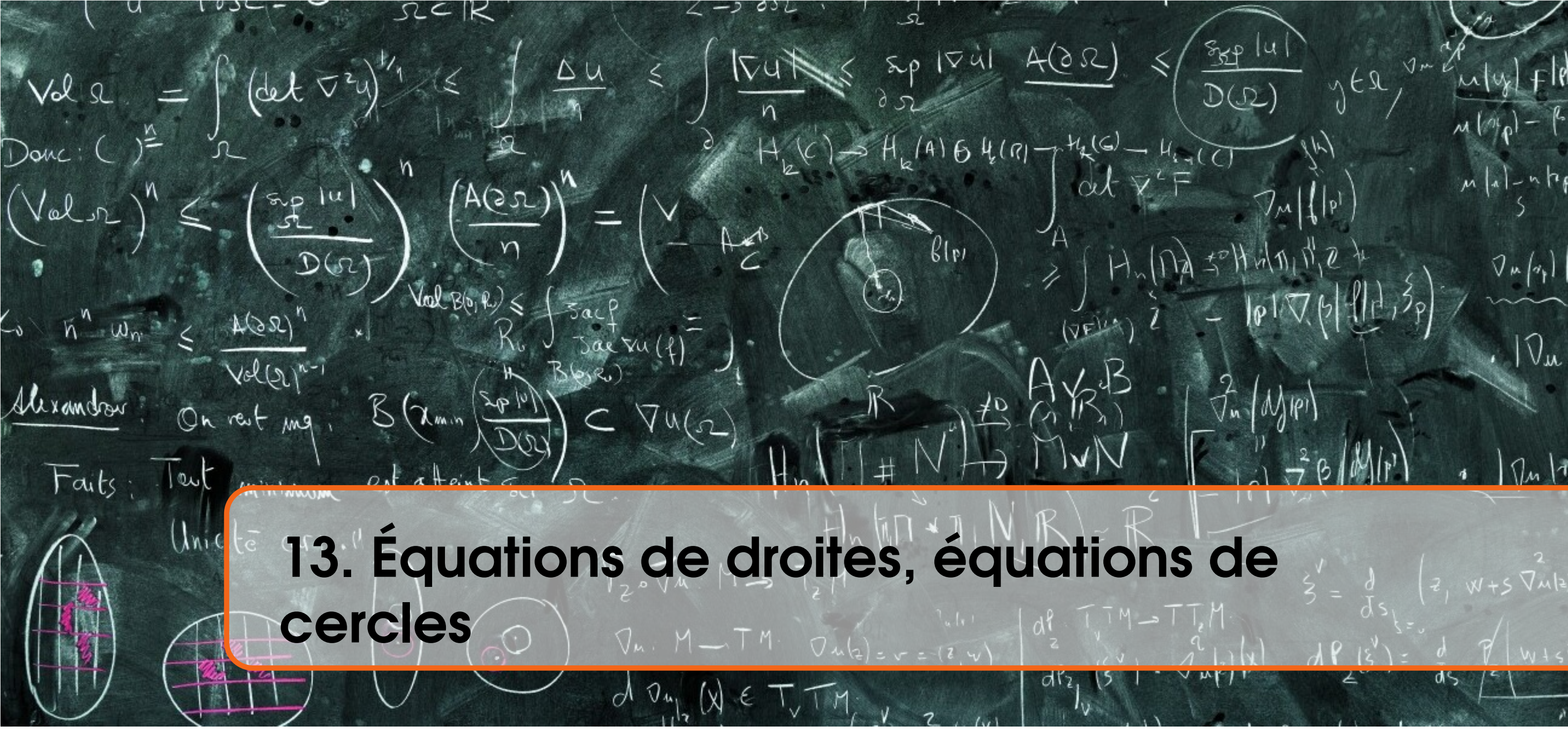
....

■ **Exemple 12.3** On suppose, dans un repère, que l'on dispose de quatre points $A\,(1\,;4)$, $B\,(4\,;3)$, $C\,(-2\,;2)$ et $D\,(3\,;1)$. Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales, ou non.

....
....
....
....
....
....
....

■ **Exemple 12.4** On cherche à déterminer une mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, où $\overrightarrow{AB}\,(5\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(4\,;-3)$. Pour cela :

1. Calculer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ....
   ....
2. Déterminer les normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ....
   ....
   ....
3. Écrire la formule de calcul « angle et normes » du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. ....
   ....
4. En déduire une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, arrondie au degré près. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....



13. Équations de droites, équations de cercles

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$.

13.1 Rappels sur la géométrie repérée

Proposition 13.1 — Rappels sur la géométrie ponctuelle. On note $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$.

1. La longueur AB est égale à $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
2. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + y_A}{2}\,;\,\dfrac{x_B + y_B}{2}\right)$.

Proposition 13.2 — Rappels sur la géométrie vectorielle.

1. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;\,y')$ sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant $xy' - yx'$ est nul.
2. Dans le plan, toute droite d admet deux types d'équations :
   a. Une équation *réduite* du type $y = mx + p$. Dans ce cas, m est le *coefficient directeur* ou la *pente* de d, et p est son *ordonnée à l'origine*.
   b. Une équation *cartésienne* du type $ax + by + c = 0$. Dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{u}\,(-b\,;\,a)$ est un *vecteur directeur* de d.
3. Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

R Pour déterminer une équation cartésienne de droite lorsque l'on connaît un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un point A, il existe deux méthodes.

1. On écrit que la droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. À l'aide de l'item 2*b*. de la proposition précédente, on trouve les valeurs de a et b. Ensuite, en remplaçant x et y par les coordonnées de A, on trouve la valeur de c.
2. On pose un point $M\,(x\,;\,y)$ quelconque de la droite. On cherche les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$, puis on écrit que ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ en utilisant l'item 1. de la proposition précédente.

■ **Exemple 13.1** Déterminer une équation cartésienne de la droite dirigée par $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,3)$ et passant par $A\,(1\,;\,-4)$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

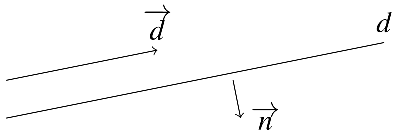
. . . .

R Pour déterminer une équation cartésienne de droite lorsque l'on connaît deux points A et B, on cherche les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Puisque la droite est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et passe par le point A (ou B), on peut utiliser la méthode précédente.

■ **Exemple 13.2** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A\,(1\,;\,-4)$ et $B\,(0\,;\,6)$.
....
....
....
....
....
....

13.2 Vecteur normal à une droite

Définition 13.1 Si d est une droite, on dira qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un *vecteur normal à d* s'il est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{d}$ de d.



Proposition 13.3 Toute droite d admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ si, et seulement si, $\vec{n}\,(a\,;\,b)$ est un vecteur normal à d.

■ **Exemple 13.3** On considère la droite d dont une équation cartésienne est $2x-5y+4=0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d. ....
2. Donner les coordonnées d'un vecteur normal à d. ....
3. Vérifier que ces vecteurs sont orthogonaux. ....

R Pour déterminer une équation cartésienne de droite lorsque l'on connaît un vecteur normal $\vec{n}$ et un point A, il existe deux méthodes.

1. On écrit que la droite admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, où $(a\,;\,b)$ sont les coordonnées de $\vec{n}$. Ensuite, en remplaçant x et y par les coordonnées de A, on trouve la valeur de c.
2. On pose un point $M\,(x\,;\,y)$ quelconque de la droite. On cherche les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$, puis on écrit que ce vecteur est orthogonal à $\vec{n}$ en utilisant le produit scalaire.

■ **Exemple 13.4** Déterminer une équation cartésienne de la droite normale à $\vec{n}\,(1\,;\,-5)$ et passant par $A\,(2\,;\,3)$. ....
....
....
....
....
....
....

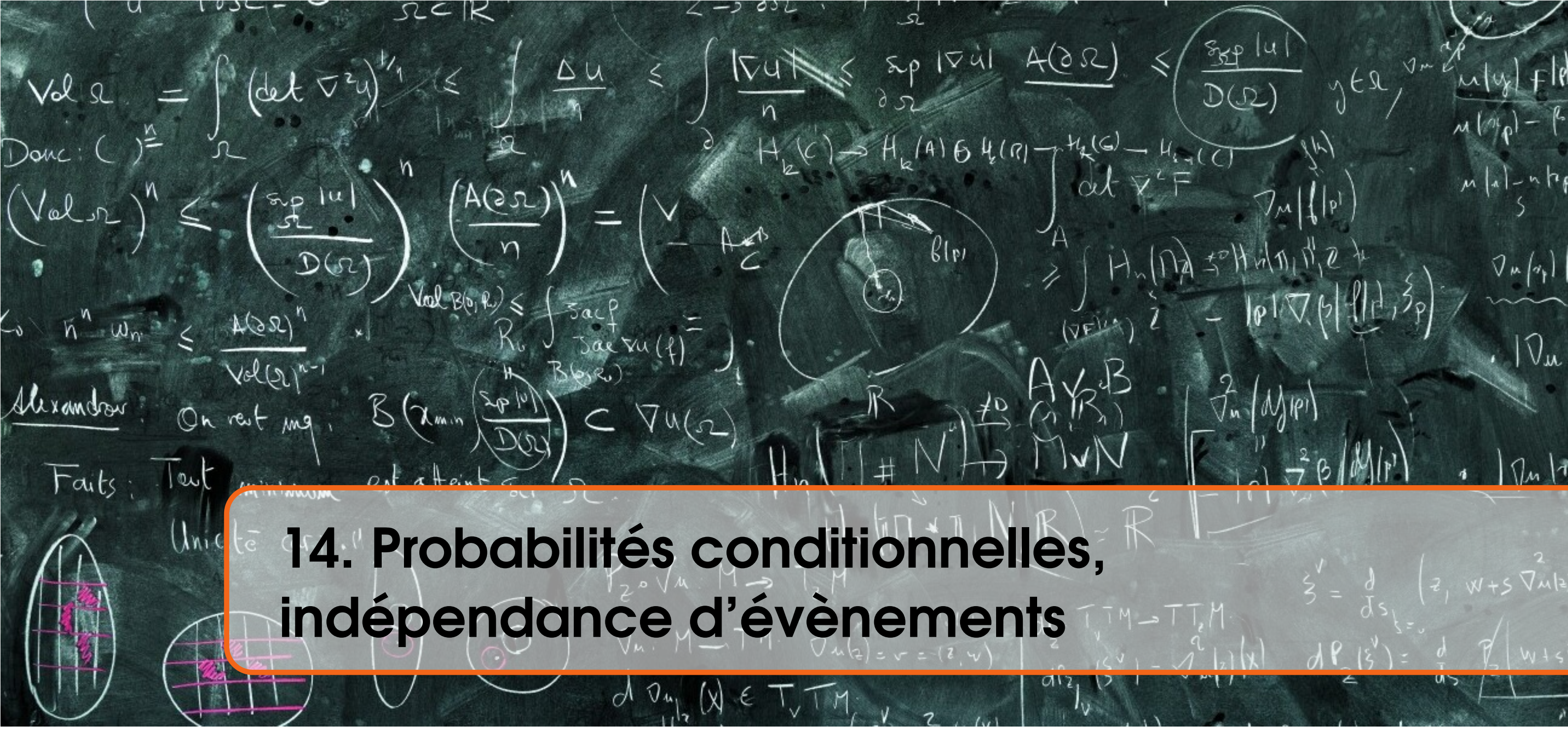
13.3 Équations de cercles

Proposition 13.4 Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon R est :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

■ **Exemple 13.5** Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega\,(-1\,;\,2)$ et passant par $A\,(-2\,;\,1)$.
....
....

IV Probabilités et Statistiques



14. Probabilités conditionnelles, indépendance d'évènements

14.1 Probabilités conditionnelles et tableaux d'effectifs

Définition 14.1 Soient A et B deux évènements, tel que A ne soit pas un évènement impossible. On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A*, que l'on note $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple 14.1** Une culture de pois comporte des pois de couleur « jaune » ou « vert » et de forme « lisse » ou « ridé ». Le tableau ci-dessous est partiellement renseigné à partir des observations effectuées sur un grand nombre de pois de cette culture.

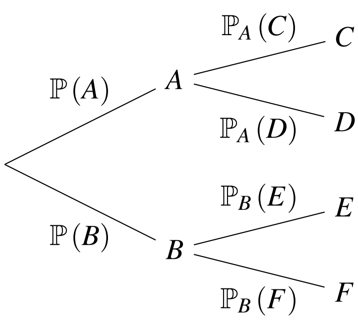
	Nb de pois jaunes	Nb de pois verts	**Total**
Nb de pois ridés	100		600
Nb de pois lisses			
Total	300		10 000

Calculer la probabilité qu'un pois soit vert, sachant qu'il est lisse. . . . .

14.2 Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

Proposition 14.1 On construit un arbre pondéré à l'aide de trois règles :

1. Sur la première profondeur, on écrit les probabilités des évènements.
2. Sur la deuxième profondeur, on écrit les probabilités conditionnelles.
3. Sur les *branches* d'un même *noeud*, la somme des probabilités est égale à 1.



R D'après la formule de la définition 14.1 et l'arbre précédent, la probabilité d'une intersection, par exemple $A \cap C$, s'obtient ainsi :

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(C)$$

■ **Exemple 14.2** Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports). Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ». On constate que, dans cette école :

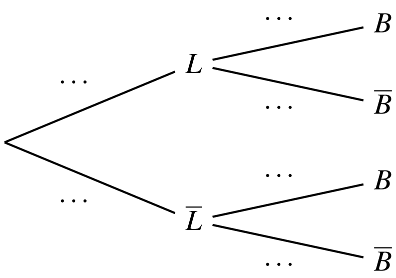
— 40 % d'étudiants sont dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation » ;
— Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS ;
— Parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les évènements L : « L'étudiant est dans le cycle « licence » et B : « L'étudiant est membre du BDS ».

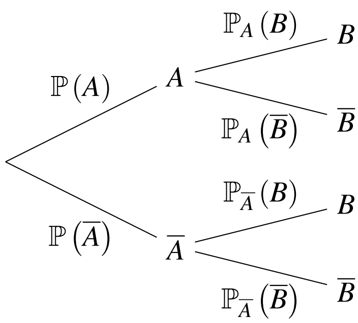
1. Écrire chacun des pourcentages comme des probabilités d'évènements.

$$0,40 = \mathbb{P}(\ldots) \qquad 0,60 = \mathbb{P}(\ldots) \qquad 0,08 = \mathbb{P}_{\ldots}(\ldots) \qquad 0,10 = \mathbb{P}_{\ldots}(\ldots)$$

2. Compléter l'arbre pondéré modélisant la situation.



Proposition 14.2 On suppose que l'on a un arbre pondéré semblable à celui ci-contre. Pour déterminer la probabilité de l'évènement B, on utilise l'une des formules suivantes, appelées *formule des probabilités totales* :



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)\\ &= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\end{aligned}$$

■ **Exemple 14.3** On reprend la situation de l'exemple précédent. Calculer la probabilité de B.

....
....
....
....

14.3 Indépendance d'évènements, succession d'épreuves

Définition 14.2 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω, tels que A et B ne soient pas des évènements impossibles. On dira que A et B sont *indépendants* si :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$$

Proposition 14.3 A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre. En d'autres termes, si l'une des conditions suivantes est réalisée :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$$

Proposition 14.4 Si deux évènements A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi, A et $\overline{B}$ le sont aussi, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

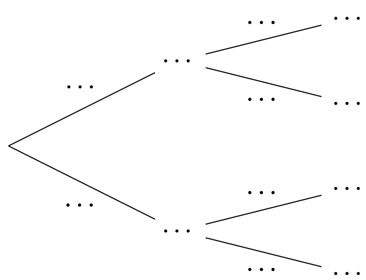
■ **Exemple 14.4** Un agent comptable vérifie les factures de deux fournisseurs. Il s'aperçoit que certaines factures des fournisseurs (F_1 et F_2) sont erronées (E). Le résultat de son analyse est consigné dans le tableau ci-dessous.

	E	$\overline{E}$	**Total**
F_1	3		64
F_2			
Total	15		320

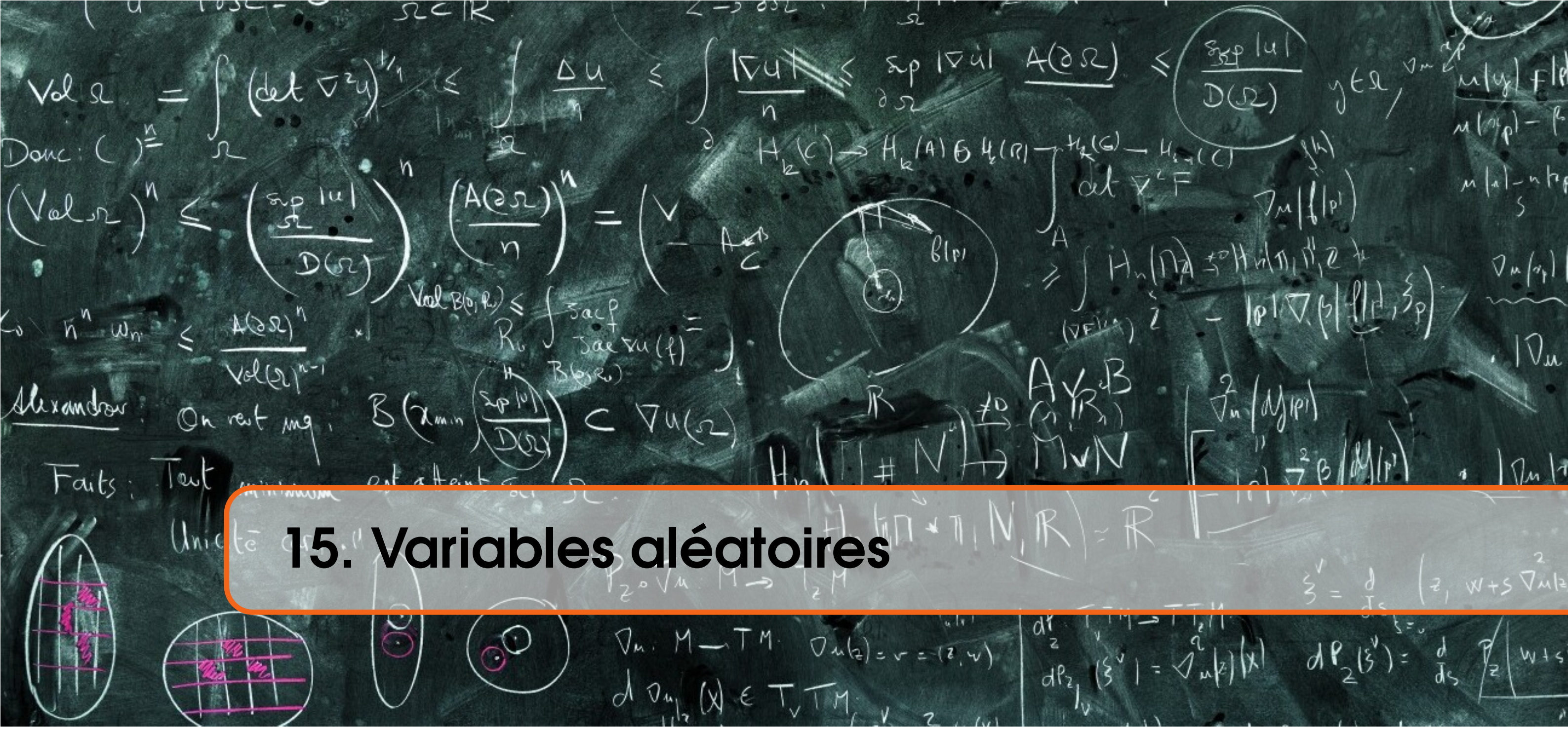
1. Calculer les probabilités des évènements E, puis E sachant F_1. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Peut-on dire que les évènements E et F_1 sont indépendants ? Justifier. ....
   ....
   ....

■ **Exemple 14.5** Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges, indiscernables au toucher. On décide de tirer au hasard une boule, puis la remettre dans l'urne, et ce à deux reprises. On notera B l'évènement consistant à tirer une boule blanche.

1. Justifier rapidement qu'il s'agit d'une répétition de deux évènements indépendants.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Compléter l'arbre pondéré de probabilités schématisant la situation :



3. Déterminer la probabilité de tirer deux boules blanches. ....
   ....
   ....
4. Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule rouge. ....
   ....
   ....



15. Variables aléatoires

15.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 15.1 Une *variable aléatoire* est un processus qui, à toute issue de l'univers d'une expérience aléatoire, va faire correspondre un nombre réel.

■ **Exemple 15.1** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu.

1. Déterminer Ω l'*univers*, qui est l'ensemble de toutes les *issues* (ou *éventualités*) possibles.
   ....
2. On considère le jeu suivant :
   — Si le résultat obtenu est 6, le joueur gagne 10 €.
   — Si le résultat obtenu est un nombre pair différent de 6, le joueur gagne 2 €.
   — Si le résultat obtenu est un nombre impair différent de 1, le joueur ne gagne ni ne perd.
   — Si le résultat obtenu est 1, le joueur perd 5 €.

   On note X la variable aléatoire qui, à l'issue du lancer du dé, associe le gain algébrique (exprimé en euros) obtenu par le joueur. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
   ....
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 0)$. ....
4. Peut-on affirmer que le jeu est équitable pour le joueur ? Justifier votre réponse.
   ....
   ....

Définition 15.2 On suppose qu'une variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs que l'on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X est la donnée de toutes les probabilités du type $\mathbb{P}(X = x_i)$.

R Dans la pratique, une loi de probabilité se présente sous la forme d'un tableau, où seront indiquées toutes les issues de l'expérience aléatoire (sur la première ligne), ainsi que leurs probabilités respectives (sur la seconde ligne).

■ **Exemple 15.2** Donner la loi de probabilité de X, où X est la variable aléatoire de l'exemple 1.

x_i				
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

R On peut vérifier rapidement qu'il n'y a pas d'erreur dans le calcul de probabilités une fois que le tableau présentant la loi de probabilité est construit : il suffit de vérifier si la somme des probabilités indiquées sur la seconde ligne est bien égale à 1.

■ **Exemple 15.3** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes (comportant les figures 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As, disponibles dans les quatre couleurs Pique, Trèfle, Cœur, Carreau). On gagne 5 € si l'on tire un as, 2 € si l'on tire un trèfle, et on perd 10 € si l'on tire une autre carte. On note X la variable aléatoire qui, à l'issue du tirage, associe le gain algébrique (exprimé en euros) obtenu par le joueur.

1. Compléter la loi de probabilité de X, dans le tableau ci-dessous.

x_i				
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

2. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

. . . .
. . . .

15.2 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 15.3 Pour simplifier les notations, on note x_i les valeurs que peut prendre une variable aléatoire X, et p_i la probabilité que $X = x_i$. On définit l'*espérance*, la *variance* et l'*écart-type* d'une variable aléatoire X comme les nombres suivants :

$$\mathbb{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$
$$\mathbb{V}(X) = p_1 (x_1 - \mathbb{E}(X)) + p_2 (x_2 - \mathbb{E}(X)) + \ldots + p_n (x_n - \mathbb{E}(X))$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

R L'espérance peut être interprétée comme une moyenne, si l'on venait à répéter une expérience aléatoire un très grand nombre de fois. C'est un nombre qui peut être positif, négatif ou nul.

R La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion de la variable aléatoire. Ce sont deux nombres positifs ou nuls.

■ **Exemple 15.4** On reprend les lois de probabilités dressées dans les exemples précédents.

1. Pour l'exemple du dé équilibré, calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter ce résultat.

. . . .
. . . .
. . . .

2. Pour l'exemple du jeu de cartes, calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter ce résultat.

. . . .
. . . .
. . . .

■ **Exemple 15.5** Si X représente le gain algébrique d'un jeu, que signifie le fait d'avoir :

1. Une espérance positive ? . . . .
2. Une espérance négative ? . . . .
3. Une espérance nulle ? . . . .