Mathématiques (exercices)

Première STI2D

Kevin Cauvin

Sixième impression, Juillet 2025

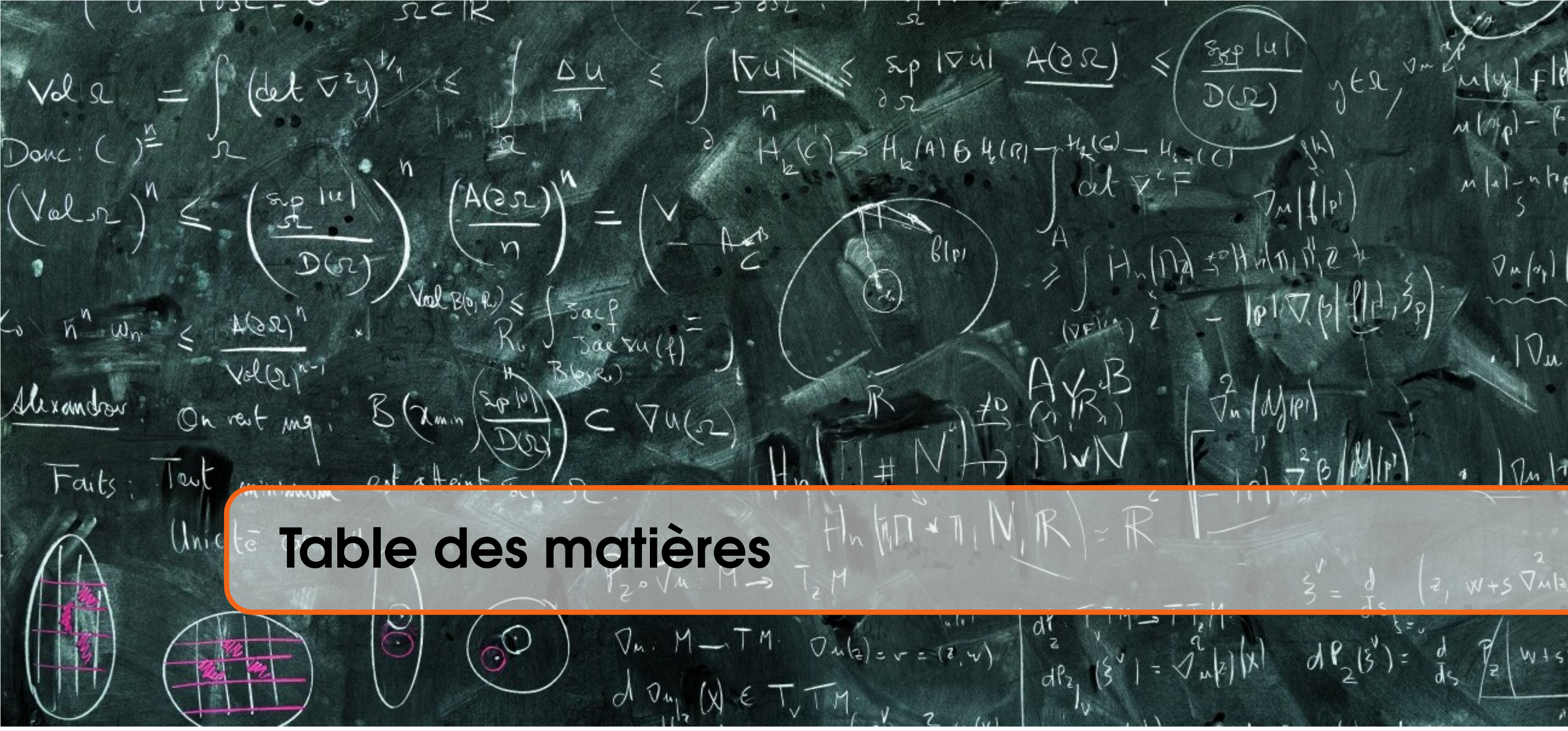
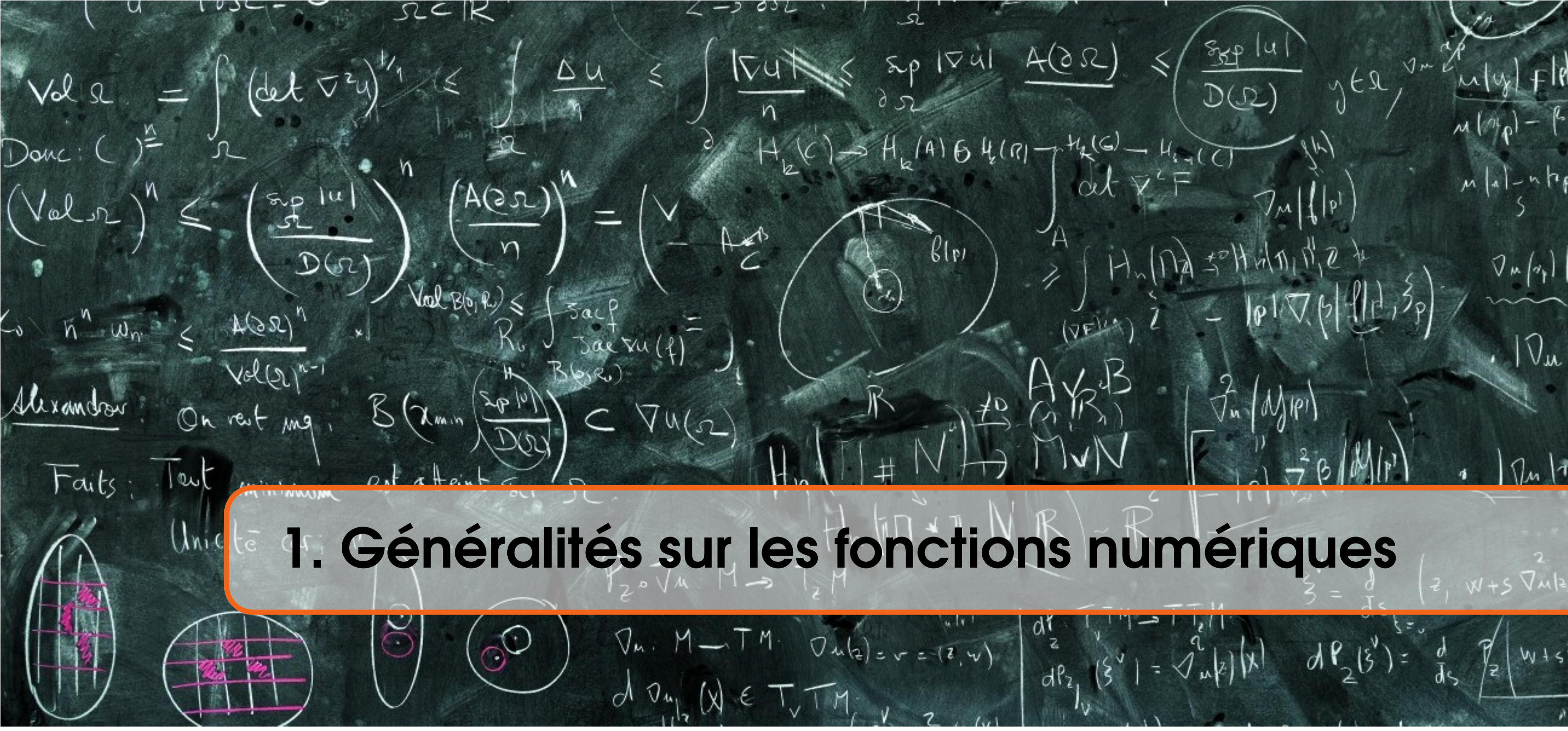


Table des matières

Analyse réelle (fonctions)



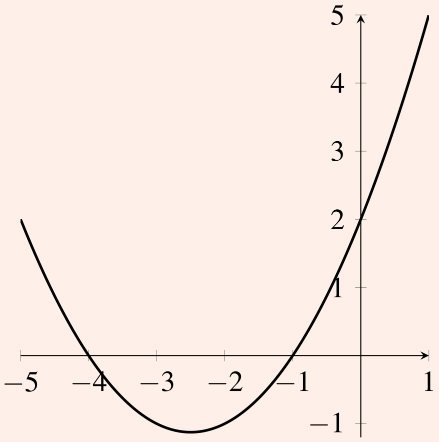
1. Généralités sur les fonctions numériques

Exercice 1.1 On donne les expressions de plusieurs fonctions. Pour chacune d'entre elles, déterminer son ensemble de définition.

$$f(x) = 2x - 9. \qquad h(x) = x\sqrt{x}. \qquad j(x) = \frac{2x}{3x+4}.$$
$$g(x) = x^2 + 4x - 1. \quad i(x) = 1 + \sqrt{x-1}. \quad k(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2+1}.$$

■

Exercice 1.2 On représente la courbe d'une fonction f, tracée sur son ensemble de définition.



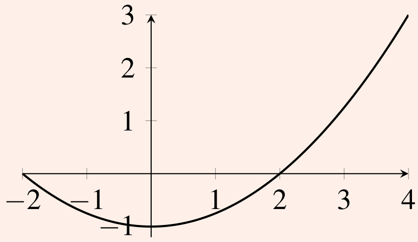
1. Lire l'ensemble de définition de f.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-5	-4		-1	0	
$f(x)$			-1			5

3. Donner un nombre qui ne semble pas avoir d'antécédent par f.
4. Donner un nombre qui semble avoir exactement un antécédent par f.
5. Donner un nombre qui semble avoir exactement deux antécédents par f.

■

Exercice 1.3 On représente la courbe de la fonction définie par $f(x) = 0,25x^2 - 1$.



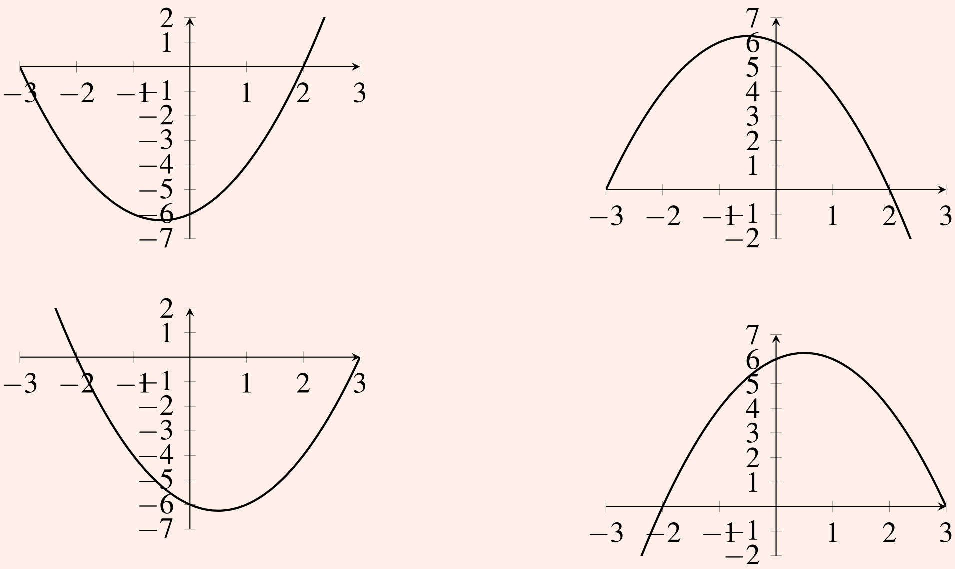
1. Déterminer l'image de 3 par f, par lecture graphique, puis par le calcul.
2. Déterminer un antécédent de -1 par f, par lecture graphique, puis par le calcul.
3. Quel semble être le minimum de f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
4. Quel semble être le maximum de f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 1.4 Les vétérinaires donnent parfois le tableau de correspondance entre l'âge des chats et l'équivalent en âge humain ci-dessous.

Âge du chat (en années)	$0,5$	1	2	6	12
Âge humain (en années)	10	18	26	42	70

1. Tracer la représentation graphique de la fonction H qui donne l'âge humain (en années) en fonction de l'âge du chat (en années).
2. Cette courbe représente-t-elle une situation de proportionnalité ?
   Justifier votre réponse à l'aide du tableau, puis à l'aide d'un argument graphique.

Exercice 1.5 Parmi les quatre fonctions représentées ci-dessous, une seule représente la fonction définie par $f(x) = -x^2 - x + 6$. Laquelle ? Justifier votre réponse.

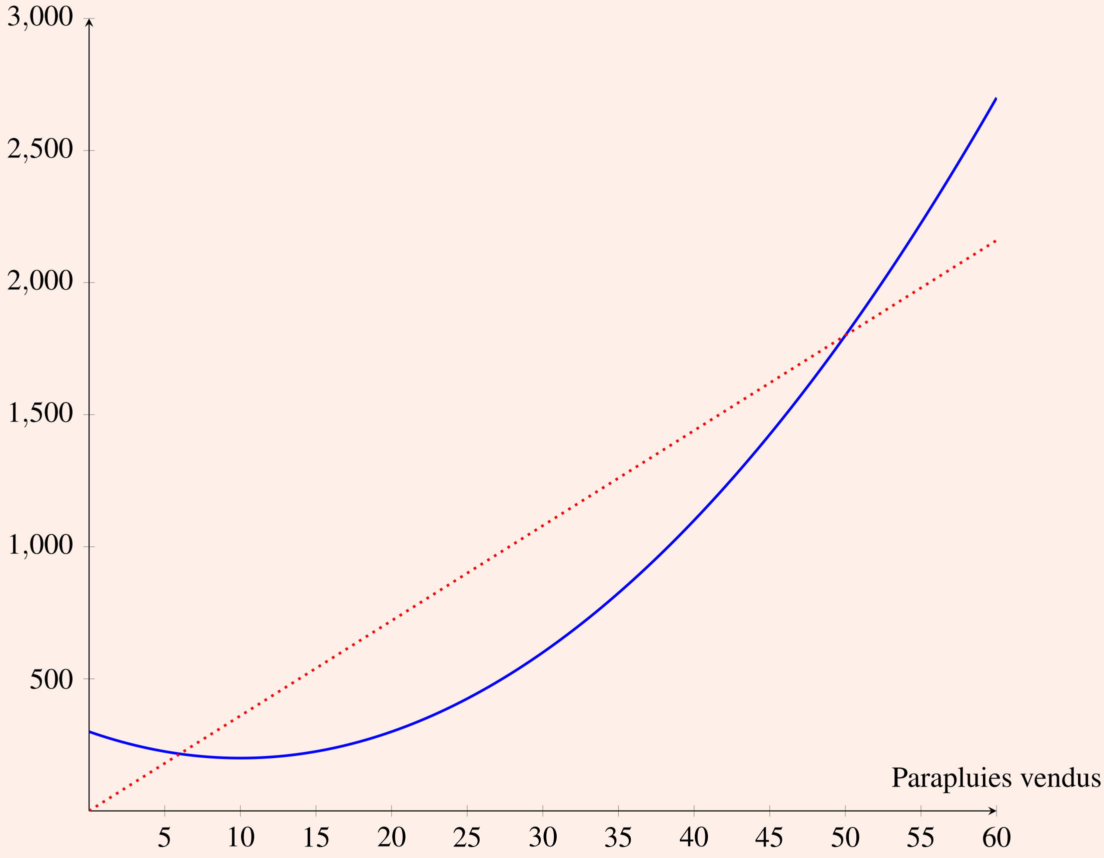


Exercice 1.6 Une société fabrique, tous les jours, x parapluies (où x est compris entre 0 et 60). La recette correspondant à la vente de x parapluies (exprimée en euros) est donnée par $R(x) = 36x$. Le coût total de production de x parapluies (exprimé en euros) est donné par :

$$C(x) = x^2 - 20x + 300$$

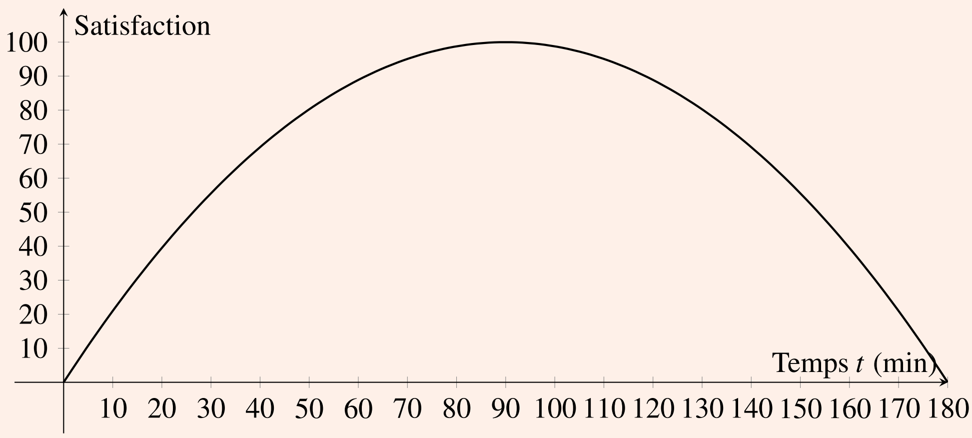
1. Calculer la recette et le coût total de production pour un parapluie vendu.

Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les fonctions C et R.



2. Expliquer pourquoi la courbe pointillée représente la fonction R.
3. On dit que la société *réalise un bénéfice* lorsque ses recettes sont supérieures aux coûts de production. Estimer au mieux, avec la précision permise par le graphique, combien de parapluies doivent être vendus pour que :
   a. La société ne réalise aucun bénéfice.
   b. La société réalise un bénéfice.
   c. La société ait le plus grand bénéfice possible. Justifier votre réponse.
4. La fonction permettant de calculer le bénéfice (exprimé en euros) pour la vente de x parapluies est donnée par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a. Vérifier que le bénéfice peut aussi s'écrire sous la forme $B(x) = -x^2 + 56x - 300$.
   b. Vérifier que le bénéfice peut aussi s'écrire sous la forme $B(x) = (6 - x)(x - 50)$. Quel résultat de la question précédente retrouve-t-on ?
   c. Calculer le bénéfice correspondant à la vente d'un parapluie.

Exercice 1.7 Dans un cadre économique, on dit qu'une fonction S est une *fonction de satisfaction* si ses valeurs sont comprises entre 0 et 100. On dit qu'il y a *envie* sur un intervalle lorsque S y est croissante, sinon on dit qu'il y a *rejet*. On dit qu'il y a *saturation* lorsque S prend la valeur 100.
Un client dispose de trois heures pour faire ses achats dans une zone commerciale. On modélise sa satisfaction en fonction de son temps de présence sur place, en minute, par la fonction de satisfaction S, définie et représentée sur l'intervalle $[0\,;\,180]$:



1. Comparer, en justifiant, la satisfaction du client au bout de 20min, et au bout de 2h.
2. Lire graphiquement l'instant où il y a *saturation* et un intervalle où il y a *envie*.
3. On admet que l'expression de $S(t)$ est de la forme $at(180-t)$. Déterminer a.

■

Exercice 1.8 On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = -100x+1$.
1. Calculer le taux de variation de f et de g entre 0 et 1, entre 1 et 3. Que constatez-vous ?
2. Quelle propriété de calcul a-t-on envie de déduire pour le calcul du taux de variation pour les fonctions qui sont du même « type » que f et g ?

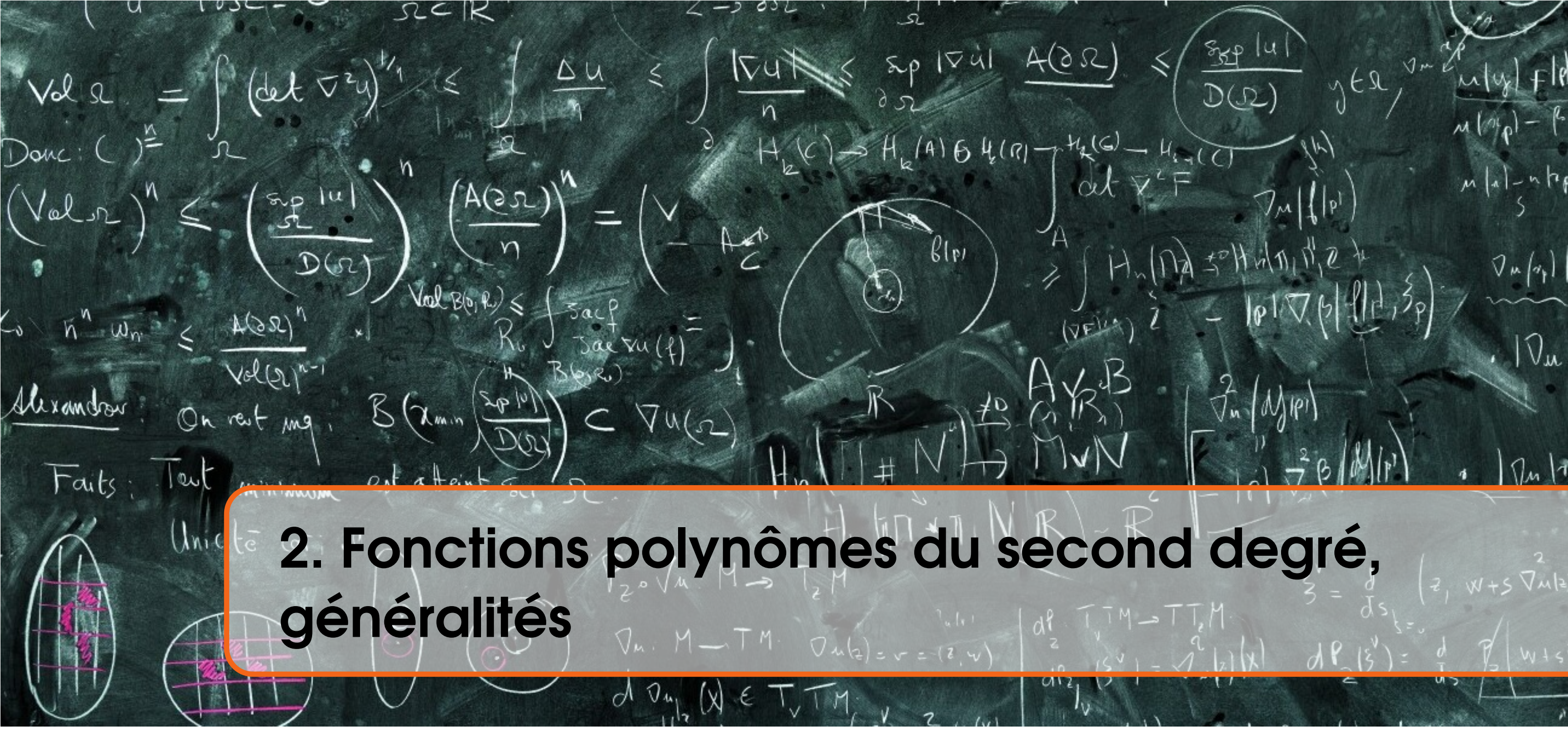
■

Exercice 1.9 On a reproduit, ci-dessous, le tableau des valeurs de la température T à Antananarivo (capitale de Madagascar), exprimée en °Celsius, t heures après minuit, un jour donné.

t	6	9	13
$T(t)$	19	25	31

Dans chaque groupe d'affirmations $A-B-C$, $D-E-F$ et $G-H-I$, une unique affirmation est vraie. Sans justifier, déterminer les trois affirmations vraies.
— **Affirmation A.** La température n'a fait qu'augmenter entre 6h et 13h.
— **Affirmation B.** Il est possible que la température ait baissé entre 6h et 9h.
— **Affirmation C.** La température maximale est de 13°C sur la période donnée.
— **Affirmation D.** La température a augmenté plus vite entre 6h et 9h.
— **Affirmation E.** La température a augmenté plus vite entre 9h et 13h.
— **Affirmation F.** La température a augmenté à la même vitesse sur ces deux périodes.
— **Affirmation G.** La température est proportionnelle au temps.
— **Affirmation H.** La représentation graphique de la fonction T est une droite.
— **Affirmation I.** Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

■



2. Fonctions polynômes du second degré, généralités

Exercice 2.1 Toutes les expressions de fonctions suivantes correspondent à des fonctions du second degré. Indiquer les valeurs des coefficients a, b et c pour chacune d'entre elles. Préciser ensuite (sans tracer la représentation graphique de ces fonctions) si la courbe est tournée vers le haut, ou vers le bas.

1. $f_1(x) = 10x^2 + 100x + 1\,000$.
2. $f_2(x) = -x^2 - 100x + 4\,500$.
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + 48$.
4. $f_4(x) = 4x - x^2$.
5. $f_5(x) = (x-2)(x+1)$.
6. $f_6(x) = (2-x)(1-3x)$.
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{2}(x+10)(x+8)$.
8. $f_8(x) = -2(x+1)(3-x)$.

■

Exercice 2.2 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 32$.

1. Donner les valeurs de a, b et c.
2. La parabole représentant f est-elle orientée vers le haut ou vers le bas ?
   Justifier votre réponse à l'aide de la question précédente.
3. Calculer les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Calculer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.
5. a. Factoriser l'expression de $f(x)$. En déduire la résolution de l'équation $f(x) = 0$.
   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
6. Tracer, à main levée, l'allure générale de la parabole représentant f.

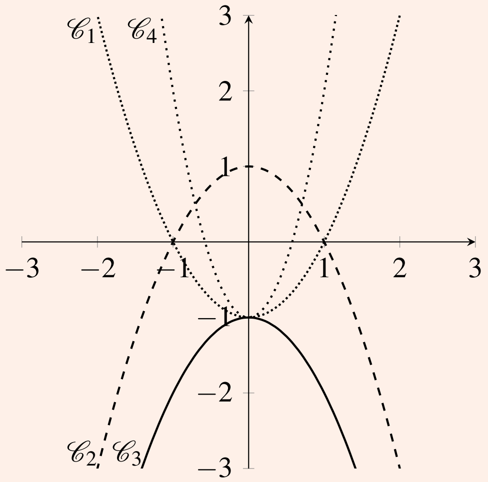
■

Exercice 2.3 Reprendre les mêmes questions que l'exercice précédent, avec :

— La fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 32x$.
— La fonction g définie par $g(x) = x^2 - 4x$.
— La fonction h définie par $h(x) = x^2 - 6x + 9$.
Indication : On rappellera que la factorisation de $a^2 - 2ab + b^2$ est $(a-b)^2$.
— La fonction i définie par $i(x) = 4x^2 + 12x + 9$.
Indication : On rappellera que la factorisation de $a^2 + 2ab + b^2$ est $(a+b)^2$.

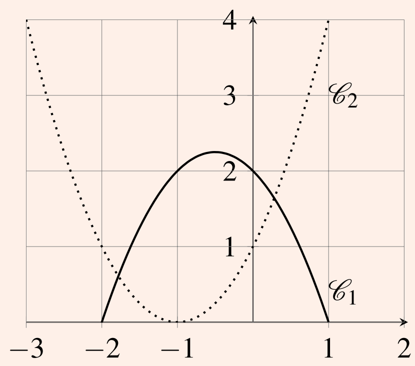
■

Exercice 2.4 Toutes les fonctions ci-dessous ont une expression de la forme $f(x) = ax^2 + c$. Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.



1. $f(x) = -1 - x^2$.
2. $g(x) = 3x^2 - 1$.
3. $h(x) = x^2 - 1$.
4. $i(x) = -x^2 + 1$.

Exercice 2.5 Ces courbes représentent deux fonctions du second degré. Retrouver leurs expressions sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, b et c sont trois réels à déterminer.



Exercice 2.6 Un producteur estime que le coût de production de q tonnes de tomates (exprimé en centaines d'euros) peut être modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;30]$ par :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^2 + 48$$

1. Quelle quantité de tomates peut produire le producteur au maximum ? au minimum ?
2. Calculer $C(12)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
3. Résoudre l'équation $C(q) = 240$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
4. Calculer les coordonnées du sommet de cette parabole. Ce sommet correspond-il a un maximum ou à un minimum ? Justifier brièvement votre réponse.
5. Calculer le taux de variation du coût, entre 12 tonnes et 18 tonnes produites.

Exercice 2.7 La fonction de satisfaction d'un élève, pour son travail de recherche, est modélisée par la fonction définie par :

$$S(t) = 25t\left(1 - \frac{1}{16}t\right)$$

où t est le temps d'étude (en heures par jour) et $S(t)$ le pourcentage de satisfaction.

1. Résoudre l'équation $S(t) = 0$. En déduire l'intervalle du temps d'étude de l'élève.
2. Au bout de dix heures, l'élève n'a plus envie de travailler. Quel est son pourcentage de satisfaction ?
3. Développer l'expression de $S(t)$, et identifier les coefficients a, b et c. En déduire :
   — L'équation de l'axe de symétrie de la parabole.
   — Les coordonnées du sommet de la parabole.
   — L'allure de la parabole représentant S.
   — Le tableau de variations de S.
4. Dans cette question, on cherche à résoudre l'équation $S(t) = 75$.
   a. Développer l'expression $-\frac{25}{16}(t-4)(t-12)$.
   b. En déduire que l'équation $S(t) = 75$ est équivalente à l'équation :
   $$-\frac{25}{16}(t-4)(t-12) = 0$$
   c. En déduire la résolution de l'équation $S(t) = 75$, puis interpréter ce résultat.

3. Fonctions polynômes du second degré, factorisations

Exercice 3.1 On dira qu'un nombre réel a est *racine* d'un polynôme f si $f(a) = 0$. Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. Le nombre réel -1 est racine du polynôme défini par $P(x) = -x^2 + x + 2$.
2. Le nombre réel 2 est racine du polynôme défini par $P(x) = -2x^2 + 7x - 6$.
3. Le nombre réel -2 est racine du polynôme défini par $f(t) = 5t^2 + t - 2$.

■

Exercice 3.2 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 5$. On admet que l'expression de f ne peut pas se factoriser. On note $\mathscr{C}$ la parabole représentant f dans un repère, dont on va chercher à tracer l'allure.

1. La parabole est-elle orientée vers le haut ou vers le bas ? Justifier votre réponse.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de f sur $\mathbb{R}$?
3. Donner les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
4. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.

■

Exercice 3.3 Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions suivantes, dont les expressions ne peuvent se factoriser.

1. f est définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
2. f est définie par $f(x) = -2x^2 + x - 2$.
3. f est définie par $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.
4. f est définie par $f(x) = -4x^2 - x - 1$.

■

Exercice 3.4 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$. On note $\mathscr{C}$ la parabole représentant f dans un repère, dont on va chercher à tracer l'allure.

1. La parabole est-elle orientée vers le haut ou vers le bas ? Justifier votre réponse.
2. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = 3(x+2)^2$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de f sur $\mathbb{R}$?
4. Donner les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
5. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.

■

Exercice 3.5 Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions suivantes :
1. f est définie par $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = 3(x+1)^2$.
2. f est définie par $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = -(x-1)^2$.
3. f est définie par $f(x) = -0,5x^2 - 4x - 8$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = -0,5(x+4)^2$.
4. f est définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = 2(x-1)^2$.

■

Exercice 3.6 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$. On note $\mathscr{C}$ la parabole représentant f dans un repère, dont on va chercher à tracer l'allure.
1. La parabole est-elle orientée vers le haut ou vers le bas ? Justifier votre réponse.
2. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = 2(x+1)(x-4)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signes de f.
4. Donner les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
5. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.

■

Exercice 3.7 Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions suivantes :
1. f est définie par $f(x) = x^2 - 1$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = (x-1)(x+1)$.
2. f est définie par $f(x) = x^2 - 7x + 12$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = (x-3)(x-4)$.
3. f est définie par $f(x) = x^2 - x - 2$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = (x+1)(x-2)$.
4. f est définie par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.
   On montrera d'abord que f peut aussi s'écrire $f(x) = -2(x-1)(x-2)$.

■

Exercice 3.8 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.
1. Déterminer, à tâtons, une racine simple de f. Justifier votre réponse.
2. On admet que f admet une factorisation double, du type :
$$f(x) = 2(x-a)(x-b)$$
   où a est la racine simple trouvée en question précédente.
   a. Développer $2(x-a)(x-b)$, en remplaçant a par la racine trouvée précédemment, puis montrer que $f(x) = 2x^2 + (-2b-2)x + 2b$.
   b. En déduire la valeur de b, puis une factorisation de f.

■

Exercice 3.9 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x-11)$.
1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le tableau de signes de f, puis les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

■

Exercice 3.10 Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions suivantes :

1. f est définie par $f(x) = (x+1)(x+5)$.
2. f est définie par $f(x) = (x+1)(-2x+5)$.
3. f est définie par $f(x) = (-2x+1)(3x+1)$.
4. f est définie par $f(x) = x^2 - 3x$.
   On factorisera d'abord l'expression de f.
5. f est définie par $f(x) = (x+1)^2 - (x+1)(x-3)$.
   On factorisera d'abord l'expression de f, sachant que $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$.
6. f est définie par $f(x) = (x+3)^2 - 16$.
   On factorisera d'abord l'expression de f, à l'aide de l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
7. f est définie par $f(x) = x^2 - 8x + 16$.
   On factorisera d'abord l'expression de f à l'aide de l'identité $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

■

Exercice 3.11 Un agriculteur vend des cartons de pots de miel. Le coût, en euro, de production de x cartons (avec $x \leqslant 120$), est modélisé par le nombre $C(x)$, où C est la fonction définie sur $[0\,;\,120]$ par $C(x) = 0,25x^2 + 500$.

1. Calculer le coût de fabrication de 40 cartons.
2. On considère le bénéfice, en euro, réalisé après la production et la vente de x cartons.
   On admet qu'il est modélisé par le nombre $B(x)$, où B est la fonction définie sur $[0\,;\,120]$ par : $B(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$.
   Montrer que pour tout x appartenant à $[0\,;\,120]$, $B(x) = -0.25(x-20)(x-100)$.
3. Déterminer le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;\,120]$.
4. Combien de cartons doit produire et vendre l'apiculteur pour réaliser un bénéfice ?
5. Déterminer le nombre de cartons à produire et vendre pour maximiser le bénéfice.

■

Exercice 3.12 En classe de Première STI2D, on ne sait pas encore factoriser toutes les expressions du second degré : on peut parfois trouver un facteur commun, essayer de factoriser à l'aide d'une identité remarquable, mais ce n'est pas toujours évident ou fructueux.
En réalité, il existe une méthode qui permet de trouver les éventuelles racines d'un polynômes du second degré écrit sous une forme du type $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$:

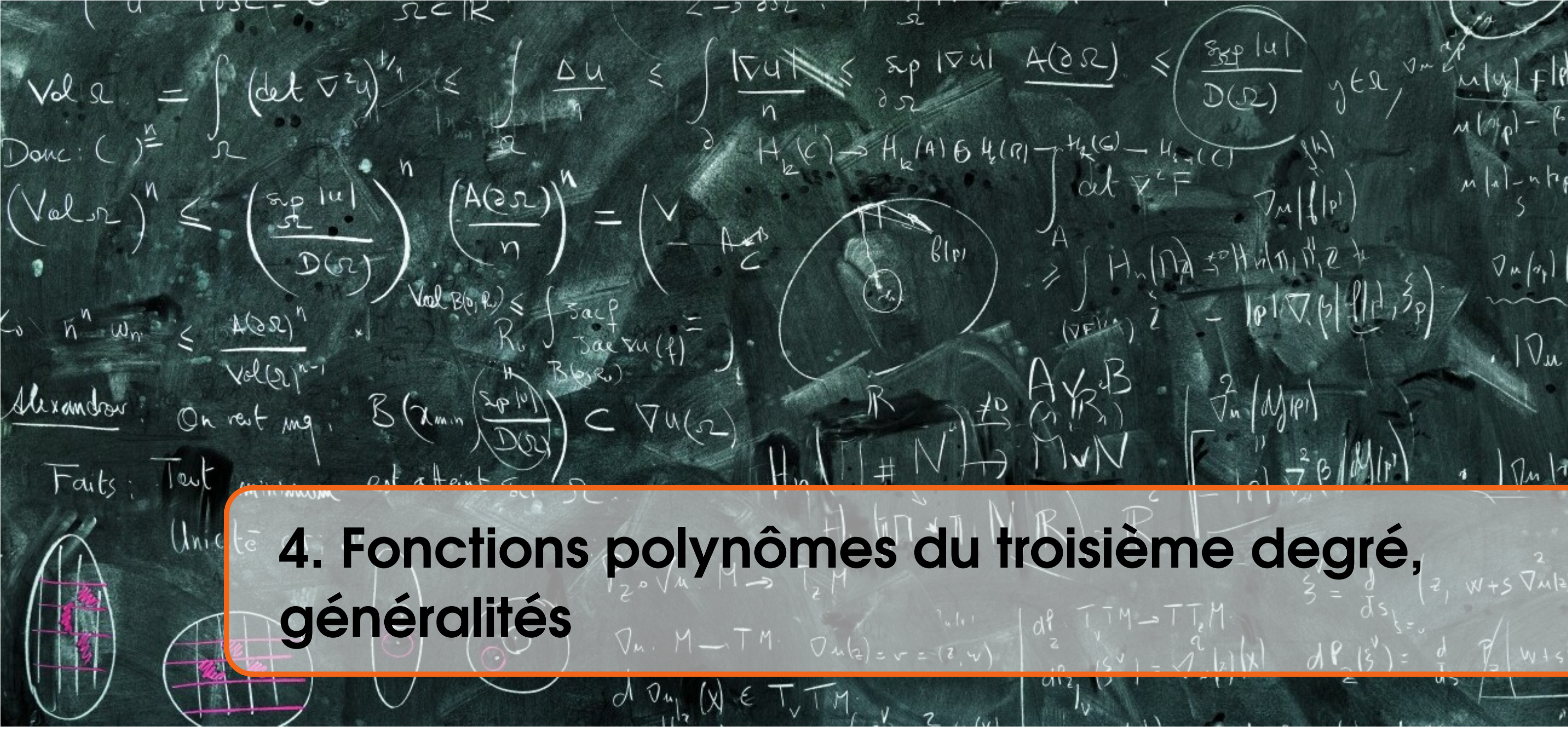
① On identifie les coefficients a, b et c, et on calcule le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$.

② — Si $\Delta > 0$, f a deux racines simples $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
— Si $\Delta = 0$, f a une unique racine double $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
— Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine réelle.

Pour chacune des expressions suivantes, appliquer la méthode précédente pour trouver les éventuelles racines de f. Ensuite, à l'aide de l'une des trois premières propriétés du cours, écrire une factorisation lorsque cela est possible.

1. $x^2 - 5x + 6$.
2. $x^2 - 6x + 9$.
3. $x^2 + 4x + 5$.
4. $2x^2 + 3x - 5$.
5. $3x^2 + 12x + 12$.
6. $-3x^2 + 2x - 1$.
7. $-x^2 + 4x - 1$.
8. $-2x^2 - 8x - 8$.
9. $5x^2 + x + 7$.

■



4. Fonctions polynômes du troisième degré, généralités

Exercice 4.1 Dans la liste ci-dessous, identifier toutes les fonctions qui sont des fonctions polynômes du troisième degré. Pour celles-ci, indiquer les valeurs des coefficients a, b, c et d. Pour les autres, expliquer brièvement pourquoi elles ne sont pas du troisième degré.

1. $f_1(x) = x^3$.
2. $f_2(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.
3. $f_3(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $f_4(x) = x^3 - 6x + 1$.
5. $f_5(x) = 4x^2 - 12x + 16$.
6. $f_6(x) = 1\,500x^3 - x$.
7. $f_7(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.
8. $f_8(x) = x(x-2)$.
9. $f_9(x) = x^2(x-2)$.
10. $f_{10}(x) = x(x-1)(x-2)$.

■

Exercice 4.2 Suite à une épidémie, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé pour tout t appartenant à $[0\,;45]$ par $f(t) = 45t^2 - t^3$.

1. Quelle est la durée de l'étude ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle, au bout de 20 jours.
3. Déterminer le temps nécessaire pour qu'il n'y ait plus de personnes malades.

■

Exercice 4.3 Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0\,;20]$. On définit les trois fonctions suivantes (les montant seront exprimés en milliers d'euros, et x désigne la quantité de produit exprimée en tonnes) :

— La recette totale est donnée par $r(x) = 108x$.
— Le coût total de production est donné par $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$.
— Le bénéfice est la différence entre la recette totale et le coût total de production.

1. À l'aide de la fonction r, déterminer le prix de vente d'une tonne de produit.
2. On rappelle que :

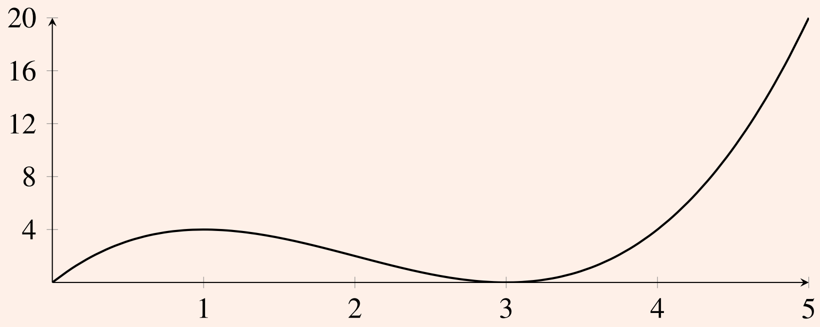
$$B(x) = r(x) - C(x)$$

Vérifier que pour tout réel x appartenant à $[0\,;20]$, on a : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 192x$.

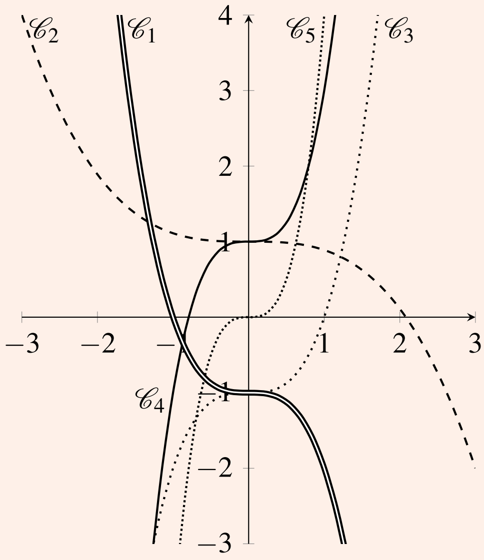
■

Exercice 4.4 On a observé sur 5 ans que la note (sur 20) d'un service au bout de x année(s) est donnée par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Vérifier par le calcul que la phrase « Le service obtient au bout de 4 ans et demi la note de $10,125$ sur 20 » est exacte.
2. Quelle note le service obtient-il au bout d'une année ?
3. Justifier, par le calcul, que le service donne pleine satisfaction au bout des 5 années.
4. Estimer graphiquement à quel(s) moment(s) le service n'a donné aucune satisfaction.



Exercice 4.5 Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.



1. $f(x) = 2x^3 + 1$.
2. $g(x) = x^3 - 1$.
3. $h(x) = -x^3 - 1$.
4. $i(x) = 4x^3$.
5. $j(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 1$.

Exercice 4.6 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7x - 6$.

1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = (x-3)(x+1)(x+2)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.7 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8$.
1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = -2(x+1)(x+2)(x-2)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.8 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 34x^2 + 160x + 200$.
1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = 2(x+2)(x+5)(x+10)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.9 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 + 3x$.
1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = -3x(x-1)(x+1)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.10 Une entreprise fabrique et commercialise des trottinettes. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 trottinettes, vendue 200 € l'unité. Le coût total de fabrication (en euros) de x trottinettes est modélisé par la fonction C définie par :

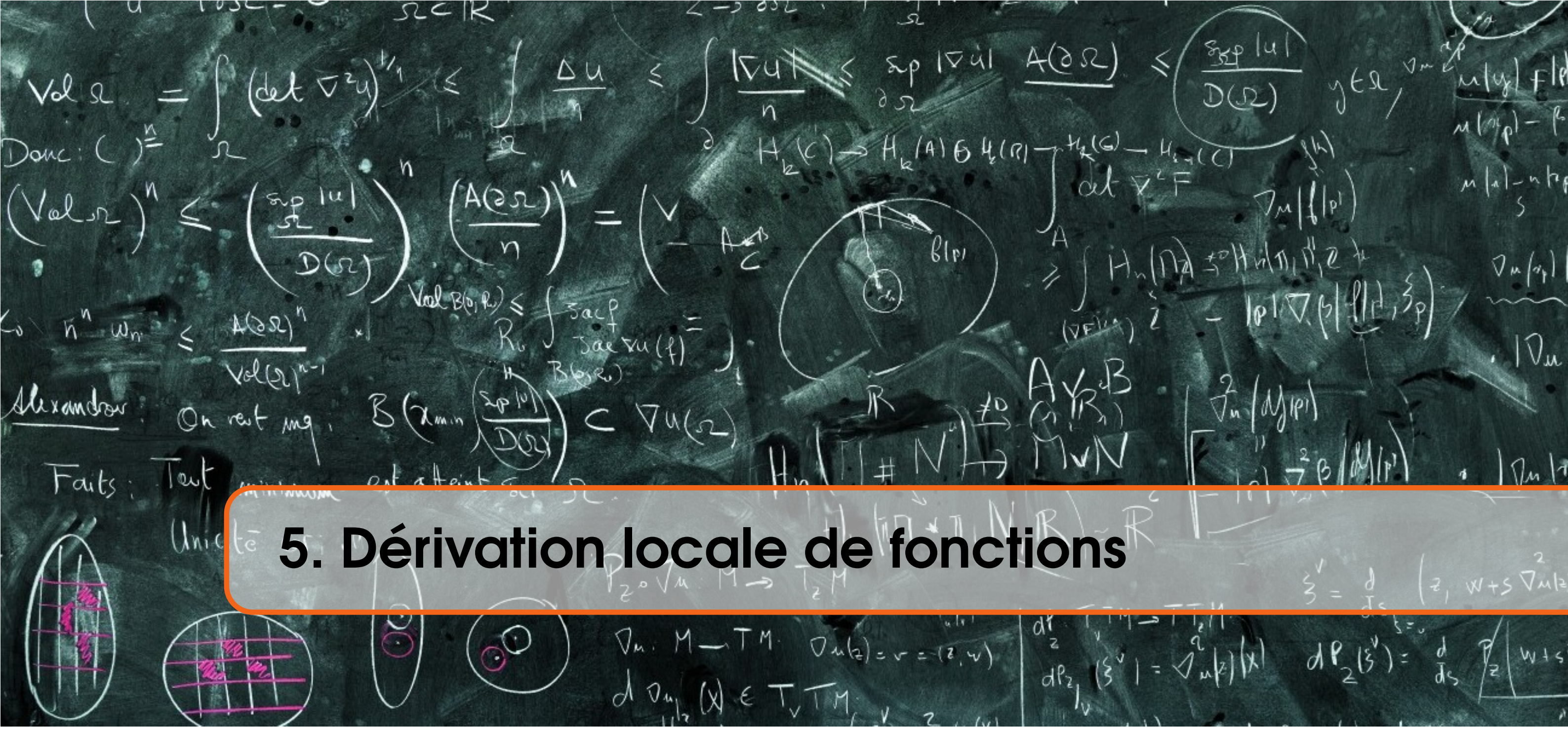
$$C(x) = 2x^3 - 50x^2 + 452x$$

1. Calculer, pour 12 trottinettes vendues, le coût de fabrication, la recette et le bénéfice.
2. On note $R(x)$ et $B(x)$ la recette et le bénéfice pour x trottinettes vendues.
   a. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
   b. Sachant que $B(x) = R(x) - C(x)$, montrer que le bénéfice réalisé pour x trottinettes vendues est $B(x) = -2x^3 + 50x^2 - 252x$.
3. a. Montrer que $B(x) = -2x(x-7)(x-18)$.
   b. Étudier le signe de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;21]$.
   c. Interpréter le signe de $B(x)$ dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4.11 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $x^3 = -8$.
2. $x^3 = -1$.
3. $x^3 = 64$.
4. $x^3 = -64$.
5. $9x^3 + 72 = 0$.
6. $9(x-2)^3 + 72 = 0$.

Exercice 4.12 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
1. $2x^3 - 6x^2 + 4x = 0$.
   On montrera d'abord que $2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x-1)(x-2)$.
2. $x^3 - 7x + 6 = 0$.
   On montrera d'abord que $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$.
3. $3x^3 + x^2 - 38x + 24 = 0$.
   On montrera d'abord que $3x^3 + x^2 - 38x + 24 = (3x-2)(x-3)(x+4)$.



5. Dérivation locale de fonctions

Exercice 5.1 On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-3,1$	$-3,01$	-3	$-2,99$	$-2,9$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de -3, $f(x)$ prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$.

■

Exercice 5.2 On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-1,1$	$-1,01$	-1	$-0,99$	$-0,9$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de -1, $f(x)$ prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

■

Exercice 5.3 On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

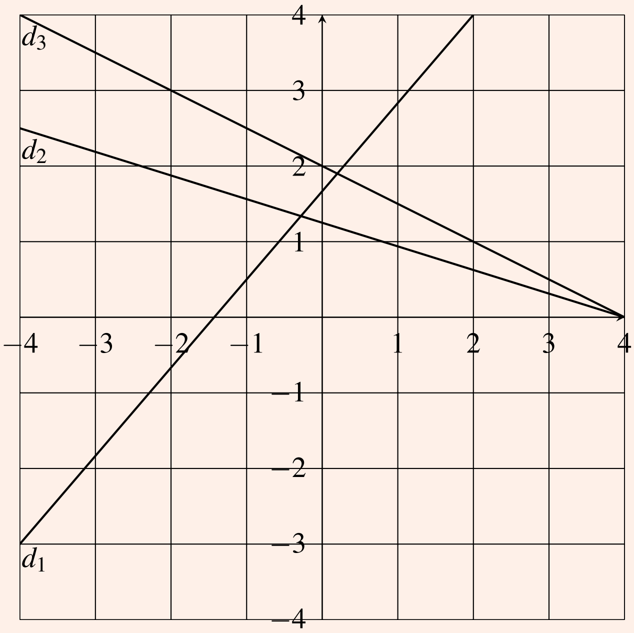
1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-0,1$	$-0,01$	0	$0,01$	$0,1$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de 0, que peut-on dire des valeurs prises par $f(x)$? Que peut-on déduire sur la valeur de $\lim\limits_{x\to0} f(x)$?

■

Exercice 5.4 On considère les trois droites d_1, d_2 et d_3 tracées ci-dessous.



1. Déterminer les coefficients directeurs, puis les équations des droites tracées.
2. Tracer, dans le repère ci-dessus, les droites d_4 et d_5 d'équations $y = x + 1$ et $y = 3 - \frac{1}{3}x$.

Exercice 5.5 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 1$.

1. Calculer $f(9)$, puis montrer que $f(9+h) = 2h + 17$.
2. En déduire la valeur de $\dfrac{f(9+h) - f(9)}{h}$, puis celle de $f'(9)$.

Exercice 5.6 Reprendre les mêmes questions que l'exercice précédent, avec :

1. La fonction définie par $f(x) = 6x + 4$, afin de calculer $f'(1)$.
2. La fonction définie par $f(x) = -3x + 4$, afin de calculer $f'(4)$.
3. La fonction définie par $f(x) = 5 - x$, afin de calculer $f'(0)$.

Exercice 5.7 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. Calculer $f(3)$, puis montrer que $f(3+h) = h^2 + 6h + 9$.
2. En déduire la valeur de $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$, puis celle de $f'(3)$.

Exercice 5.8 Reprendre les mêmes questions que l'exercice précédent, avec :

1. La fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x + 4$, afin de calculer $f'(0)$.
2. La fonction définie par $f(x) = x^2 - x + 1$, afin de calculer $f'(1)$.
3. La fonction définie par $f(x) = x^2 + x$, afin de calculer $f'(10)$.

Exercice 5.9 On rappelle que, si f est dérivable au point d'abscisse a, une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

1. Au vu du résultat obtenu à l'exercice 5, montrer qu'une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 9 est donnée par :

$$y = 2x - 1$$

2. De même, à l'aide des résultats obtenus à l'exercice 6, donner les équations des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points dont l'abscisse est précisée.
3. Les fonctions évoquées dans les exercices 5 et 6 sont toutes du même « type » : lequel ? En déduire une propriété que l'on pourrait écrire quant aux tangentes aux courbes représentant de telles fonctions.

Exercice 5.10 On rappelle que, si f est dérivable au point d'abscisse a, une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par :

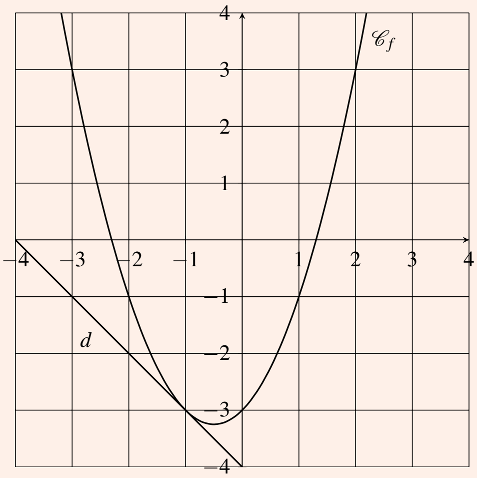
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

1. Au vu du résultat obtenu à l'exercice 7, montrer qu'une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 est donnée par :

$$y = 6x - 9$$

2. De même, à l'aide des résultats obtenus à l'exercice 8, écrire les équations des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points dont l'abscisse est précisée.

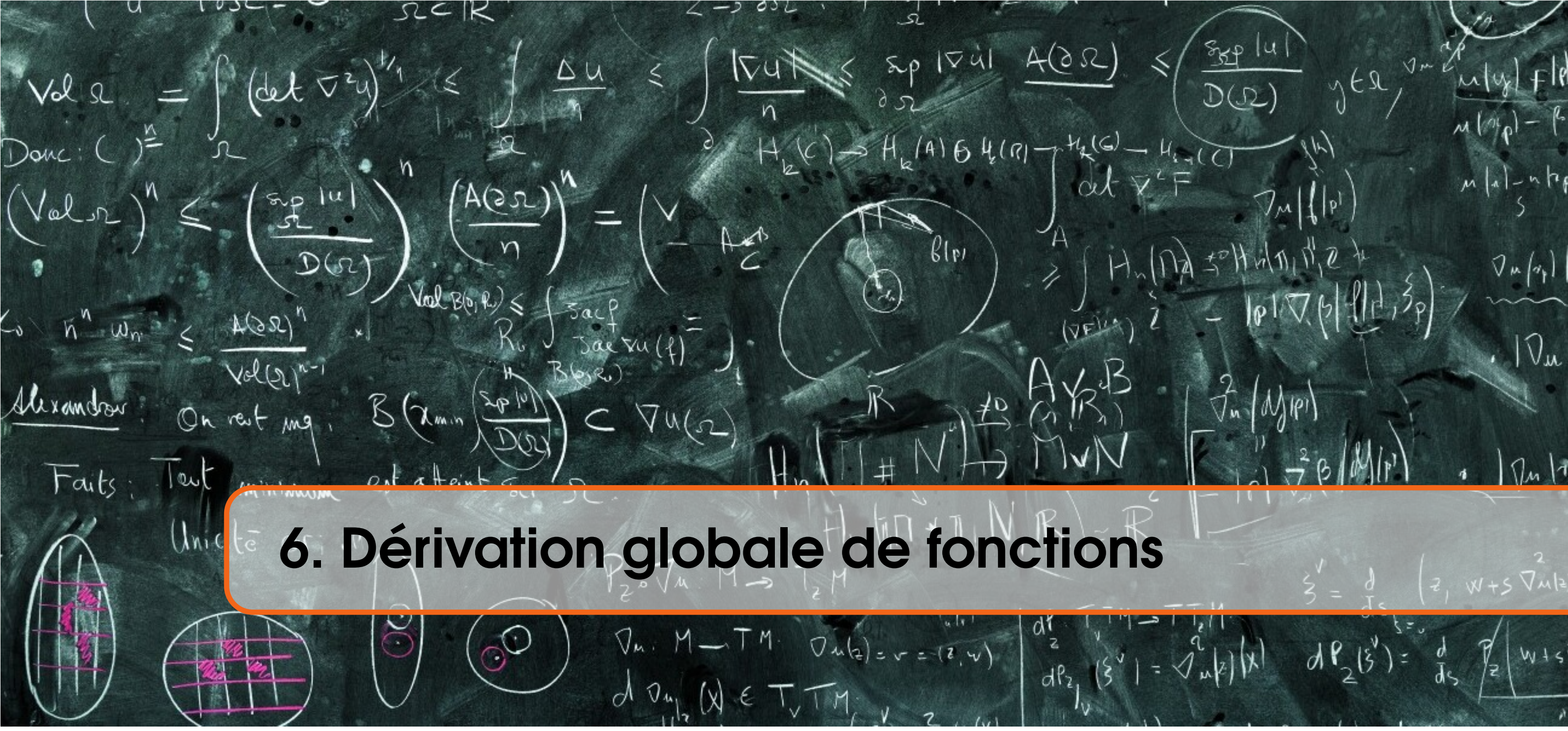
Exercice 5.11 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.



1. Sur le graphique, la droite d passe par les points de coordonneés $(-4\,;\,0)$ et $(0\,;\,-4)$.
   a. Déterminer l'équation de d.
   b. Que semble-t-elle représenter pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2. Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 a pour équation :

$$y = -x - 4$$

L'hypothèse faite en question 1b était-elle vraie ?



6. Dérivation globale de fonctions

Exercice 6.1 Déterminer les dérivées des fonctions proposées.

1. $f(x) = 2 - 2x$.
2. $f(x) = 2x - 2$.
3. $f(x) = 3x^{23} + 3x - 32,23$.
4. $f(x) = 3x^{32} + 32x^3$.
5. $f(x) = \frac{1}{32}x^{32} + \frac{1}{3}x^3$.
6. $f(x) = 6x^9 - 3x^2 - x - 1$.
7. $f(x) = -2x^5 + 6x^2 - 4x - 11$.
8. $f(x) = 1 + x + \sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x^3$.
9. $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$.
10. $f(x) = x + 10\sqrt{2}$.
11. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + x$.
12. $f(x) = 0,3 - 1,1x - 1,5x^4$.
13. $f(x) = -2,5x - 22,1x^{10}$.
14. $f(x) = 0,25x^4 + 0,5x^2$.
15. $f(x) = \sqrt{5}x^5$.
16. $f(x) = 100x^{99} - 100$.
17. $f(x) = 1,234x^{1\,000}$.
18. $f(x) = \sqrt{11}$.
19. $f(x) = 11^2$.
20. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{1\,001}x^{1\,001}$.

■

Exercice 6.2 Déterminer les dérivées des fonctions proposées.

1. $f(x) = 4x^2 + 5x - 9$.
2. $f(x) = 6x^2 + 102x - 221$.
3. $f(x) = -3x^2 + 4x - 7$.
4. $f(x) = -4x^2 - x + 5$.
5. $f(x) = 455x^2 - 911$.
6. $f(x) = -3,5x^2 + 7$.
7. $f(x) = -3,5x^2 + 7x$.
8. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + x + 1$.
9. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.
10. $f(x) = -\frac{9}{7}x^2 - \frac{1}{13}x + \frac{2}{227}$.
11. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x - 9$.
12. $f(x) = -2x^3 + x^2 - 21x + 7$.
13. $f(x) = -5x^3 + 6x^2 + 10x + 10$.
14. $f(x) = 4x^3 + 100x^2 - 1$.
15. $f(x) = 6x^3 - 15x + 81,4$.
16. $f(x) = -3x^3 - 3x^2 - 3x - 3$.
17. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.
18. $f(x) = \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + 1$.
19. $f(x) = 1 - x - x^2 - x^3$.
20. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{23}{3}$.

■

Exercice 6.3 Déterminer les dérivées des expressions proposées (il y a plusieurs méthodes pour les fonctions 1 à 9, et pour la fonction 18).

1. $(2x-3)(4x+5)$.
2. $\left(x^2+4x-1\right)(x-1)$.
3. $(3x+2)\left(x^3-6x+1\right)$.
4. $x^2(2x+1)$.
5. $(5-x)(x-5)$.
6. $(2x+1)\left(x^9-x^3+1\right)$.
7. $(x-7)(2-5x)$.
8. $(4,5x+2,25)(x-1)$.
9. $(10x+3)(232x+555)$.
10. $\frac{2x+1}{2x-3}$.
11. $\frac{x}{2x+1}$.
12. $\frac{x+1}{x-1}$.
13. $\frac{2}{4x+1}$.
14. $\frac{x}{x^2+1}$.
15. $\frac{x^2+1}{x-2}$.
16. $\frac{x^4-2x-1}{x+5}$.
17. $\frac{x^3-x^2}{x+1}$.
18. $\frac{x^3+x^2}{x+1}$.

■

Exercice 6.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-2$.
1. Déterminer la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f', puis en déduire les variations de f.
3. La fonction f admet-elle un extremum ? Justifier votre réponse.

■

Exercice 6.5 Reprendre les questions de l'exercice précédent, avec les fonctions suivantes.
1. Si f est la fonction définie par $f(x)=x^2+5x+6$.
2. Si f est la fonction définie par $f(x)=-6x^2-9$.
3. Si f est la fonction définie par $f(x)=-x^2+5x-1$.
4. Si f est la fonction définie par $f(x)=\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x+1$.

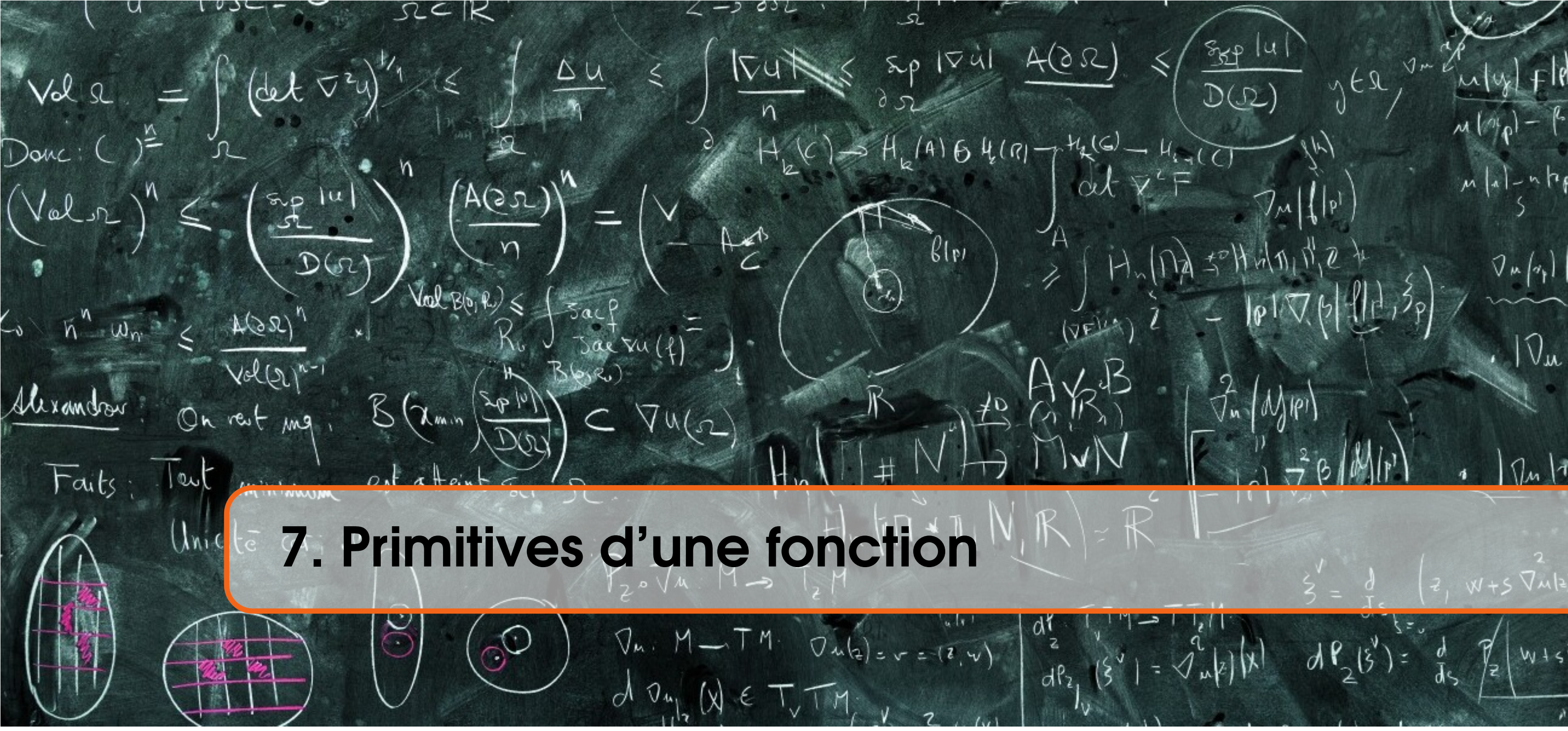
■

Exercice 6.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$.
1. Déterminer la fonction dérivée de f, puis montrer que $f'(x)=(x-1)(x+2)$.
2. Étudier le signe de f', puis en déduire les variations de f.
3. La fonction f admet-elle un extremum ? Justifier votre réponse.

■

Exercice 6.7 Reprendre les questions de l'exercice précédent, avec les fonctions suivantes.
1. Si f est la fonction définie par $f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x+1$.
   On montrera que $f'(x)=-2(x-1)(x+3)$.
2. Si f est la fonction définie par $f(x)=-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{4}x^2-2x+2$.
   On montrera que $f'(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x+4)$.
3. Si f est la fonction définie par $f(x)=-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{11}{6}$.
   On montrera que $f'(x)=-\frac{3}{2}(x-1)(x+2)$.

■



7. Primitives d'une fonction

Exercice 7.1 Dans chaque cas, vérifier si la fonction F est une primitive de f.

1. Si $f(x) = 4$ et $F(x) = 4x + 7$.
2. Si $f(x) = -x$ et $F(x) = -x^2$.
3. Si $f(x) = 3x^2 + 1$ et $F(x) = x^3 + 1$.
4. Si $f(x) = x^3 - 2x$ et $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 3$.

■

Exercice 7.2 Justifier que les fonctions F et G sont deux primitives d'une même fonction. Préciser cette fonction.

$$F(x) = (x-1)(x+2) \qquad \text{et} \qquad G(x) = x^2 + x + 1$$

■

Exercice 7.3 Justifier que les fonctions F et G sont deux primitives d'une même fonction. Préciser cette fonction.

$$F(x) = \frac{3x+7}{x+1} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \frac{x+5}{1+x}$$

■

Exercice 7.4 Associer chaque fonction (à gauche) à une primitive (à droite).

$$\begin{array}{rcl}
x \mapsto 60x^2 - \dfrac{14}{3}x. \quad \bullet & & \bullet \quad x \mapsto \dfrac{1}{3}x^5 - 3x^2 + 7. \\
x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right). \quad \bullet & & \bullet \quad x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right). \\
x \mapsto \dfrac{5}{3}x^4 - 6x. \quad \bullet & & \bullet \quad x \mapsto 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right). \\
x \mapsto -4\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right). \quad \bullet & & \bullet \quad x \mapsto 20x^3 - \dfrac{7}{3}x^2.
\end{array}$$

■

Exercice 7.5 On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5$.

1. Montrer que la fonction définie par $G(x) = \frac{1}{8}x^4 + 5x - 3$ est une primitive de f.
2. Trouver l'unique primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

■

Exercice 7.6 On définit la fonction f par $f(x) = 1 + 2\sin x$.

1. Montrer que la fonction définie par $G(x) = x - 2\cos x$ est une primitive de f.
2. Trouver l'unique primitive F de f telle que $F(\pi) = \pi$.

■

Exercice 7.7 La vitesse d'un avion de chasse est donnée par une fonction définie par $v(t) = -1,5t^2 + 48t + 200$. On note $x(t)$ la distance parcourue par l'avion au bout de t secondes, et on rappelle que x est une primitive de v.

1. Montrer que les fonctions définies par $g(t) = -0,5t^3 + 24t^2 + 200t + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ sont des primitives de v.
2. Justifier, physiquement puis mathématiquement, que $\mathrm{C}^{\mathrm{te}} = 0$.
3. Quelle distance aura parcouru l'avion au bout d'une seconde ?

■

Exercice 7.8 La voiture de course la plus rapide peut passer de 0 à 100 km.h^{-1} en $2,4$ s.

1. Calculer son accélération a, supposée constante.
2. Déterminer la vitesse v de la voiture, en fonction du temps.
3. Déterminer la distance d parcourue par la voiture, en fonction du temps.
4. Quelle distance aura parcouru la voiture en passant de 0 à 100 km.h^{-1} ?

■

Exercice 7.9 Un projectile est lancé sans vitesse initiale à 500 m d'altitude. Il tombe vers la Terre sous l'effet de la pesanteur, dans un mouvement rectiligne. Son accélération est égale à $9,81$ m.s^{-2}.

1. Déterminer sa vitesse v, en fonction du temps.
2. Déterminer la distance d qu'il a parcouru, en fonction du temps.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à quel instant le projectile touchera le sol. Quelle sera alors sa vitesse ?

■

Exercice 7.10 Un cycliste démarre sa course avec une accélération donnée pendant les 20 premières secondes par :

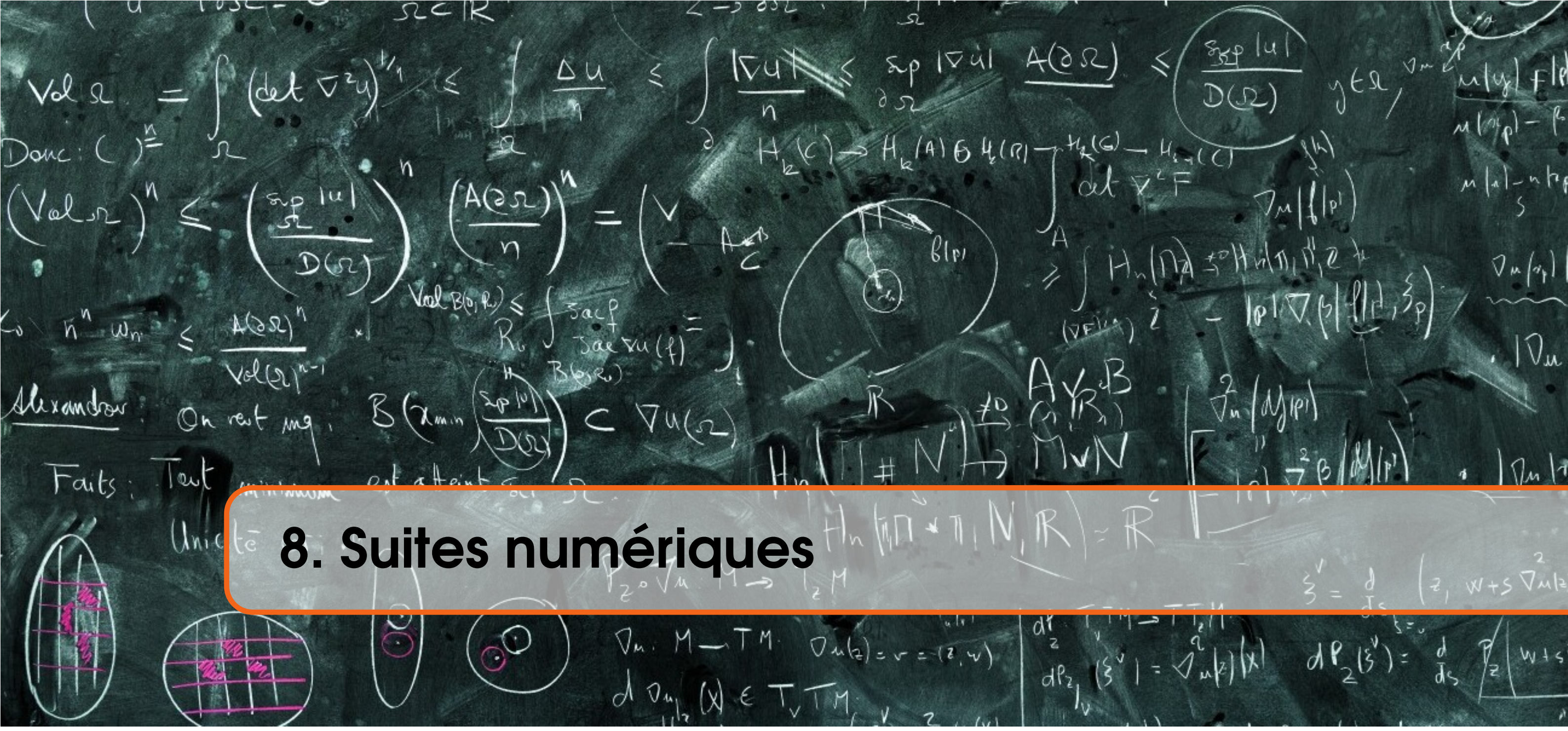
$$a(t) = -\frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{4}t$$

où t est le temps écoulé depuis le début de sa course, et l'accélération est donnée en m.s^{-2}.

1. Déterminer sa vitesse v, en fonction du temps.
2. Déterminer la distance d qu'il a parcouru, en fonction du temps.
3. Quelle distance aura parcouru le cycliste au bout de 20 secondes ?

■

II Analyse réelle (suites)



8. Suites numériques

Exercice 8.1 Trouver, en justifiant, les deux termes suivants pour chaque suite.

① 0, 3, 6, 9, 12.
② 1, 2, 4, 8, 16.
③ 1, 3, 6, 10, 15.
④ 9, -3, 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$.
⑤ -1, 1, -1, 1, -1.
⑥ 1, 1, 2, 3, 5.

■

Exercice 8.2 Soit u la suite définie par $u_n = 2n + 11$.
1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de cette suite ?

■

Exercice 8.3 Soit u la suite définie par $u_n = -2n^2 - 6n - 4$.
1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de cette suite ?

■

Exercice 8.4 Soit u la suite définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de cette suite ?

■

Exercice 8.5 Soit u la suite définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 4 - u_n^2$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer u_4.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de cette suite ?

■

Exercice 8.6 On considère une suite u définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout entier naturel n. Trouver une astuce pour calculer rapidement u_{60}. ■

Exercice 8.7 Une entreprise compte 20 salariés à la fin de l'année 2022. On cherche à modéliser par une suite S_n le nombre de salariés à la fin de l'année $2022+n$.

1. Donner la valeur de S_0.
2. Dans chacun des cas suivants, écrire la relation de récurrence entre S_{n+1} et S_n, sur le même modèle que l'exemple a. :
   a. Chaque année, l'entreprise recrute 31 salariés : $S_{n+1} = S_n + 31$.
   b. Chaque année, 8 salariés quittent l'entreprise.
   c. Chaque année, l'entreprise perd les 10% de ses salariés.
   d. Chaque année, l'entreprise licencie 1% de ses salariés, et en recrutent 4.

■

Exercice 8.8 Pour chacune des situations suivantes, indiquer si on peut la modéliser par une suite croissante, décroissante ou si on ne peut pas répondre a priori.

1. La température d'un métal à refroidir.
2. L'argent placé sur un livret d'épargne.
3. La population d'un pays.
4. La valeur d'une voiture.

■

Exercice 8.9 Dans cet exercice, on s'intéresse au sens de variation des « suites affines », définies par une expression de la forme $u_n = an+b$, où a et b sont deux nombres réels, et $a \neq 0$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite u définie par $u_n = 100-5n$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite u définie par $u_n = 2n+1$.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = a$.
   b. En déduire le sens de variation de u, suivant la valeur de a.

■

Exercice 8.10 Dans cet exercice, on s'intéresse au sens de variation de suites « quelconques ».

1. Montrer que la suite u définie par $u_n = n^2+1$ est croissante.
2. Montrer que la suite u définie par $u_n = 2n-n^2$ est décroissante pour $n \geqslant 1$.

■

Exercice 8.11 En 2019, le chiffre d'affaires d'un restaurant était de 300 000 €.

On modélise le chiffre d'affaires de ce restaurant (exprimé en milliers d'euros) pendant l'année $2019+n$ par le n-ème terme, u_n de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 300 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1,2\times u_n - 50.$$

1. Montrer que le chiffre d'affaires du restaurant sera de 310 000 € en 2020.
2. Calculer u_2. Interpréter ce résultat.
3. Faire une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n). Expliquer la démarche.
4. Si on exécute cet algorithme, à la fin de l'algorithme, k a pour valeur 9.

```
u = 300
k = 0
while u < 500 :
    u = 1,2 * u - 50
    k = k + 1
```

Interpréter ce résultat.

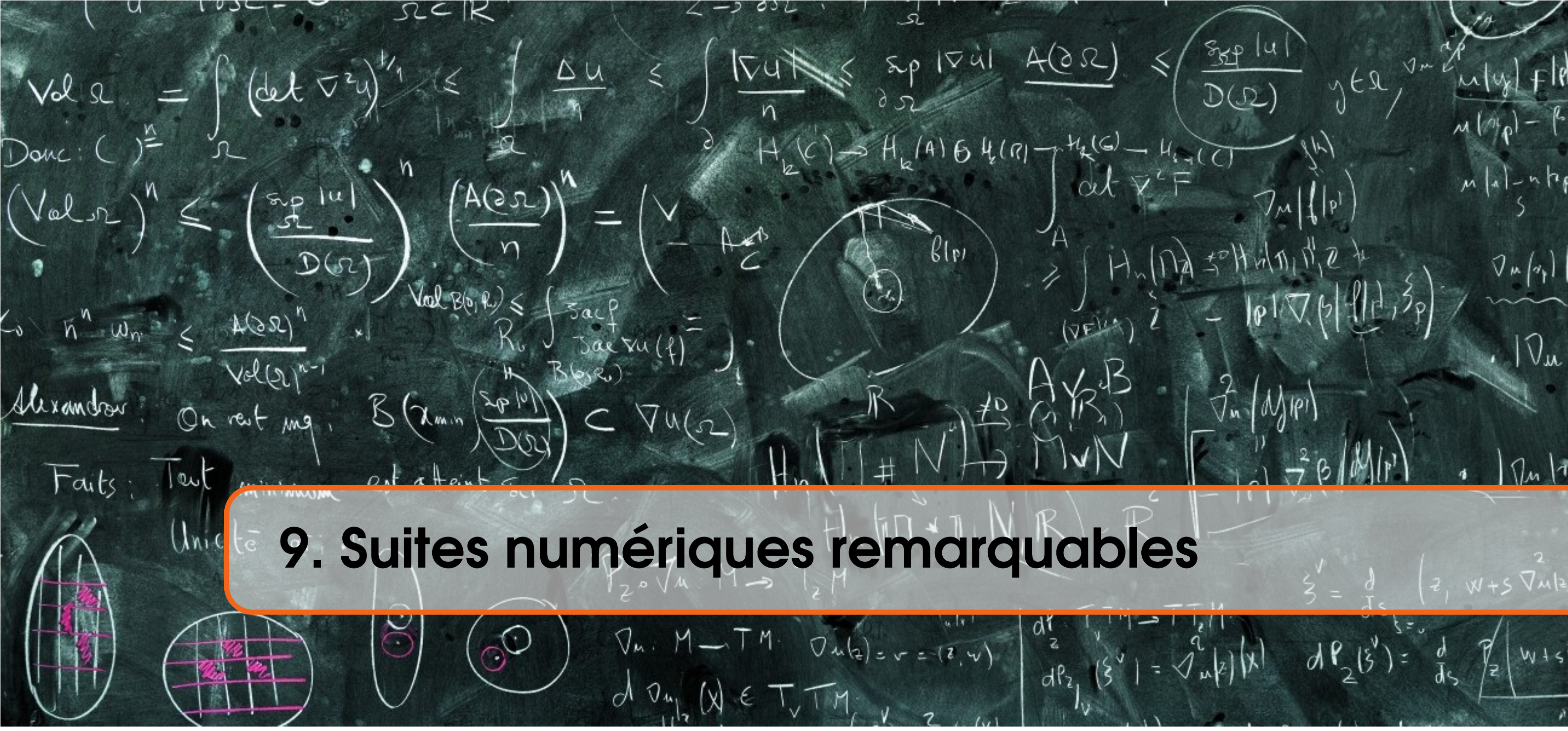
■

Exercice 8.12 « En 2017, les français ont en moyenne produit 513 kg de déchets ménagers par habitant. » d'après le site internet Planetscope.
En 2017, le maire d'une commune obtient 530 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant. L'objectif du maire est de réduire la production de déchets de 1,7 % par an pendant 5 ans, en espérant atteindre la moyenne nationale de 2017. On modélise la situation par la suite (d_n) où d_n représente pour tout entier naturel n la quantité en kg de déchets ménagers moyenne produite par habitant de cette ville durant l'année $2017+n$.

1. Justifier que $d_0 = 530$ et que pour tout entier naturel n on a : $d_{n+1} = 0,983d_n$.
2. Construire le nuage de points de la suite d_n.
3. Quelle devrait être à ce rythme-là, la production en kilogramme de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2019 ? L'objectif du maire est-il atteint ?
4. Le maire souhaite maintenant atteindre la moyenne européenne de 2017 qui était de 487 kg de déchets ménagers par habitant.
   a. Compléter l'algorithme ci-dessous permettant d'obtenir l'année à partir de laquelle l'objectif du maire sera atteint.

```
n = 0
d = 530
while d > ....
    n = ...
    d = ...
return(n)
```

   b. En quelle année l'objectif du maire est-il atteint ?



9. Suites numériques remarquables

Exercice 9.1 Indiquer si la liste de nombres proposés correspond aux premiers termes d'une suite arithmétique, en justifiant. Lorsque c'est le cas, préciser la raison.

① 6, 12, 18, 24. ② 0, 3, 6, 12. ③ 3, 9, 18, 27.

Exercice 9.2 Dans chaque cas, u est une suite arithmétique.

1. On suppose que $u_0 = -1$ et que la raison de u est $r = \frac{1}{4}$. Calculer u_3.
2. On suppose que $u_2 = 18$ et $r = 5$. Calculer u_0.
3. On suppose que $u_{100} = 100$ et $r = 1$. Calculer u_0.
4. On suppose que $u_2 = 10$ et $u_4 = 30$. Donner r et u_0.
5. On suppose que $u_1 = 106$ et $u_4 = 118$. Donner r et u_0.

Exercice 9.3 Le chiffre d'affaires d'une entreprise de téléphonie mobile s'accroît tous les ans de 50 000 €. En 2021, son chiffre d'affaires était de 500 000 €. On note C_n le chiffre d'affaires au cours de l'année $2021 + n$, pour tout entier naturel n.

1. Donner la valeur de C_0.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que C est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
4. Calculer le chiffre d'affaires prévisible pour 2024.

Exercice 9.4 La société Mandine emploie Geoffroy en 2021, pour un salaire de 1 530 €. L'entreprise promet à Geoffroy une augmentation de salaire de 75 € tous les ans. On note S_n le salaire de Geoffroy en $2021 + n$, pour tout entier naturel n.

1. Donner la valeur de S_0.
2. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que S est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
4. En quelle année Geoffroy peut-il espérer gagner plus de 2 000 € ?

Exercice 9.5 Dans un pays imaginaire appelé Absurdistan, on s'intéresse à la population de la capitale Loufok. En 2021, Loufok comptait 100 000 habitants et on estime que chaque année, Loufok perd 25 000 habitants. On note H_n le nombre d'habitants de Loufok en $2021+n$, pour tout entier naturel n.

1. Donner la valeur de H_0.
2. Exprimer H_{n+1} en fonction de H_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que H est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
4. En quelle année Loufok sera-t-elle dépeuplée de tous ses habitants ?

Exercice 9.6 On souhaite rembourser un matériel industriel acheté 100000 €, en cinq annuités notées A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5, qui sont les cinq premiers termes d'une suite arithmétique dont le premier terme est $A_1 = 25\,000$ €. Déterminer la valeur de chacune de ces annuités.

Exercice 9.7 Indiquer si la liste de nombres proposés correspond aux premiers termes d'une suite géométrique, en justifiant. Lorsque c'est le cas, préciser la raison.

① 6, 12, 18, 24.   ② 6, 12, 24, 48.   ③ 6, -12, 24, -48.

Exercice 9.8 Dans chaque cas, u est une suite géométrique.

1. On suppose que $u_0 = 500$ et que la raison de u est $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_3.
2. On suppose que $u_3 = 9\,000$ et $q = 10$. Calculer u_0.
3. On suppose que $u_4 = 100$ et $q = 2$. Calculer u_0.
4. On suppose que $u_2 = 48$ et $u_4 = 192$. Donner q et u_0.
5. On suppose que $u_1 = 32$ et $u_4 = 2\,048$. Donner q et u_0.

Exercice 9.9 La société Mandine emploie Geoffroy en 2021, pour un salaire de 1 530 €. L'entreprise promet à Geoffroy une augmentation de salaire de 11% tous les ans. On note S_n le salaire de Geoffroy en $2021+n$, pour tout entier naturel n.

1. Donner la valeur de S_0.
2. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que S est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
4. En quelle année Geoffroy peut-il espérer gagner plus de 2 000 € ?

Exercice 9.10 Alban débute dans une entreprise. Au 1er janvier de l'année 2019, Alban touche un salaire mensuel de 1 500 €. Son salaire augmente chaque année au 1er janvier de 2,5 %.

Son montant en euro, l'année $2019+n$ est modélisé par le terme de rang n d'une suite (a_n) de premier terme $a_0 = 1\,500$.

1. Calculer le salaire mensuel d'Alban en 2020 puis en 2021.
2. Justifier que pour tout n, $a_{n+1} = 1{,}025 a_n$, et en déduire la nature de la suite (a_n).

Exercice 9.11 Un restaurateur a produit 2 500 kg de déchets non recyclables en 2017 et 2 350 kg en 2018.

1. Déterminer le pourcentage de réduction de la masse de déchets non recyclables entre 2017 et 2018.
2. À partir de 2018, le restaurateur prévoit, chaque année, de réduire de 5 % la masse de déchets non recyclables. Pour tout entier naturel n, on modélise la masse, exprimée en kg, de déchets non recyclables pour l'année $2018+n$ à l'aide d'une suite notée (D_n). Ainsi $D_0 = 2\,350$.
   a. Calculer D_1 puis D_2.
   b. On admet que la suite (D_n) est géométrique. Donner sa raison.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $D_n = 2\,350 \times 0,95^n$.
   Déterminer la masse de déchets non recyclables en 2025. On donnera le résultat arrondi en kg.

Exercice 9.12 À cause du réchauffement climatique, certaines régions risquent de connaître une baisse de 10 % par an des précipitations moyennes annuelles mesurées en millimètres (mm). Dans une région du nord de la France, les précipitations moyennes annuelles étaient de 673 mm en 2018. On considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que cette baisse de 10 % par an se poursuit chaque année. Pour tout entier naturel n, on note P_n les précipitations annuelles moyennes en mm dans cette région pour l'année $2018+n$.

1. Quelle est la nature de la suite (P_n) ? Donner son premier terme et sa raison.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer P_n en fonction de n.
3. On donne le programme Python suivant :

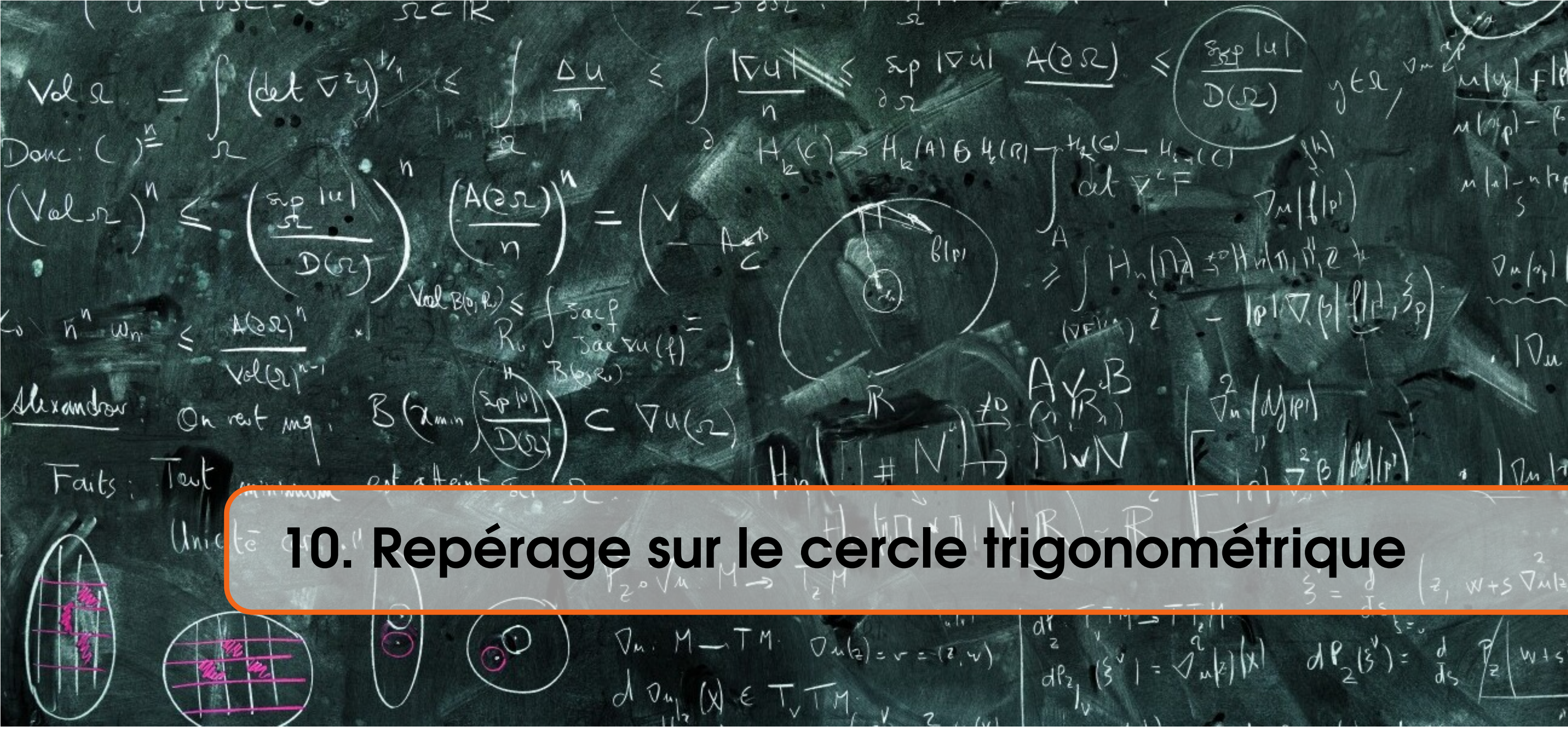
```
def precipitations(J) :
  I = 673
  n = 0
  while I > J :
    n = n + 1
    I = 0.9 * I
  return(n + 2018)
```

   L'exécution de « precipitations(300) » renvoie la valeur 2026. Que représente cette valeur pour le problème posé ?

Exercice 9.13 On s'intéresse à la population d'une ville et on étudie un modèle d'évolution de cette population. En 2018, la population de la ville était de 15 000 habitants.
On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an. On note v_n le nombre d'habitants pour l'année $(2018+n)$.

1. Justifier que $v_0 = 15\,000$.
2. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n.
4. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2023, arrondi à l'unité.

III Géométrie dans le plan



10. Repérage sur le cercle trigonométrique

Exercice 10.1 Les mesures ci-dessous sont exprimées en radians. Les convertir en degrés.

1. $\frac{3\pi}{5}$.
2. $\frac{2\pi}{3}$.
3. $\frac{5\pi}{12}$.
4. $\frac{\pi}{16}$.
5. $\frac{11\pi}{12}$.

■

Exercice 10.2 Les mesures ci-dessous sont exprimées en degrés. Les convertir en radians.

1. $36°$.
2. $15°$.
3. $240°$.
4. $270°$.
5. $105°$.

■

Exercice 10.3 La molécule d'eau est formée de trois atomes : deux atomes d'hydrogène H et un atome d'oxygène O. L'angle formé par les deux liaisons $O-H$ fait $104°$.

1. Déterminer la mesure en radians de l'angle de la liaison.
2. De manière générale, les mesures des angles des liaisons covalentes vont de $104°$à $109,5°$. Déterminer l'intervalle correspondant, en radians.

■

Exercice 10.4 Dans chaque cas, exprimer en radians les mesures des trois angles du triangle.

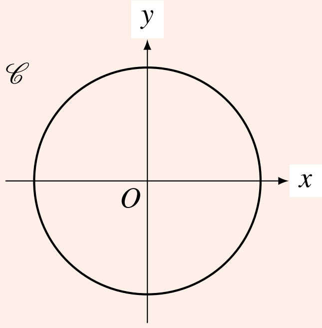
1. Si un des angles mesure $70°$, et un autre mesure $15°$.
2. Si le triangle est rectangle et isocèle.
3. Si le triangle est équilatéral.
4. Si le triangle est isocèle, et un des angles mesure $45°$.
5. Si le plus petit angle mesure x, l'angle intermédiaire mesure $2x$ et le dernier mesure $3x$.

■

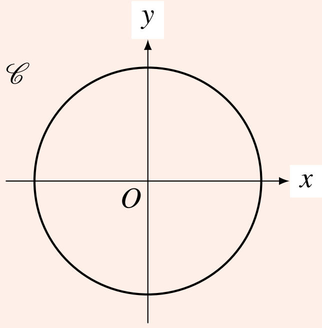
Exercice 10.5 Certaines figures de snowboard portent des noms qui correspondent à des mesures d'angles en degrés. Il y a le 180, le 270, le 360, le 450, le 630, le 720, le 810, le 900, le 1 080, le 1 260 et le 1 440. Traduire ces figures en radians. ■

Exercice 10.6 Sur chacun des cercles trigonométriques, placer les points associés aux réels.

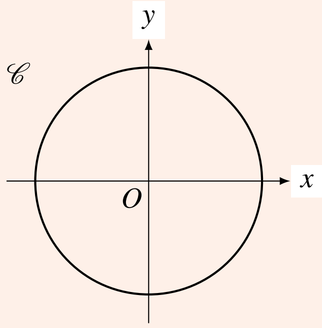
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π.



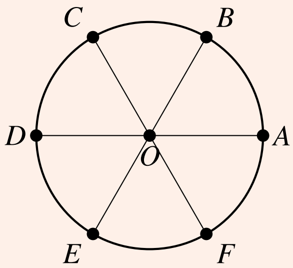
$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$ et 2π.



$-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

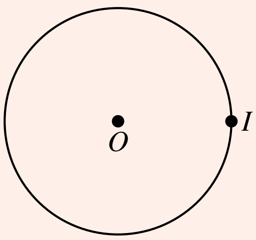


Exercice 10.7 Le cercle trigonométrique ci-dessous est partagé en six parts égales.



Déterminer une mesure, en radians, de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right)$, $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)$.
Ensuite, déterminer le point M tel que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{2\pi}{3}$, puis $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}\right)$.

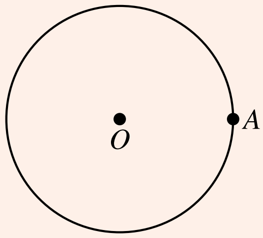
Exercice 10.8 On considère le cercle trigonométrique ci-dessous.



Placer, sur le cercle trigonométrique, les points A, B, C, et D tels que :

1. $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{3\pi}{4}$.
2. $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{4\pi}{3}$.
3. $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{13\pi}{6}$.
4. $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{5\pi}{3}$.

Exercice 10.9 On considère le cercle trigonométrique ci-dessous.

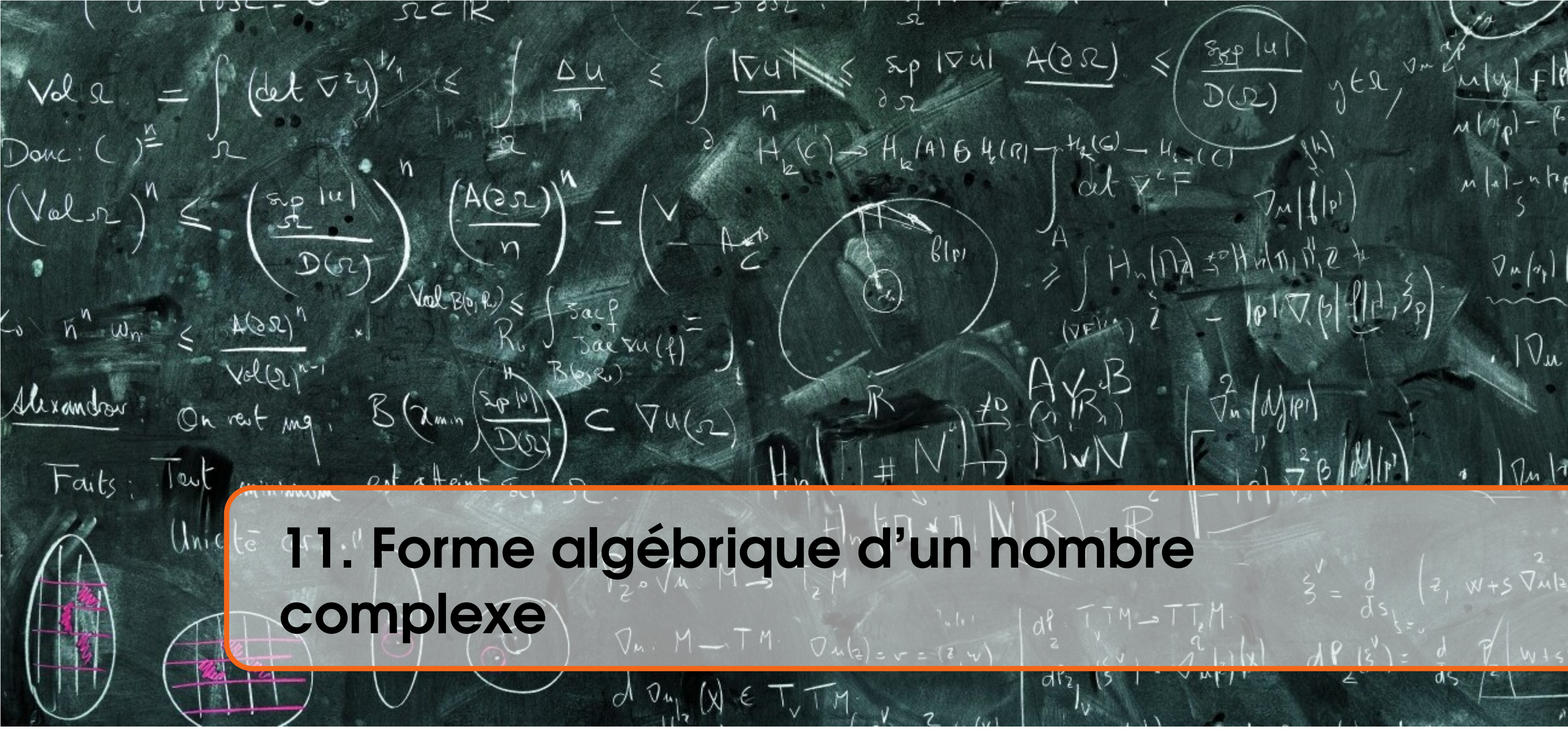


1. Découper le cercle trigonométrique en huit parts égales.
2. Nommer les points dans le sens trigonométrique, en partant de A, jusqu'à H.
3. Déterminer une mesure, en radians, puis la mesure principale, des angles suivants :

a. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
b. $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG}\right)$.
c. $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OD}\right)$.
d. $\left(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}\right)$.
e. $\left(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH}\right)$.
f. $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}\right)$.

Exercice 10.10 Parmi les mesures angulaires ci-dessous, regrouper les valeurs qui correspondent à un même angle orienté.

1. $-\dfrac{2\pi}{3}$.
2. $\dfrac{11\pi}{2}$.
3. $\dfrac{5\pi}{6}$.
4. 0.
5. $-\dfrac{7\pi}{6}$.
6. $-\dfrac{\pi}{2}$.
7. $\dfrac{4\pi}{3}$.
8. 5π.
9. $\dfrac{8\pi}{3}$.
10. $\dfrac{9\pi}{4}$.
11. $\dfrac{3\pi}{4}$.
12. -9π.
13. $\dfrac{10\pi}{3}$.
14. $\dfrac{24\pi}{3}$.
15. $\dfrac{3\pi}{2}$.
16. 8π.



11. Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 11.1 Pour chaque nombre complexe, identifier ses parties réelle et imaginaire.

1. $z = -1 + \sqrt{3}i$.
2. $z = -4i$.
3. $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
4. $z = -3$.
5. $z = -i - \sqrt{3}$.
6. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

■

Exercice 11.2 Calculer la somme, la différence, le produit et le quotient de ces complexes.

1. $z_1 = -3 + 4i$ et $z_2 = -1 + 2i$.
2. $z_1 = -2 + i$ et $z_2 = 4 - i$.
3. $z_1 = -3 + 2i$ et $z_2 = 2 + i$.
4. $z_1 = -\sqrt{2} + 5\sqrt{3}i$ et $z_2 = \sqrt{2} + 2\sqrt{3}i$.

■

Exercice 11.3 *Les questions sont indépendantes.* Résoudre ces équations, d'inconnue z.

Équation 1. $(1-i)z = 3 - 2i$; **Équation 2.** $z + iz = 1$

Résoudre une équation d'inconnue z, c'est trouver la ou les valeurs de z solution(s) de l'équation proposée. Après avoir isolé z dans chaque équation, donner le résultat sous forme algébrique.

■

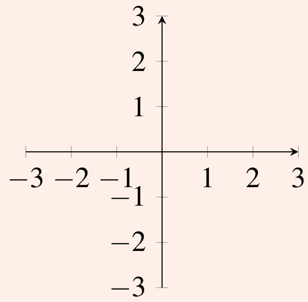
Exercice 11.4 Pour chaque nombre complexe, déterminer son conjugué et son opposé.

1. $z = -1 + \sqrt{3}i$.
2. $z = -4i$.
3. $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
4. $z = -3$.
5. $z = -i - \sqrt{3}$.
6. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

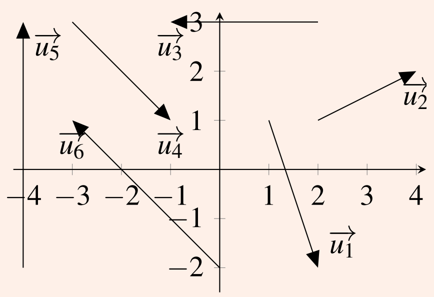
■

Exercice 11.5 Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, montrer que $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

Exercice 11.6 Dans le repère orthonormé ci-contre, placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -2i$, $z_C = -2$, $z_D = 2 - 3i$ et $z_E = -3 - 2i$.
Peut-on observer certaines propriétés de symétrie entre ces points ? Qu'en déduire sur leurs affixes respectifs ?



Exercice 11.7 Dans le repère orthonormé ci-dessous, lire les affixes des vecteurs représentés.



Exercice 11.8 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + i$, $z_B = 3 - i$, $z_C = 5 - 4i$ et $z_D = -2i$.

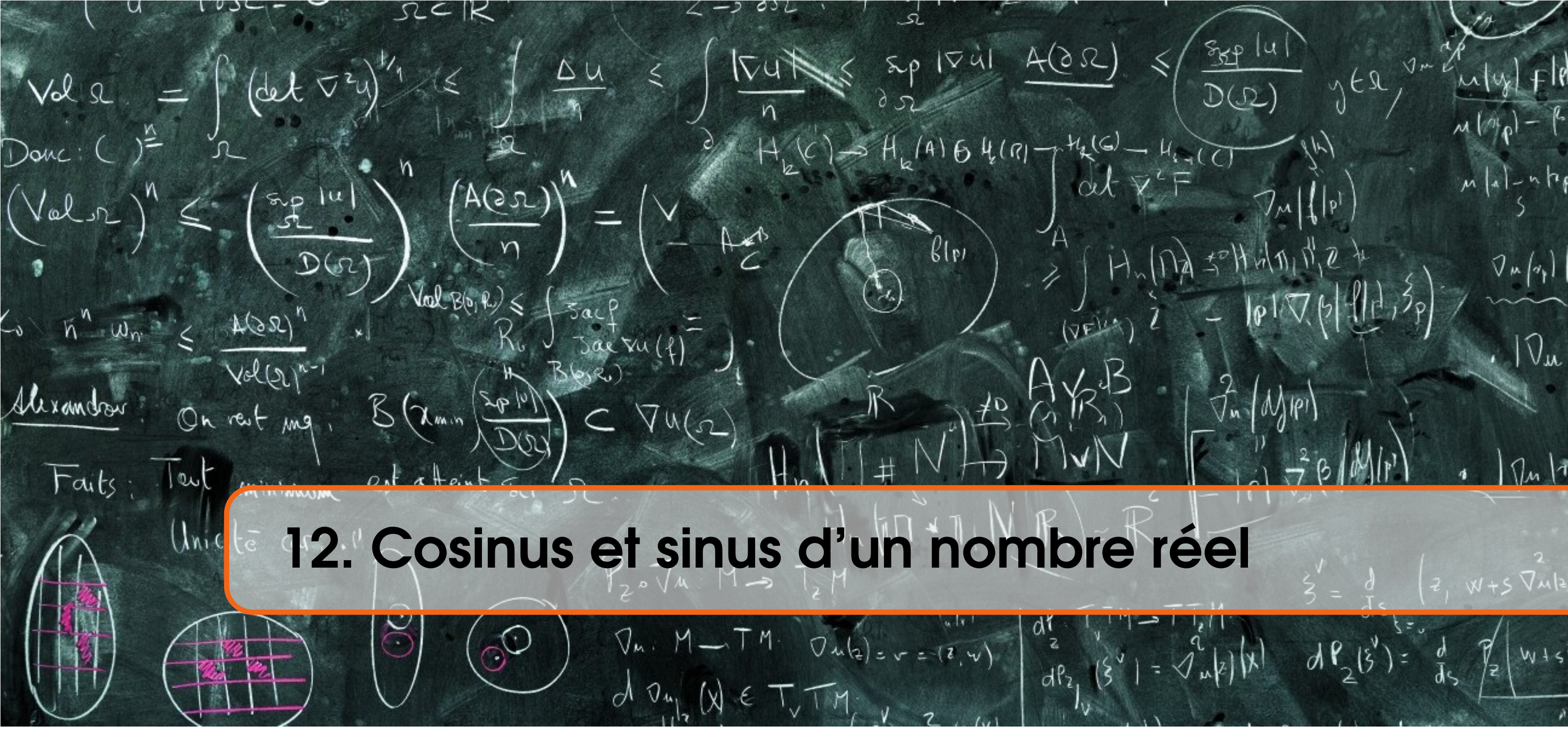
1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.
2. Que peut-on conjecturer quant à la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Conclure.

Exercice 11.9 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + 4i$, $z_B = 2 + i$, $z_C = -1 - 2i$ et $z_D = -5$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.
2. Que peut-on conjecturer quant à la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.

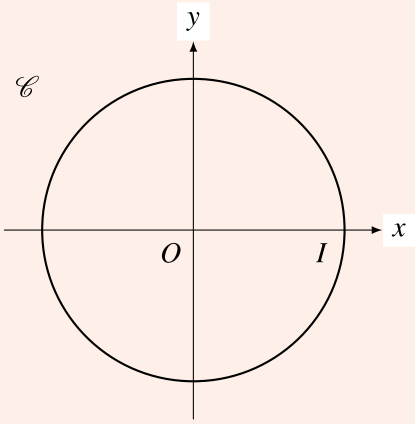
Exercice 11.10 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 4i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = 1 - 2i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Que peut-on dire quant aux points A, B et C ?
4. Reprendre les questions précédentes avec $z_A = -4 + 7i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$.



12. Cosinus et sinus d’un nombre réel

Exercice 12.1 On a tracé un cercle trigonométrique, ci-dessous, et on note $I\,(0\,;\,1)$.



1. Placer, avec exactitude, les points M, P et Q tels que :

$$(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad (\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OQ}\,;\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2}$$

2. Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OQ})$.
3. En déduire les coordonnées de M, P et Q.

■

Exercice 12.2 On sait qu’un réel x vérifie $\cos x = 0,8$.

1. En sachant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, trouver la valeur de $\sin^2 x$.
2. On suppose que $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
   a. Quel est le signe de $\sin x$ sur cet intervalle ? En déduire la valeur exacte de $\sin x$.
   b. Avec la calculatrice, en déduire une valeur approchée, arrondie au degré près, de x.
3. On suppose que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$.
   a. Quel est le signe de $\sin x$ sur cet intervalle ? En déduire la valeur exacte de $\sin x$.
   b. Avec la calculatrice, en déduire une valeur approchée, arrondie au degré près, de x.

■

Exercice 12.3 On sait qu'un réel x vérifie $\sin x = 0,25$.

1. En sachant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, trouver la valeur de $\cos^2 x$.
2. On suppose que $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
   a. Quel est le signe de $\cos x$ sur cet intervalle ? En déduire la valeur exacte de $\cos x$.
   b. Avec la calculatrice, en déduire une valeur approchée, arrondie au degré près, de x.
3. On suppose que $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.
   a. Quel est le signe de $\cos x$ sur cet intervalle ? En déduire la valeur exacte de $\cos x$.
   b. Avec la calculatrice, en déduire une valeur approchée, arrondie au degré près, de x.

■

Exercice 12.4 On donne, ci-dessous, un des deux nombres $\cos x$ ou $\sin x$, ainsi qu'un intervalle. Lorsque cela est possible, trouver l'autre de ces deux nombres, ainsi qu'une valeur approchée de l'angle considéré.

1. Si $\cos x = -0,4$ et que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
2. Si $\cos x = 0,75$ et que $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
3. Si $\sin x = 0,3$ et que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
4. Si $\sin x = -0,5$ et que $-\pi < x < 0$.

■

Exercice 12.5 Calculer les cosinus et les sinus des angles suivants.

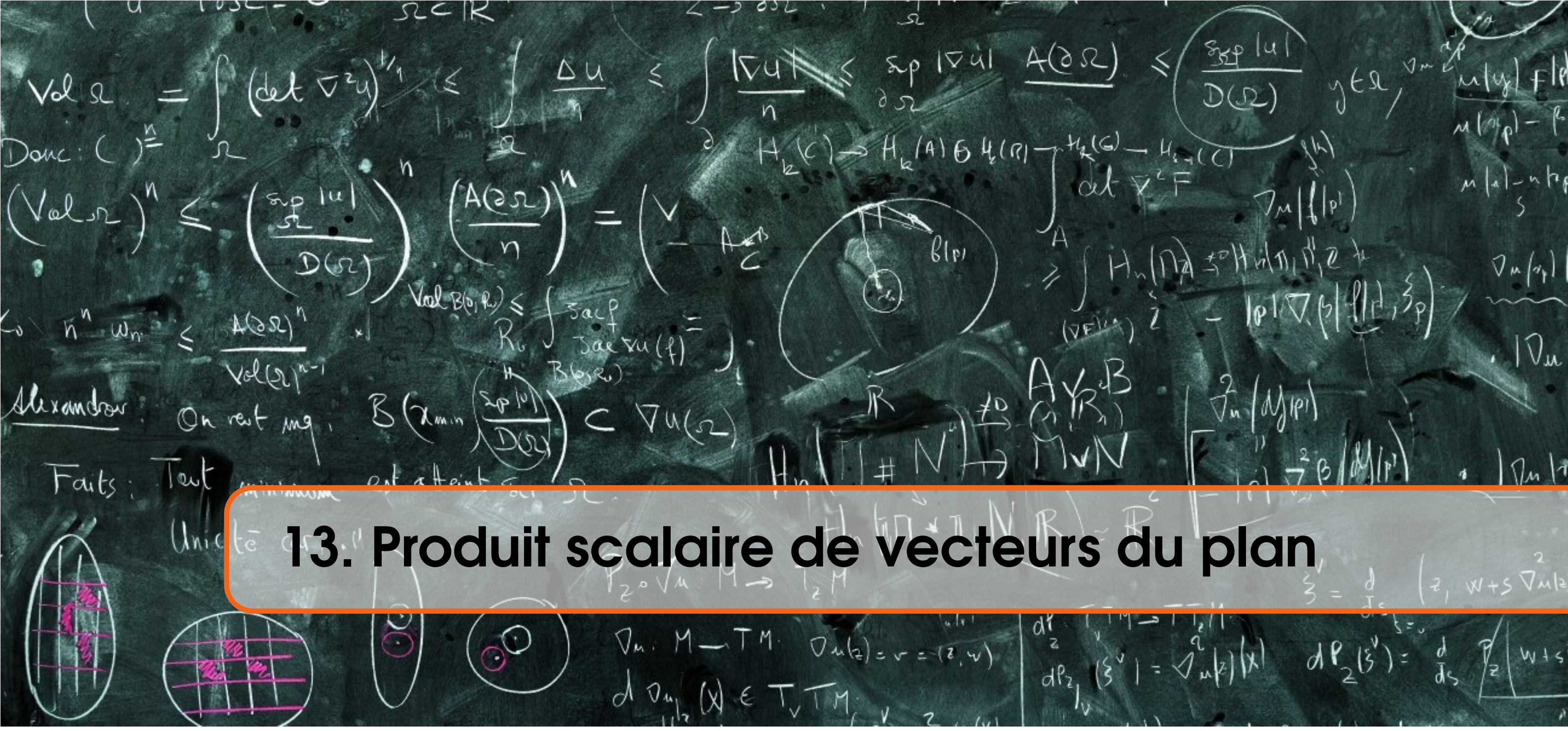
$$\frac{13\pi}{6} \quad , \quad -\frac{\pi}{3} \quad , \quad -\frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{123\pi}{6}$$

■

Exercice 12.6 Simplifier au maximum les expressions suivantes, pour tout réel x.

1. $f(x) = \cos(\pi - x) + 2\sin(\pi - x) - \cos(-x)$.
2. $g(x) = \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\cos(\pi + x)$.
3. $h(x) = \sin(\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

■



13. Produit scalaire de vecteurs du plan

Exercice 13.1 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

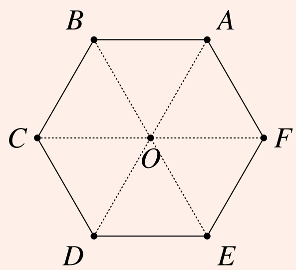
1. Si $||\overrightarrow{u}|| = 1$, $||\overrightarrow{v}|| = 2$ et $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}) = 45°$.
2. Si $||\overrightarrow{u}|| = 3$, $||\overrightarrow{v}|| = 4$ et $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.
3. Si $||\overrightarrow{u}|| = 2$, $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{3}$ et $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{6}$.
4. Si $||\overrightarrow{u}|| = \dfrac{1}{2}$, $||\overrightarrow{v}|| = 3\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}) = -\dfrac{3\pi}{4}$.

■

Exercice 13.2 ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm, et I est le milieu de $[AB]$. Réaliser une figure à main levée et calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$. ■

Exercice 13.3 $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et de côté 2 cm.

Calculer les produits scalaires ci-dessous. *Rappel : les triangles joignant O à deux sommets consécutifs sont équilatéraux.*



1. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$.
2. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CO}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$.
4. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$.
5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$.
6. $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF}$.
7. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AF}$.
8. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$.

■

Exercice 13.4 Dans chaque cas, calculer les normes $||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{v}||$, et le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

1. $\overrightarrow{u}\,(3\,;4)$, $\overrightarrow{v}\,(15\,;-8)$.
2. $\overrightarrow{u}\,(20\,;21)$, $\overrightarrow{v}\,(-9\,;-40)$.
3. $\overrightarrow{u}\,(70\,;0)$, $\overrightarrow{v}\,(0\,;-90)$.

■

Exercice 13.5 Soient $A\,(1\,;\,2)$, $B\,(2\,;\,6)$ et $C\,(-1\,;\,-1)$ trois points du plan.
1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Exercice 13.6 Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou non.
1. Si $A\,(1\,;\,4)$, $B\,(4\,;\,3)$, $C\,(-2\,;\,2)$ et $D\,(3\,;\,1)$.
2. Si $A\,(-3\,;\,7)$, $B\,(3\,;\,-3)$, $C\,(-2\,;\,-1)$ et $D\,(6\,;\,4)$.
3. Si $A\,(-1\,;\,7)$, $B\,(4\,;\,-1)$, $C\,(-3\,;\,2)$ et $D\,(5\,;\,7)$.

Exercice 13.7 Dans chaque cas, dire si le triangle ABC est rectangle ou non.
1. Si $A\,(-2\,;\,2)$, $B\,(8\,;\,4)$ et $C\,(3\,;\,-2)$.
2. Si $A\,(-1\,;\,1{,}5)$, $B\,(0\,;\,4)$ et $C\,(5\,;\,2)$.
3. Si $A\,(8\,;\,2)$, $B\,(2\,;\,4)$ et $C\,(-2\,;\,-8)$.

Exercice 13.8 Dans chaque cas, déterminer la valeur de α pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.
1. Si $\overrightarrow{u}\,(\alpha\,;\,6)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\,;\,3)$.
2. Si $\overrightarrow{u}\,(-3\,;\,\alpha)$ et $\overrightarrow{v}\,(5\,;\,7)$.
3. Si $\overrightarrow{u}\,(\alpha-2\,;\,7)$ et $\overrightarrow{v}\,(3\,;\,3)$.

Exercice 13.9 On cherche à déterminer une mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$, où $A\,(6\,;\,8)$, $B\,(4\,;\,9)$ et $C\,(5\,;\,7)$. Pour cela :
1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis en déduire la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, à l'aide des coordonnées obtenues en question 1.
3. Écrire la formule de calcul « angle et normes » du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
4. Déduire des questions précédentes une mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.

Exercice 13.10 Reprendre l'exercice précédent en changeant les coordonnées de A, B et C :
1. Si $A\,(0\,;\,0)$, $B\,(2\,;\,-1)$ et $C\,(1\,;\,3)$.
2. Si $A\,(0\,;\,0)$, $B\,(2\,;\,-6)$ et $C\,(9\,;\,3)$.
3. Si $A\,(-1\,;\,-3)$, $B\,(5\,;\,-1)$ et $C\,(0\,;\,1)$.

Exercice 13.11 On cherche à déterminer une mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, où $\overrightarrow{AB}\,(5\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(4\,;\,-3)$. Pour cela :
1. Calculer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Écrire la formule de calcul « angle et normes » du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
4. Déduire des questions précédentes une mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Exercice 13.12 Reprendre l'exercice précédent en changeant les coordonnées des vecteurs :

1. Si $\overrightarrow{AB}\,(16\,;8)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;4)$.
2. Si $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-6\,;4)$.
3. Si $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;2)$.

■

Exercice 13.13 Soit un triangle ABC où $AB = 6$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 4$ cm. Appliquer le théorème d'Al-Kâshi pour trouver une valeur arrondie au degré de $\widehat{BAC}$. ■

Exercice 13.14 Soit un triangle ABC où $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 10$ cm. Appliquer le théorème d'Al-Kâshi pour trouver une valeur arrondie au degré de chaque angle. ■

Exercice 13.15 Dans chaque cas, trouver la longueur manquante dans un triangle ABC.

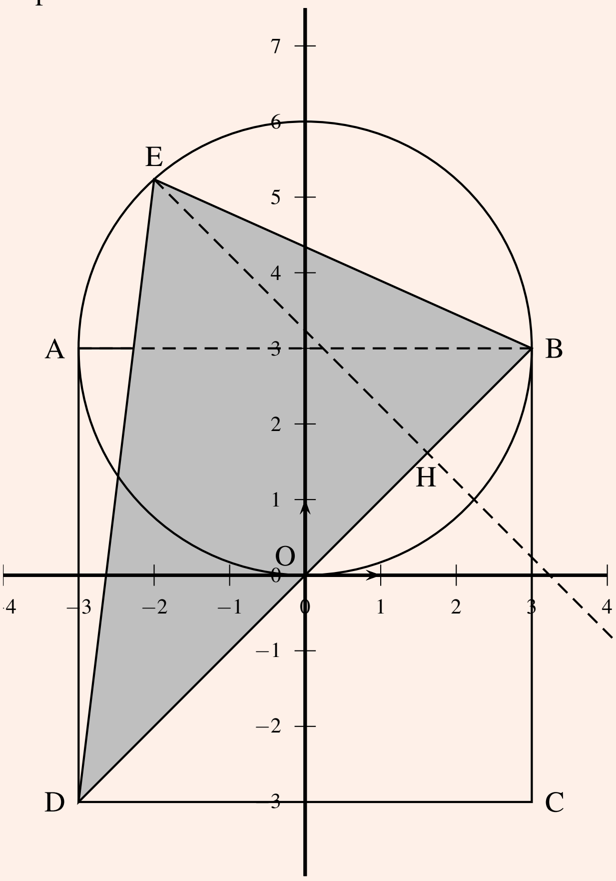
1. Si $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Si $AC = 5$, $BC = 5$ et $\widehat{ACB} = 15°$.
3. Si $AB = 3$, $BC = 2$ et $\widehat{ABC} = \dfrac{3\pi}{4}$.
4. Si $AB = 1$, $AC = 2$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

■

Exercice 13.16 Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle. Il a été représenté ci-dessous dans un repère orthonormé.

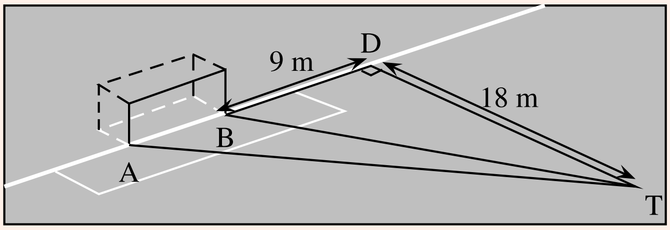
On considère les points A$(-3\ ;\ 3)$, B$(3\ ;\ 3)$, C$(3\ ;\ -3)$ et D$(-3\ ;\ -3)$ qui forment les sommets d'un carré $ABCD$.
On considère également le milieu I du segment $[AB]$, et le point E$\left(-2\ ;\ 3+\sqrt{5}\right)$ dont on admettra qu'il est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$.

1. Montrer que :
$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 42+6\sqrt{5}$$
2. On admet que la norme du vecteur $\overrightarrow{DE}$ vaut :
$$\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \sqrt{42+12\sqrt{5}}$$
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BDE}$, au degré près.

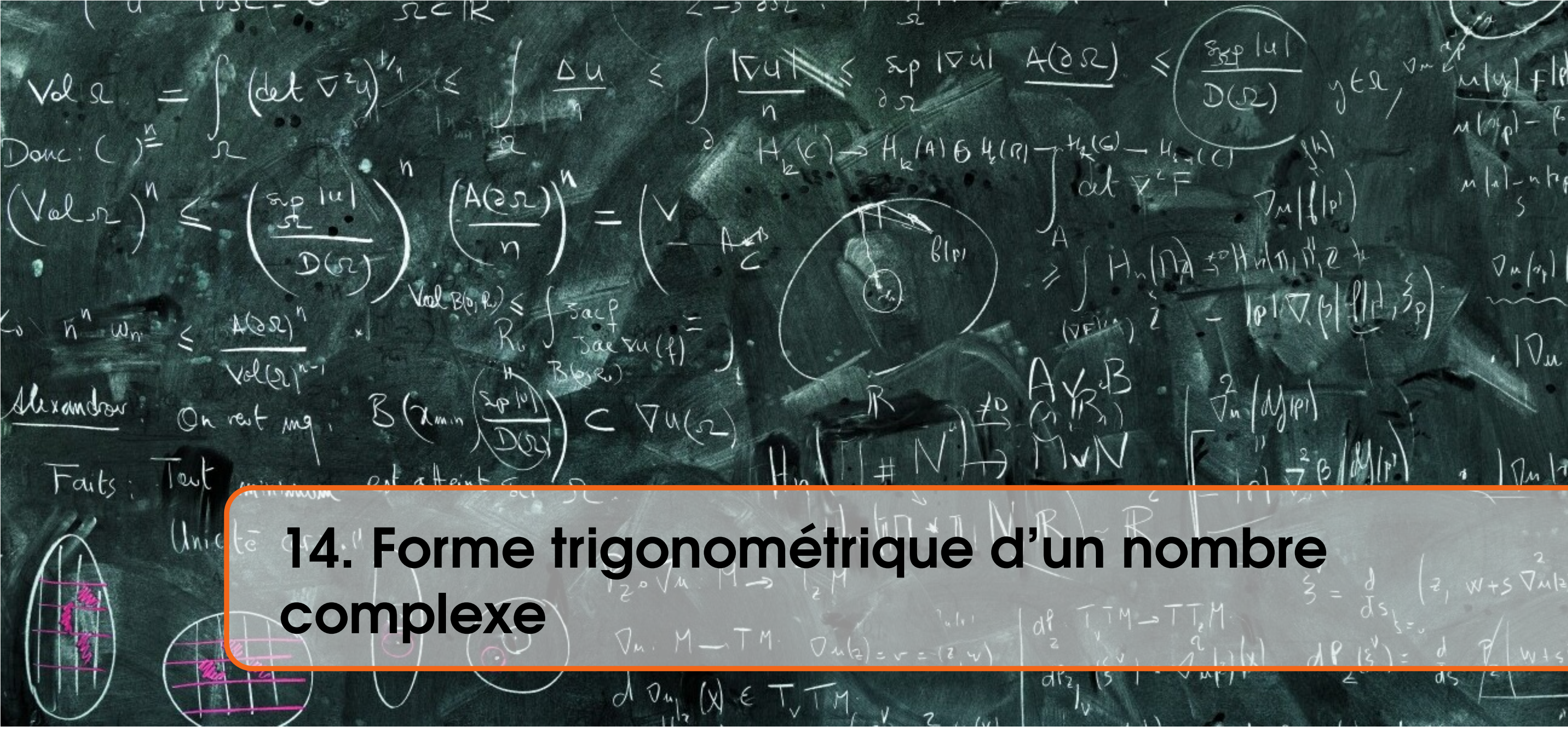


■

Exercice 13.17 Sur le dessin ci-dessous, la largeur du but est $AB = 7,32$ mètres. A, B et D sont alignés. T est le point où se trouve un ballon. Le triangle TAD est rectangle en D.



1. Expliquer pourquoi $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.
2. Dans cette question, on souhaite démontrer que $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 470,88$. Pour cela, on se place dans un repère orthonormé d'origine D. On considère que l'axe des abscisses est $[DA)$, que l'axe des ordonnées est $[DT)$ et que l'unité est le mètre.
   a. Donner les coordonnées des points T, A et B.
   b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{TA}$ et $\overrightarrow{TB}$.
   c. En déduire que $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 470,88$.
3. Déduire de la question précédente une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir $\widehat{ATB}$.



14. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 14.1 Pour chaque nombre complexe, déterminer son module.

1. $z = -1 + \sqrt{3}i$.
2. $z = -4i$.
3. $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
4. $z = -3$.
5. $z = -i - \sqrt{3}$.
6. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

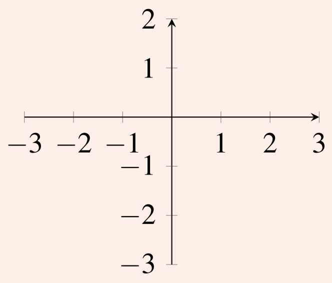
■

Exercice 14.2 On souhaite établir une propriété relative au module d'un nombre complexe.

1. On note $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_3 = -z_1$.
   a. Déterminer le module de z_1.
   b. Donner les formes algébriques de z_2 et z_3, puis déterminer leurs modules.
   c. Que peut-on conjecturer ?
2. Vérifier la conjecture précédente, à l'aide d'un argument graphique.

■

Exercice 14.3 Dans le repère orthonormé ci-contre, placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -2i$, $z_C = -2$, $z_D = 2 - 3i$ et $z_E = -3 - 2i$. Calculer les valeurs des distances OA, OB, OC, OD et OE.



■

Exercice 14.4 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 4i$ et $z_C = 1 + 3i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Conclure quant à la nature du triangle ABC.

■

Exercice 14.5 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{5}{2} + 2i$, $z_B = 1 + 5i$ et $z_C = -3 - \frac{5}{4}i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
3. Vérifier que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 14.6 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3 - 2i$, $z_B = 5 + 2i$, $z_C = 2 - 2i$ et $z_D = 2i$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé.
2. Démontrer que $ADBC$ est un losange.

Exercice 14.7 Pour chaque nombre complexe, déterminer un argument.

1. $z = -1 + \sqrt{3}i$.
2. $z = -4i$.
3. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
4. $z = -3$.
5. $z = -i - \sqrt{3}$.
6. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 14.8 On souhaite établir une propriété relative aux arguments d'un nombre complexe.

1. On note $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_3 = -z_1$.
   a. Déterminer un argument de z_1.
   b. Donner les formes algébriques de z_2 et z_3, puis déterminer leurs arguments.
   c. Que peut-on conjecturer ?
2. Vérifier la conjecture précédente, à l'aide d'un argument graphique.

Exercice 14.9 Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

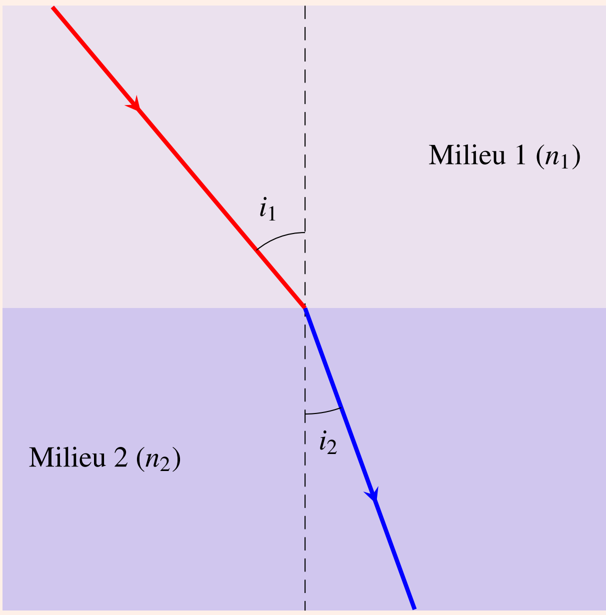
1. $z_1 = -3 + 3i$.
2. $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.
3. $z_3 = -3$.
4. $z_4 = 4i$.
5. $z_5 = -i - \sqrt{3}$.
6. $z_6 = 3 + 4i$.
7. $z_7 = -\frac{3}{4}$.
8. $z_8 = -\frac{1}{4}i$.
9. $z_9 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
10. $z_{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Exercice 14.10 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
2. $z_2 = 10\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$.
3. $z_3 = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.
4. $z_4 = -4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
5. $z_5 = -4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.
6. $z_6 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

15. Fonctions trigonométriques

Exercice 15.1 La réfraction est la déviation des rayons lumineux passant obliquement d'un milieu transparent dans un autre. Chaque milieu est défini par son indice de réfraction. On note i_1 l'angle d'incidence, i_2 l'angle de réfraction.



La loi de Snell-Descartes affirme que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, où n_1 est l'indice de réfraction du milieu 1, et n_2 celui du milieu 2.

1. Déterminer une mesure de l'angle d'incidence lorsque l'angle de réfraction est égal à 30°et lorsque le rayon lumineux passe de l'air (indice de réfraction égal à 1) à l'eau (indice de réfraction égal à $1,33$).
2. Déterminer une mesure de l'angle de réfraction lorsque l'angle d'incidence est égal à 15°et lorsque le rayon lumineux passe de l'air (indice de réfraction égal à 1) à l'huile d'olive (indice de réfraction égal à $1,47$).
3. Déterminer une mesure de l'angle de réfraction lorsque l'angle d'incidence est égal à 45°et lorsque le rayon lumineux passe de l'air (indice de réfraction égal à 1) au diamant (indice de réfraction égal à $2,42$).

■

Exercice 15.2 L'évolution de la population P d'animaux dans une forêt, en fonction du temps t exprimé en années, est modélisée par :

$$P(t) = 500 + 50\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

1. Calculer $P(0)$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $P(1)$. Interpréter ces résultats.
2. Quelle est la période de la fonction P ?
3. Pour quelle valeur de t, la population est-elle à son maximum dans la première année ? Quelle est la population maximum ?

Exercice 15.3 Suite à un tremblement de terre, le Japon est touché par un tsunami. On modélise la hauteur de l'eau par une fonction h, définie pour $t \geqslant 0$, par $h(t) = a\cos(bt)$, où a et b sont deux nombres réels, h est en mètres, t est en secondes. Déterminer a et b dans le cas d'un tsunami où les vagues mesurent 12 mètres de haut et ont une périodicité de 20 minutes.

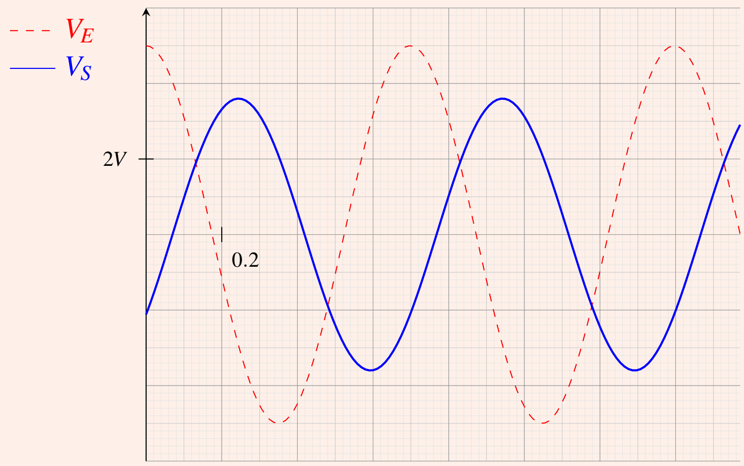
Exercice 15.4 On modélise la température dans une ville par la fonction définie par :

$$\theta(t) = 15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$$

où t est exprimée en mois (le 1er janvier correspondant à $t = 0$).

1. Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?
2. Quelles sont les températures extrêmes ? À quelles dates correspondent-elles ?
3. À quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues ?

Exercice 15.5 On considère les deux sinusoïdes représentées ci-dessous.



L'oscilloscope est réglé avec une sensibilité de 2 V/div (verticale) et 0,2 ms/div (horizontale). On suppose que $V_E(t)$ et $V_S(t)$ s'écrivent sous la forme $A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$.

1. À partir de la représentation graphique, déterminer A_1, A_2, ω_1, ω_2, φ_1 et φ_2.
2. Le déphasage entre les signaux V_S et V_E est égal au nombre $\Delta\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$. V_S est-il en avance de phase sur V_E, ou en retard de phase ?

Exercice 15.6 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les couples d'équations suivants :

1. $\begin{cases} \cos\alpha & = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha & = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \cos\alpha & = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha & = \frac{1}{2} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \cos\alpha & = 0 \\ \sin\alpha & = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \cos\alpha & = -1 \\ \sin\alpha & = 0 \end{cases}$

Exercice 15.7 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos x = 0$.
3. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $\sin x = \frac{1}{2}$.
5. $\sin x = 1$.
6. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 15.8 Résoudre dans $[0\,;\,2\pi[$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

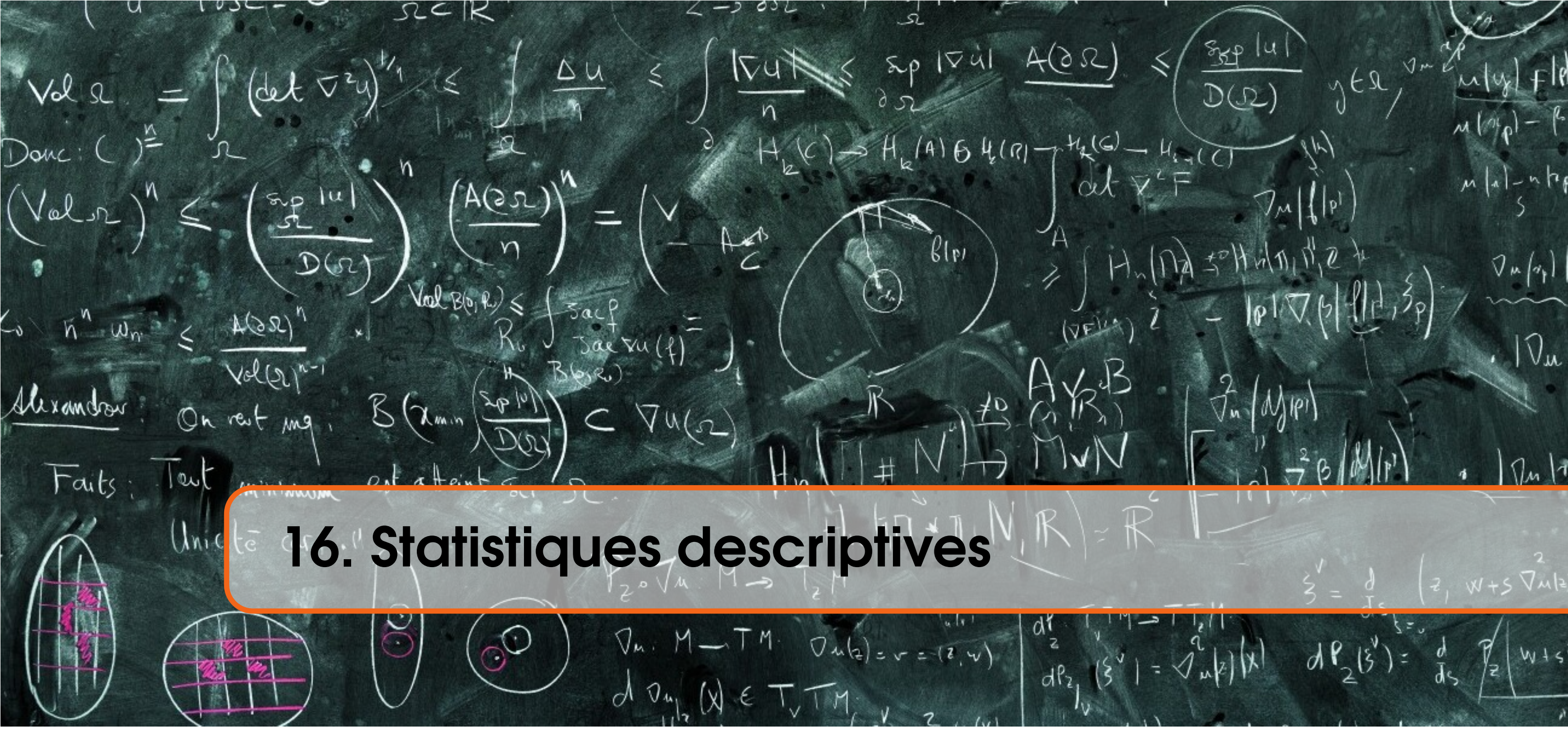
1. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos x = -1$.
3. $\cos x = \frac{1}{2}$.
4. $\sin x = 0$.
5. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Exercice 15.9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{7}$.
2. $\sin x = \sin\dfrac{3\pi}{5}$.
3. $\cos x = \sin\dfrac{\pi}{3}$.

Cet exercice est un exercice moins usuel. Commencez par réaliser un cercle trigonométrique pour vous aider. Demandez de l'aide si besoin !

IV Probabilités et statistiques



16. Statistiques descriptives

Exercice 16.1 On a relevé, à un moment donné, le taux de cholestérol (exprimé en grammes par litre de sang) et l'âge (en années) d'un échantillon de la population d'une région. Les résultats sont consignés dans le tableau à double entrée ci-dessous (sur la première ligne, sont données les classes de taux ; sur la première colonne, sont donnés les âges en années).

	[1,6 ; 1,8[	[1,8 ; 2,0[	[2,0 ; 2,2[	[2,2 ; 2,4[	[2,4 ; 2,6[	**Total**
[20 ; 30[	23	14	4	0	1	
[30 ; 40[	15	13	9	3	2	
[40 ; 50[	12	11	7	5	3	
[50 ; 60[	9	9	8	5	3	
[60 ; 70[	5	7	10	8	4	
[70 ; 80[	4	5	7	9	5	
Total						

1. Écrire une phrase pour expliquer à quoi correspond la donnée 23 indiquée dans la première case du tableau.
2. Compléter les cases manquantes du tableau.
3. On affirme que plus de 47 % des personnes de l'échantillon ont un taux de cholestérol compris entre 1,8 et 2,2 grammes par litre de sang.
   Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier votre réponse.
4. Déterminer le pourcentage de personnes ayant un taux de cholestérol compris entre 1,8 et 2,2 grammes par litre de sang :
   a. Parmi les personnes ayant entre 40 et 50 ans,
   b. Parmi les personnes de moins de 50 ans.
5. Déterminer le pourcentage de personnes ayant entre 40 et 50 ans :
   a. Parmi l'ensemble des personnes de l'échantillon,
   b. Parmi les personnes ayant un taux de cholestérol compris entre 1,8 et 2,2 grammes par litre de sang,
   c. Parmi les personnes ayant un taux de cholestérol supérieur ou égal à 2,2 grammes par litre de sang.

Exercice 16.2 La distribution des salaires mensuels dans une entreprise, exprimée en milliers d'euros, est répertoriée dans le tableau ci-dessous.

Salaires mensuels	$[1\,;1{,}4[$	$[1{,}4\,;1{,}8[$	$[1{,}8\,;2{,}2[$	$[2{,}2\,;2{,}6[$	$[2{,}6\,;3[$
Effectifs	80	40	40	30	10

1. Déterminer le nombre de salariés de cette entreprise.
2. Rentrer les informations de ce tableau sur la calculatrice.
   Indication : Pour rentrer les données sur la calculatrice, lorsque les valeurs sont indiquées sous la forme de classes (intervalles), la donnée à entrer ne sera pas la classe, mais le milieu de celle-ci. Par exemple, pour la classe $[1\,;1{,}4[$*, on supposera que les salariés de cette classe gagnent tous 1,2 milliers d'euros par mois.*
3. Répondre ensuite aux questions suivantes, à l'aide de la calculatrice.
   a. Donner le salaire mensuel moyen.
   b. Donner l'écart-type des salaires mensuels. Les salaires sont-ils « homogènes » ?
   c. Donner la valeur du troisième quartile. Interpréter ce résultat.

■

Exercice 16.3 Un restaurant propose dans son menu trois formules : A (entrée et plat), B (plat et dessert) et C (entrée, plat et dessert). On note le choix des clients venus pour déjeuner à midi (ensemble noté M) ou pour dîner le soir (ensemble noté S). Les effectifs sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

	Formule A	**Formule B**	**Formule C**	**Total**
Déjeuner M	27	31		75
Dîner S	12	20	53	85
Total	39	51	70	160

1. Quel effectif doit-on écrire dans la case vide du tableau ?
2. a. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant choisi la formule A parmi ceux qui sont venus déjeuner à midi.
   b. Montrer que la fréquence en pourcentage de clients venus dîner le soir parmi ceux qui ont choisi la formule B est au dixième prêt égal à 39,2 %.
3. Calculer la fréquence en pourcentage de clients ayant déjeuné le midi dans ce restaurant.
4. Le patron du restaurant déclare : « J'ai une carte des desserts très attractive car plus des trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert. » A-t-il raison ? Justifier.

■

Exercice 16.4 On a réalisé une enquête dans un lycée où il y a 1 200 élèves. Parmi eux :
— $42{,}5\%$ des élèves habitent en centre-ville.
— 50% des élèves prennent les transports en commun. Parmi eux, 75% sont en périphérie.
— 180 utilisent une voiture, dont 30 habitent en centre-ville.
— 25% des élèves viennent à pied.
— Parmi les cyclistes, il y a trois fois plus d'élèves qui habitent en périphérie qu'en ville.

1. Réaliser un tableau d'effectifs à double entrée.
2. Parmi les élèves habitant en ville, calculer le pourcentage d'élèves venant à pied.
3. Parmi les élèves venant à pied, calculer le pourcentage d'élèves habitant en ville.

■

Exercice 16.5 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication, il apparaît deux types de défauts, le défaut mécanique A et le défaut esthétique B. Sur un lot de 200 montres, 2 % des montres fabriquées présentent le défaut A, 10 % le défaut B et 178 montres ne présentent aucun des deux défauts.

1. a. Combien de montres fabriquées présentent le défaut A ? le défaut B ?
   b. Compléter le tableau croisé des effectifs suivant.

Nombre de montres	Défaut A	Pas de défaut A	Total
Défaut B			
Pas de défaut B			
Total			200

2. Quelle est la fréquence f des montres présentant les deux défauts ?
3. Parmi les montres présentant le défaut B, quel est le pourcentage de celles présentant le défaut A ?
4. Le directeur de l'usine affirme : « Il y a plus de 9 % des montres qui ne présentent aucun des deux défauts ». A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 16.6 Un sondage est mené auprès de clients d'un magasin de téléphonie mobile ayant acheté un téléphone (et un seul) de modèle A ou de modèle B, avec deux choix de forfaits possibles : un forfait M « Internet mobile 10 Go » ou un forfait S « Internet mobile 50 Go ».
Le téléphone de modèle A coûte moins cher que le téléphone de modèle B et le coût du forfait M est moins élevé que celui du forfait S.
Sur les 2 000 clients sondés, 1 040 ont souscrit un forfait M et 1 350 ont acheté un téléphone de modèle B. On relève également que 30% des sondés ayant acheté un téléphone de modèle B ont souscrit un forfait M.

1. À l'aide des données précédentes, construire un tableau d'effectifs à double entrée.
2. Quelle est la fréquence des sondés ayant souscrit un forfait S ?
3. a. Quelle est la fréquence des sondés qui ont acheté un téléphone A et ont souscrit un forfait M ?
   b. « Moins d'un tiers des sondés choisit la formule la plus économique ». Est-ce vrai ?
4. Si on choisit au hasard un client parmi les sondés qui ont répondu avoir souscrit un forfait S, est-il vrai qu'il y a une forte probabilité qu'il ait acheté un téléphone de modèle B ?

Exercice 16.7 Dans une entreprise, l'étude sur l'ensemble du personnel est donnée par le tableau suivant :

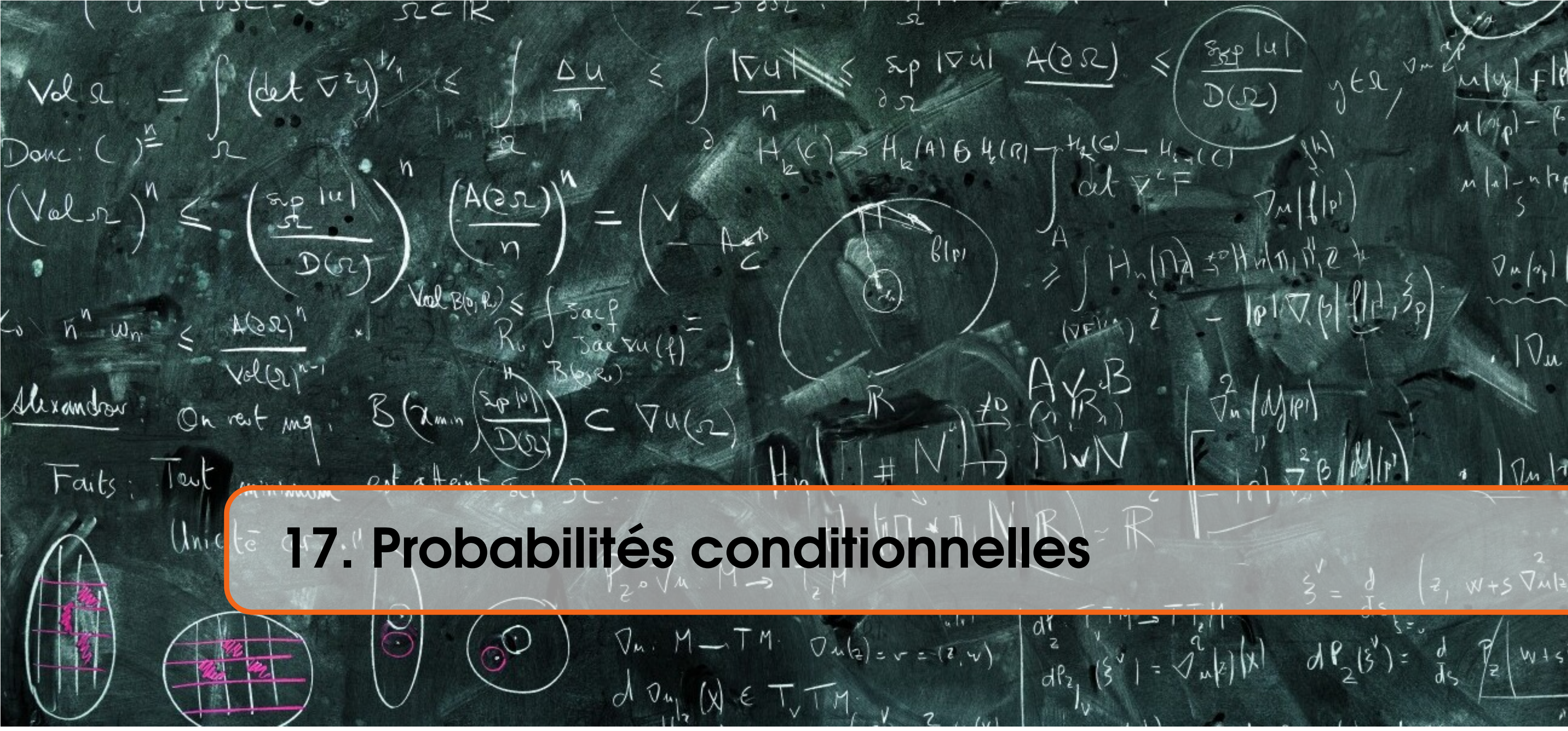
	Ouvriers	Employés	Cadres	Total
Hommes	400	200		
Femmes		150	20	280
Total			140	

1. Après avoir complété le tableau, calculer les pourcentages suivants.
   a. Le pourcentage de femmes.
   b. Le pourcentage de femmes cadres.
2. Déterminer la fréquence des ouvriers parmi les hommes, puis parmi les femmes.
3. Comparer le pourcentage de femmes dans l'entreprise et le pourcentage de femmes parmi les cadres.

Exercice 16.8 Une ville ne comporte que deux types de transport en commun : le tram et les bus. On a interrogé 1000 habitants : 340 déclarent utiliser le tram, 450 utilisent les bus et 150 utilisent les deux moyens de transport.

1. Quelle est la proportion des usagers des transports en commun, c'est-à-dire des personnes utilisant au moins un type de transport en commun ?
2. Quelle est la proportion de personnes n'utilisant aucun transport en commun ?
3. Calculer la proportion des personnes qui utilisent les deux moyens de transports parmi l'ensemble des usagers.

■



17. Probabilités conditionnelles

Exercice 17.1 Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit. 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé. Parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse. Par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note E l'évènement : « Le smartphone choisi a un écran cassé » et B l'évènement : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse ».

1. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité qu'un smartphone ait une batterie défectueuse est $0,245$.
3. Un smartphone a une batterie défectueuse. Quelle est la probabilité que l'écran soit cassé ?

■

Exercice 17.2 Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ». On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les évènements R : « le jeton tiré est rouge », V : « le jeton tiré est vert » et G : « le jeton tiré est gagnant ».

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.

■

Exercice 17.3 Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Nantes. Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion. De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ». Une étude a produit les données suivantes :

- 40 % des clients optent pour l'avion ;
- Parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On considère les évènements A : « le client a choisi l'avion » et V : « le client a choisi l'option « visites guidées ». Après avoir réalisé un arbre de probabilité, déterminer $\mathbb{P}_A(V)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé. ■

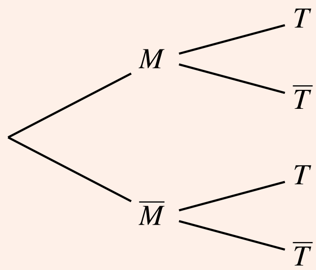
Exercice 17.4 Un modèle de téléphone portable d'une grande entreprise est produit par deux sous-traitants A et B. Chez le sous-traitant A, qui assure 40 % de la production totale, 4 % des téléphones sont défectueux. Le sous-traitant B assure le reste de la production. On constate que la probabilité qu'un téléphone (pris au hasard dans les stocks) soit défectueux est de $0,034$.

1. Donner le pourcentage de la production totale assurée par le sous-traitant B.
2. Quelle est la probabilité qu'un téléphone provienne de B sachant qu'il est défectueux ?

■

Exercice 17.5 On étudie un test de dépistage pour une maladie dans une population donnée. On sait que 1 % de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97 % des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas. Pour une personne à qui on fait passer le test, on associe les évènements M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice.



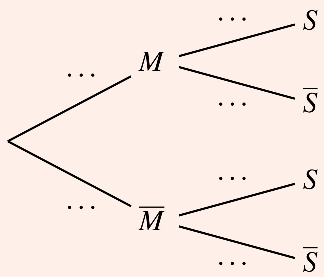
2. Montrer que $\mathbb{P}(T) = 0,0295$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_T(M)$.
3. Une personne dont le test est positif est-elle nécessairement malade ? Justifier.

■

Exercice 17.6 Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ». On admet que :

— On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
— Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,95.
— Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,96.

1. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_M(S)$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right)$, puis compléter l'arbre ci-dessous.

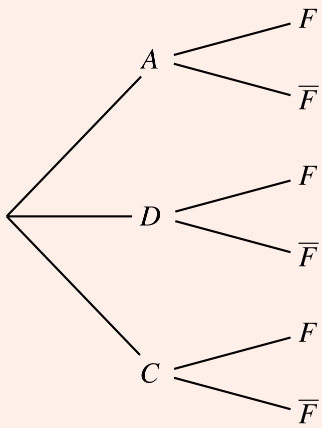


2. Montrer que $\mathbb{P}(S) = 0,041\,82$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'énoncé.
3. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique.

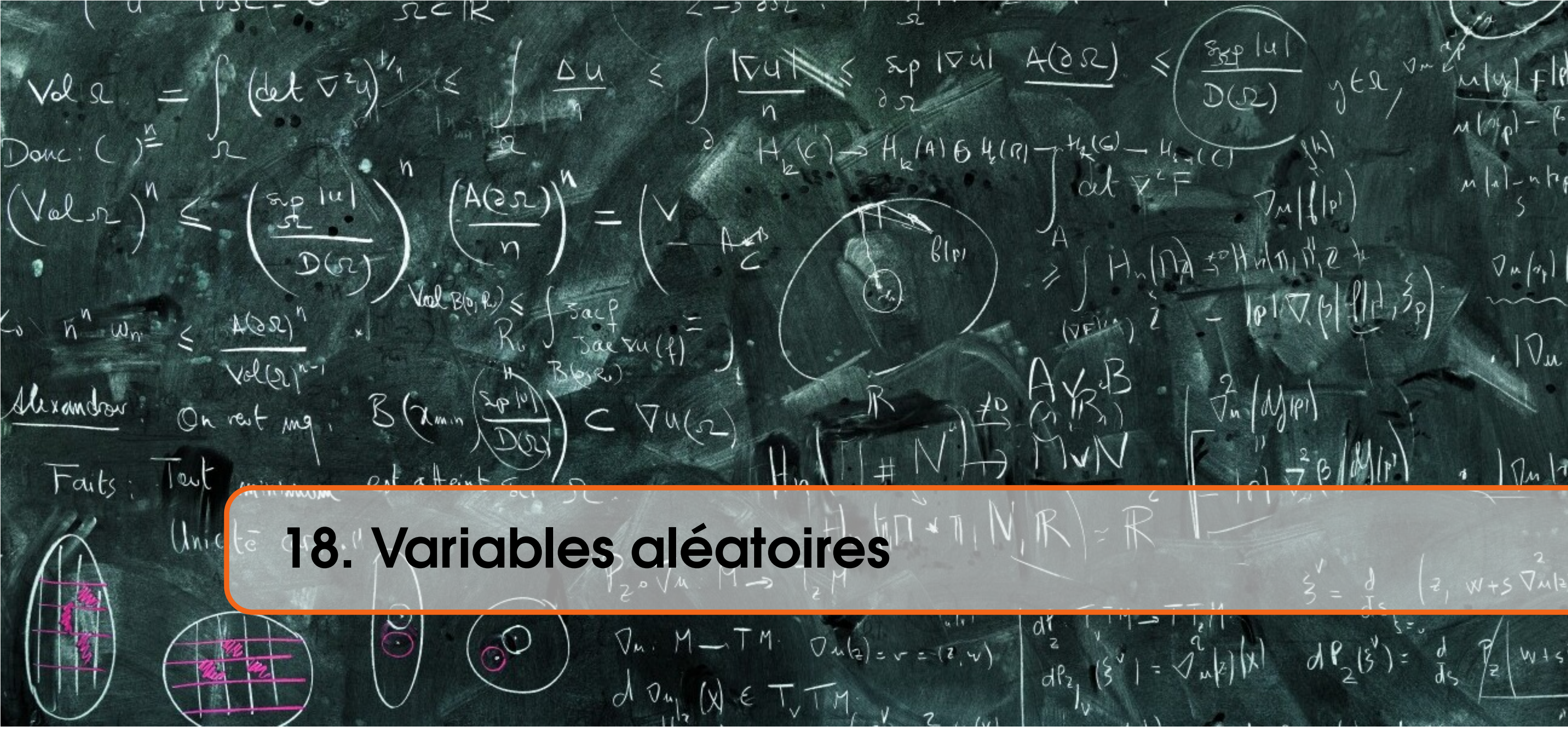
■

Exercice 17.7 La gestionnaire d'un cinéma s'intéresse à la catégorie des films vus par ses spectateurs, ainsi qu'à leur consommation au rayon « friandises ». Une étude sur plusieurs mois a montré que 40 % des spectateurs sont allés voir un film d'action, 35 % un dessin animé et les autres une comédie. Parmi les spectateurs allant voir un film d'action, la moitié achètent des friandises, alors qu'ils sont 80 % pour ceux allant voir un dessin animé et 70 % pour ceux allant voir une comédie. On interroge au hasard un spectateur sortant du cinéma et on note A l'évènement : « le spectateur a vu un film d'action », D l'évènement : « le spectateur a vu un dessin animé », C l'évènement : « le spectateur a vu une comédie » et F l'évènement : « le spectateur a acheté des friandises ».

1. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Démontrer que $\mathbb{P}(F) = 0,655$.
3. On interroge au hasard un spectateur ayant acheté des friandises. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dessin animé ? On donnera l'arrondi à 10^{-3}.



18. Variables aléatoires

Exercice 18.1 Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports). La probabilité qu'un étudiant, pris au hasard dans cette école, soit membre du BDS est de $0,092$.
Le BDS décide d'organiser une randonnée en montagne. Cette sortie est proposée à tous les étudiants de cette école mais le prix qu'ils auront à payer pour y participer est variable. Il est de 60 € pour les étudiants qui ne sont pas membres du BDS, et de 20 € pour les étudiants qui sont membres du BDS.
On désigne par X la variable aléatoire donnant la somme à payer pour un étudiant qui désire faire cette randonnée.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilité de X.

■

Exercice 18.2 Un magasin commercialise des canapés et des tables de salon. Quand un client se présente, il achète au plus un canapé et au plus une table de salon. Une étude a montré que :

— La probabilité qu'un client achète un canapé est $0,24$;
— La probabilité qu'un client achète une table quand il a acheté un canapé est $0,25$;
— La probabilité qu'un client achète une table quand il n'achète pas de canapé est $0,1$.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note C l'évènement « le client achète un canapé » et T l'évènement « le client achète une table ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le client achète un canapé et une table.
3. Montrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ est égale à $0,136$.
4. Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et celui d'une table est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.
   a. Compléter le tableau suivant donnant, la loi de probabilité de X.

x_i	0	300	1 000	1 300
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

   b. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.

■

Exercice 18.3 Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit. 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé. Parmi ceux-là, 30 % ont également une batterie défectueuse. Par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

1. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note E l'évènement : « Le smartphone choisi a un écran cassé » et B l'évènement : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse ».
   a. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.
   b. Montrer que $\mathbb{P}(B) = 0,245$, puis évaluer la probabilité qu'un smartphone ait un écran cassé sachant que sa batterie est défectueuse.
2. L'entreprise dépense 20 € pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère. Si l'écran est cassé, elle dépense 30 € supplémentaires, et si la batterie est défectueuse, elle dépense 40 € supplémentaires. On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi dans le stock.
   a. Compléter le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de X.

x_i	20	50	$\cdots$	$\cdots$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,44	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

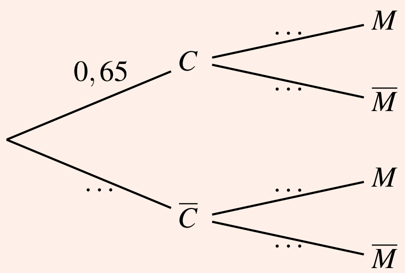
   b. Combien l'entreprise devrait dépenser si elle doit reconditionner 500 smartphones ?

■

Exercice 18.4 Une résidence de vacances propose uniquement deux formules : la formule « pension complète » dans laquelle 3 repas par jour sont fournis, et la formule « demi-pension » dans laquelle sont fournis uniquement le petit déjeuner et le dîner.

Pour l'année 2018, 65 % des clients ont choisi la pension complète ; les autres ont choisi la formule « demi-pension ». Parmi les clients qui ont choisi la demi-pension, 30 % ont réservé l'option « ménage » en fin de semaine. De plus, 70 % des clients qui ont choisi la pension complète ont réservé l'option « ménage ». On choisit un client au hasard parmi ceux de l'année 2018 et l'on considère les évènements C : le client a choisi la formule « pension complète » et M : le client a choisi l'option « ménage ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Montrer que la probabilité qu'un client ait réservé le ménage vaut $0,56$, puis calculer la probabilité qu'un client soit en pension complète sachant qu'il a réservé le ménage.
3. Voici la grille de tarifs de la résidence de vacances pour l'année 2018 :

Une semaine de pension complète	800 €
Une semaine de demi-pension	650 €
Option « ménage »	50 €

On note X la variable aléatoire égale au montant payé par un client de 2018.
Calculer $\mathbb{P}(X = 850)$, en justifiant brièvement votre réponse.

■

Exercice 18.5 Une chaîne de salons de coiffure propose à ses 5 000 clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables : une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin », et des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 2 000 clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 900 demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 650 clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ». On notera C l'évènement « le client souhaite une couleur-soin » et E l'évènement « le client souhaite un effet coup de soleil ».

1. Compléter le tableau suivant :

	C	$\overline{C}$	**Total**
E		900	
$\overline{E}$			
Total			5 000

2. On interroge un client au hasard parmi les 5 000 clients.
   a. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les deux prestations ?
   b. Calculer $\mathbb{P}_E\left(\overline{C}\right)$.
3. On a des prix différents suivant la prestation fournie. On appelle X le prix payé par chaque client. Compléter le tableau ci-dessous, et calculer l'espérance de X.

	Coupe seule	Coupe avec « couleur soin »	Coupe avec « effet coup desoleil »	Coupe avec« couleur soin » et « effet coup de soleil »
Dépense (€)	20	50	65	80
$\mathbb{P}(X = k)$			0,18	0,13

Exercice 18.6
1. On lance deux dés cubiques équilibrés « classiques » et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
   Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces.
   Le jeu est gagné si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10.
   a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Déterminer la probabilité de gagner.
2. On lance à présent deux dés spéciaux : ce sont des dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées différemment des dés classiques.
   - Les faces du premier dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 2, 2, 3, 3, 4.
   - Les faces du deuxième dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 3, 4, 5, 6, 8.

   On note Y la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces après lancer de ces deux dés spéciaux. Déterminer $\mathbb{P}(Y < 10)$.
3. Est-il préférable de jouer au jeu de la question 1 avec des dés classiques ou avec des dés spéciaux ?

Exercice 18.7 Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de $0,7$. Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont M : « Karim marque un but » et R : « Karim rate le tir au but ». On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.

1. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 18.8 Une entreprise produit des pièces pour l'industrie. Dans un important stock de ces pièces, on prélève trois pièces au hasard pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On appelle D l'évènement : « La pièce prélevée présente un défaut. ». On suppose que la probabilité de D est $2\,\%$. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de trois pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut.

1. Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.
2. Justifier que $\mathbb{P}(X=2)$ est proche de $0,001$.

19. Loi de Bernoulli

Exercice 19.1 Un avion possède deux moteurs strictement identiques, où l'on suppose que la panne de l'un n'a aucune influence sur la panne de l'autre. La probabilité qu'un de ces moteurs tombe en panne est $0,001$.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et donner la probabilité de succès.

■

Exercice 19.2 Un plat cuisiné est fabriqué en grande quantité. Parmi les 5 000 plats préparés, on prélève deux d'entre eux, au hasard, pour vérifier s'ils sont conformes. On appellera C l'évènement « Le plat contrôlé est conforme ». Lors du dernier contrôle, 4 850 plats étaient conformes.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et donner la probabilité de succès.
3. Déterminer les probabilités suivantes.
   a. Les deux plats cuisinés tirés au hasard sont conformes.
   b. Exactement un des plats cuisinés tirés au hasard est conforme.

■

Exercice 19.3 La probabilité pour qu'un français est de groupe sanguin A vaut $0,45$. On étudie le groupe sanguin de 3 personnes prises au hasard dans la population française.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et donner la probabilité de succès.
3. Déterminer les probabilités suivantes.
   a. Aucune personne, parmi les trois interrogées, n'est du groupe A.
   b. Exactement une personne, parmi les trois interrogées, est du groupe A.

■

Exercice 19.4 Un sac contient 4 boules orange et 6 boules violettes. On tire successivement et avec remise trois boules dans le sac.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et donner la probabilité de succès.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement « Exactement une boule tirée est violette ».

■

Exercice 19.5 Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi. On modélise la situation de la façon suivante :

— L'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
— La probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état. Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que cette situation s'apparente à une répétition d'épreuves de Bernoulli. Préciser le nombre de répétitions, et la description de l'une de ces épreuves.
2. Sans dresser d'arbre, calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. On admet que $\mathbb{E}(X) = 12$. Interpréter le résultat.

■

Exercice 19.6 Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0,75$ et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

1. Justifier que cette situation s'apparente à une répétition d'épreuves de Bernoulli. Préciser le nombre de répétitions, et la description de l'une de ces épreuves.
2. Sans dresser d'arbre, calculer la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies. En déduire la probabilité qu'il franchisse jusqu'à 9 haies.
3. On admet que $\mathbb{E}(X) = 7,5$. Interpréter le résultat.

■

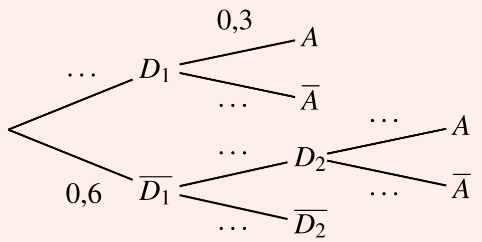
Exercice 19.7 Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - La probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6 ;
  - Si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second et dernier appel :
  - La probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
  - Si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements D_1 : « la personne décroche au premier appel » ; D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » et A : « la personne achète le produit ».

1. Compléter l'arbre pondéré, puis montrer que $\mathbb{P}(A) = 0,204$.
2. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
   Justifier que cette situation s'apparente à une répétition d'épreuves de Bernoulli. Préciser le nombre de répétitions, et la description de l'une de ces épreuves.



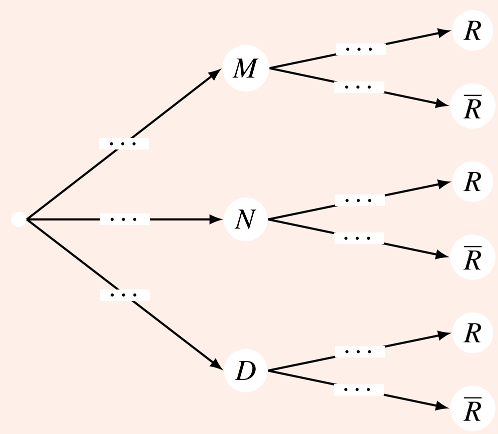
■

Exercice 19.8 Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets. Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories : 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ; 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ; les déchets restants sont des déchets dangereux. Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Partie A Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants : M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ; N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ; D : « Le déchet prélevé est dangereux » et R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à $0,0105$.
3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $\mathbb{P}(R) = 0,6514$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

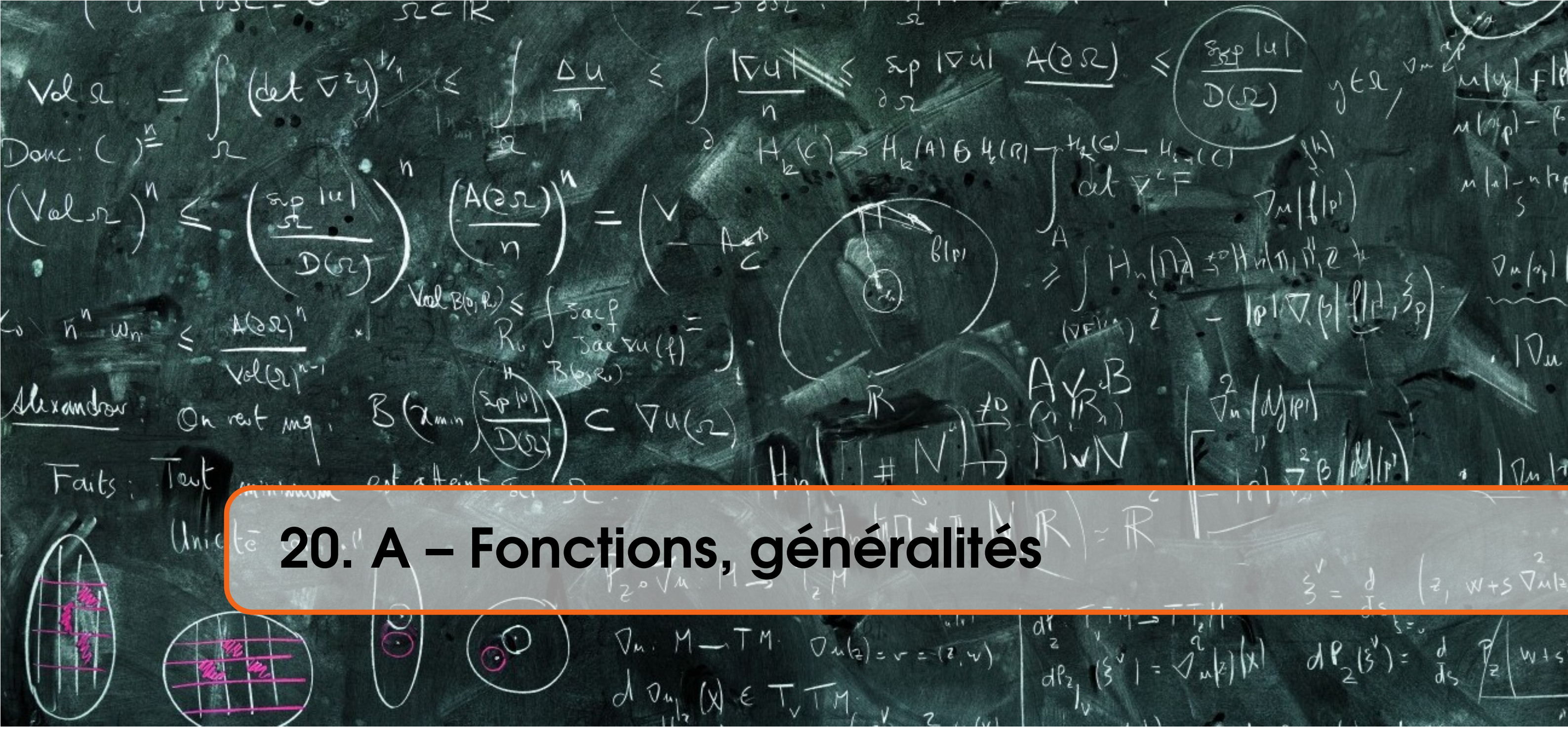
Partie B On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à $0,6514$. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

1. Justifier que cette situation s'apparente à une répétition d'épreuves de Bernoulli. Préciser le nombre de répétitions, et la description de l'une de ces épreuves.
2. Sans dresser d'arbre de probabilités, calculer la probabilité que :
   a. L'échantillon ne comporte aucun déchet recyclable.
   b. L'échantillon ne comporte que des déchets recyclables.
3. On admet que $\mathbb{E}(X) = 13,028$. Interpréter le résultat.

■

V

Exercices-bilans, par catégorie

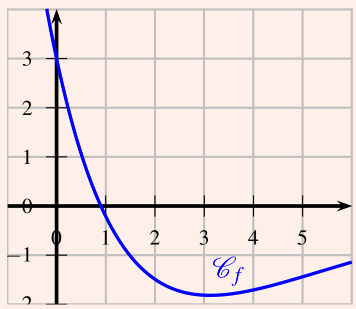


20. A – Fonctions, généralités

Ce chapitre mêle des exercices-bilans sur les chapitres 1, 2, 3 et 4 (généralités sur les fonctions, fonctions du second degré, fonctions du troisième degré).

Exercice 20.1 **Automatismes.** *Répondre à ces questions, sans justifications.*

- On considère une fonction f dont on donne une représentation graphique ci-dessous.
  - **Question 1.** Avec la précision permise par le graphique, donner la valeur de $f(2)$.
  - **Question 2.** Justifier, à l'aide de $\mathscr{C}_f$, pourquoi f ne peut pas être une fonction du second degré.



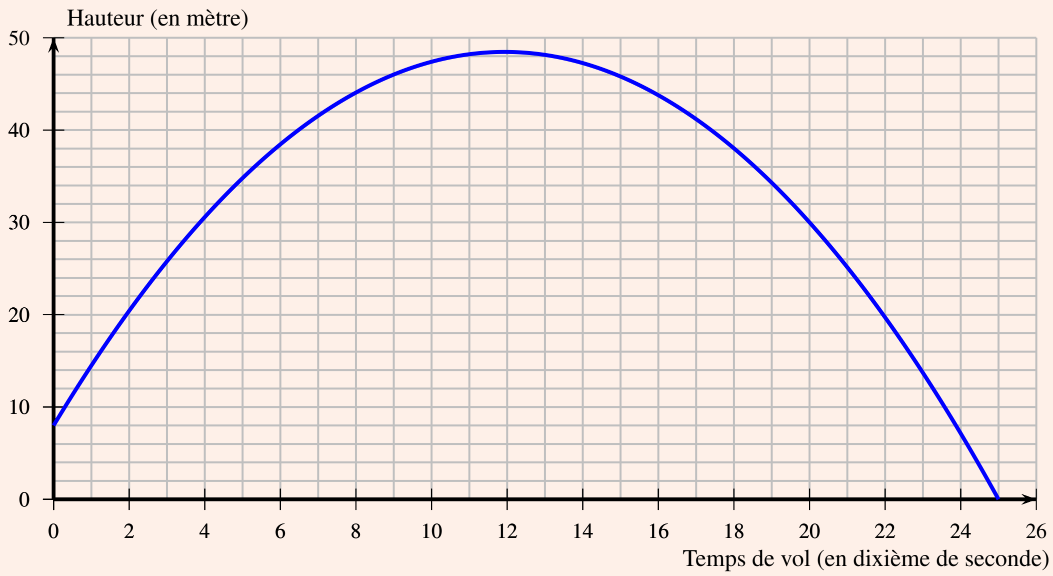
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - x^2$.
  - **Question 3.** Une des affirmations suivantes est fausse. Laquelle ?
    - ❏ La parabole représentant f est orientée vers le bas.
    - ❏ La fonction f admet deux racines.
    - ❏ La fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
    - ❏ Sur l'intervalle $]-\infty\,; 0[$, la fonction f est strictement négative.
- Un mobile se déplace sur une droite graduée. Son abscisse $x(t)$ sur cette droite graduée (exprimée en mètre) en fonction du temps écoulé t depuis le départ (exprimé en minute) est donné par l'une des expressions équivalentes suivantes :

$$p(t) = \frac{1}{4}(t+3)(t-1)(t-2) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{7}{4}t + \frac{3}{2}$$

  - **Question 4.** Déterminer la position du mobile à l'instant $t = 0$.
  - **Question 5.** Déterminer à quel(s) instant(s) le mobile a une abscisse négative.

Exercice 20.2 À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notées A et B.

Partie A – La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle hauteur atteindra la fusée après 0,7 seconde de vol ?
2. Pour des raisons de sécurité, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 40 mètres. Déterminer l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satisfaire à cette contrainte.

Partie B – On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$ par :

$$f(x) = -0,5x^2 + 10x + 8$$

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres. On cherche à déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

1. a. Montrer que pour satisfaire à la contrainte, x doit être solution de l'inéquation :

$$-0,5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0$$

   b. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,20]$, on a :

$$-0,5x^2 + 10x - 32 = -0,5(x-4)(x-16)$$

   c. Dresser le tableau de signes de $-0,5x^2 + 10x - 32$ sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
   d. En déduire la réponse que l'on peut apporter au problème posé.
2. Pour des raisons d'esthétique, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale.
   Quel temps de vol avant explosion doit-il alors programmer ?

■

Exercice 20.3 Une usine est spécialisée dans la production d'un produit ménager, dont elle produit entre 0 et 50 tonnes chaque mois. On estime que le bénéfice mensuel de cet entreprise, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé grâce à une fonction B, définie sur $[0\,;50]$, par :

$$B(x) = x^3 - 95x^2 + 2\,450x - 10\,000$$

1. a. Calculer le bénéfice dégagé par l'entreprise si elle vend une tonne de produit.
   b. Dans ce cas, l'entreprise est-elle en bénéfice ou en déficit ? Justifier.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;50]$:

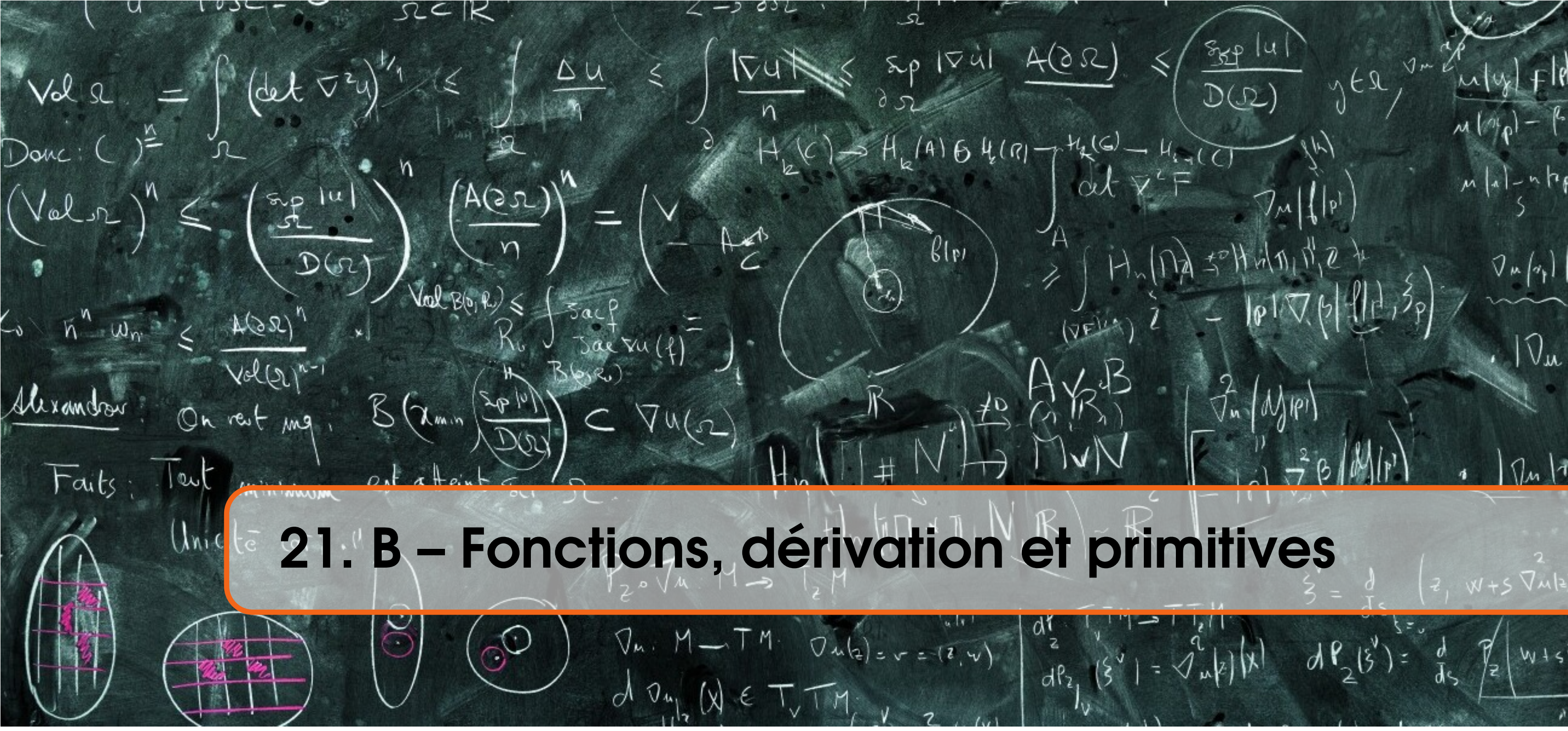
   $$B(x) = (x-5)(x-40)(x-50)$$

3. Étudier le signe de $B(x)$ sur $[0\,;50]$.
4. En déduire la quantité de produit à fabriquer pour pouvoir dégager un bénéfice.
5. Un logiciel de calcul donne les coordonnées du maximum de la fonction B sur $[0\,;50]$:

   $$\left(\frac{1}{3}\left(95-5\sqrt{67}\right)\,;\,\frac{250}{27}\left(440+67\sqrt{67}\right)\right)$$

   Compléter la phrase suivante avec des valeurs arrondies à $0,01$ près, si nécessaire : « *Pour dégager un bénéfice maximum, l'entreprise doit produire et vendre ... tonnes de produits ménagers. Dans ce cas, son bénéfice est maximum et s'élève à ... €* ».

■



21. B – Fonctions, dérivation et primitives

Ce chapitre mêle des exercices-bilans sur les chapitres 5, 6 et 7 (dérivation, primitives).

Exercice 21.1 **Automatismes.** *Répondre à ces questions, sans justifications.*

- On considère une fonction f telle que $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$.
  — **Question 1.** Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x - 12$.
  — **Question 2.** Déterminer l'expression de $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.
  — **Question 3.** Déterminer l'expression de $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Si elle est vraie, prouver cette affirmation. Sinon, trouver un contre-exemple qui montre qu'elle est fausse.
  — **Question 4.** « Une fonction ne peut pas avoir deux primitives différentes. »
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.
  — **Question 5.** Déterminer l'unique primitive F de f telle que $F(1) = -1$.

■

Exercice 21.2 On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{18x}{(x^2+3)^2}$.

1. a. Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = -\frac{9}{x^2+3}$$

est une primitive de la fonction f.

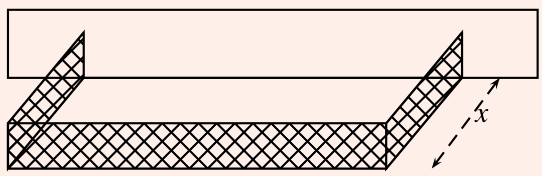
b. En déduire l'expression de la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

2. Démontrer qu'une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de la fonction F au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{9}{8}x - \frac{9}{8}$$

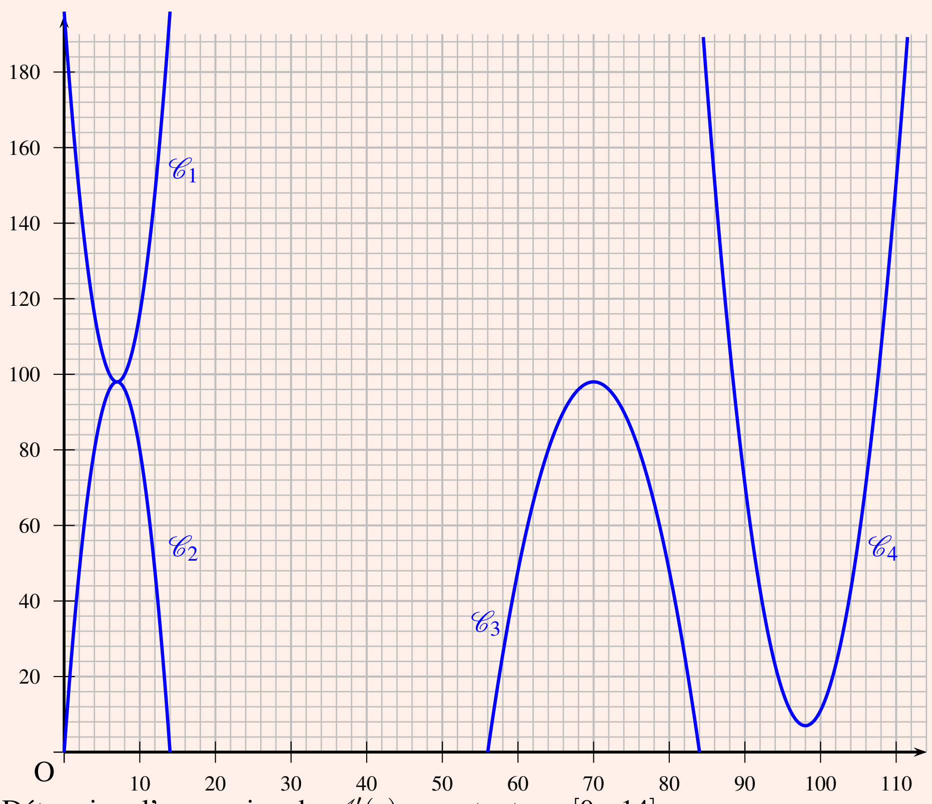
■

Exercice 21.3 Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur de sa ferme afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos. Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale. On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.

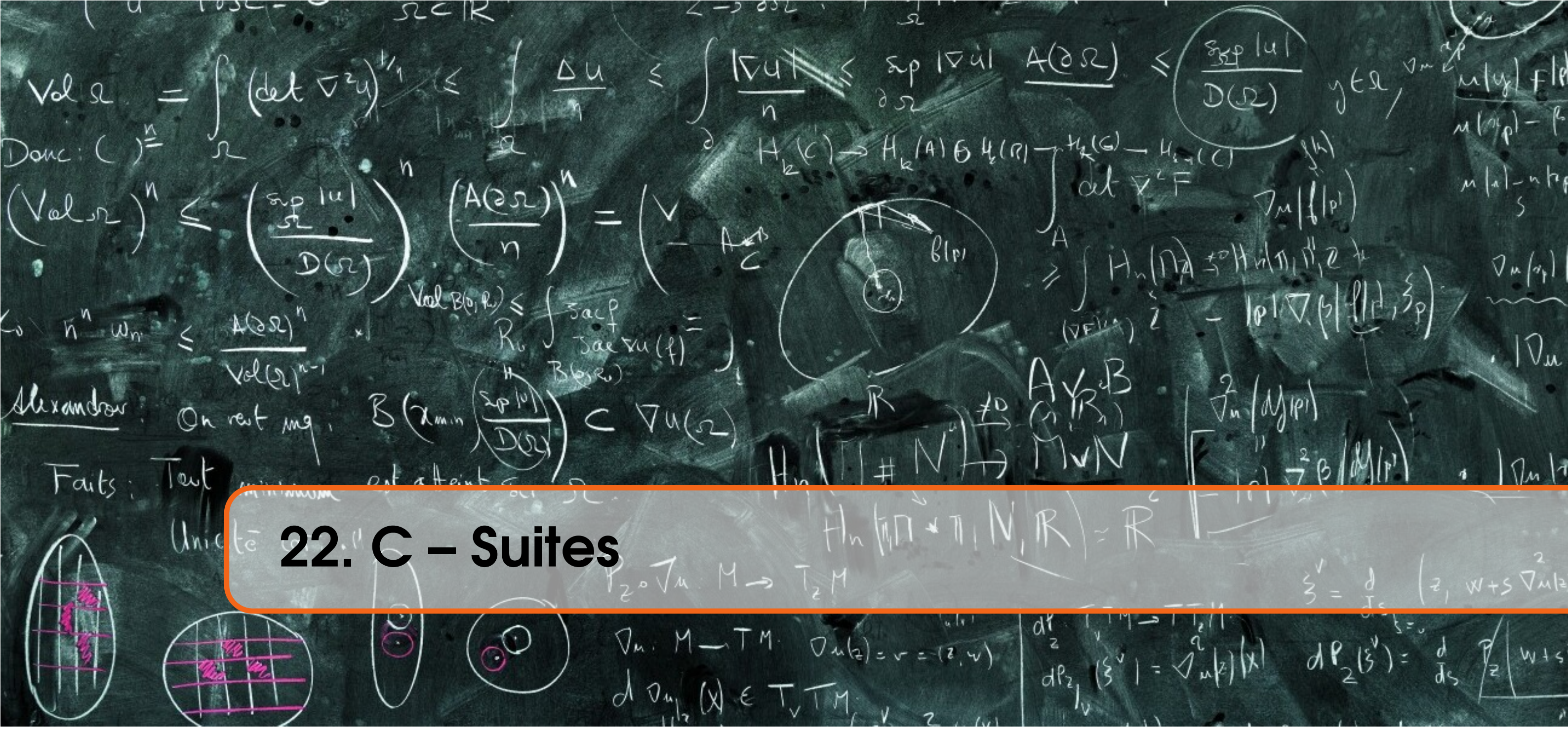


On appelle $\mathscr{A}$ la fonction qui à un nombre x associe $\mathscr{A}(x)$ l'aire de l'enclos. La fonction $\mathscr{A}$ est ainsi définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 14]$.

1. Justifier que l'enclos est assimilable à un rectangle de dimensions x et $28-2x$.
2. Justifier que $\mathscr{A}(x) = -2x^2 + 28x$, puis que $\mathscr{A}(x) = -2(x-7)^2 + 98$.
3. Parmi ces quatre courbes, identifier celle qui représente la fonction $\mathscr{A}$.



4. Déterminer l'expression de $\mathscr{A}'(x)$, pour tout $x \in [0\ ;\ 14]$.
5. Étudier le signe de $\mathscr{A}(x)$, puis en déduire le tableau de variations de $\mathscr{A}$ sur $[0\ ;\ 14]$.
6. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Donner alors cette aire.



22. C – Suites

Ce chapitre mêle des exercices-bilans sur les chapitres 8 et 9 (suites numériques, suites arithmétiques, suites géométriques).

Exercice 22.1 **Automatismes.** *Répondre à ces questions, sans justifications.*

- On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n + 1$.
  — **Question 1.** Donner la valeur de u_2.
- On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = u_n - u_n^2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

  — **Question 2.** Donner la valeur de u_2.
- On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - 3n$.
  — **Question 3.** Compléter la phrase : « La suite u est arithmétique de raison ... ».
- On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville, dont on estime qu'elle croît de 3% par an. En 2024, la population de cette ville est de 13 900 habitants. On note p_n la population de cette ville pour l'année $2024 + n$.
  — **Question 4.** Donner la nature de cette suite. Préciser son premier terme et sa raison.
  — **Question 5.** Estimer la valeur de p_2. Interpréter cette valeur par une phrase, dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 22.2 La population d'une ville A augmente chaque année de 70 habitants. La ville A avait 4 600 habitants en 2010. Pour tout entier n, on note a_n le nombre d'habitants de la ville A à la fin de l'année $2010 + n$.

1. Calculer le nombre d'habitants de la ville A à la fin de l'année 2011.
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3. Donner l'expression de a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
4. Calculer le nombre d'habitants de la ville A en 2025.
5. Déterminer, par la résolution d'une inéquation, le nombre d'années qu'il faudra pour que cette ville ait plus de 7 000 habitants.

Exercice 22.3 Une entreprise spécialisée dans la vente à distance souhaite estimer son chiffre d'affaires, au travers de l'évolution du nombre de produits qu'elle vend. On suppose qu'à partir de l'année 2022, le nombre de produits vendus augmente chaque année de 16 %.

On décide de modéliser ce nombre par une suite (u_n) où u_n désigne le nombre de produits vendus l'année $(2022+n)$.

1. Donner la valeur de u_0. Calculer la valeur arrondie à l'unité de u_1, et u_2.
2. Donner la nature de la suite (u_n), et préciser sa raison.
3. Donner le terme général u_n en fonction de n.

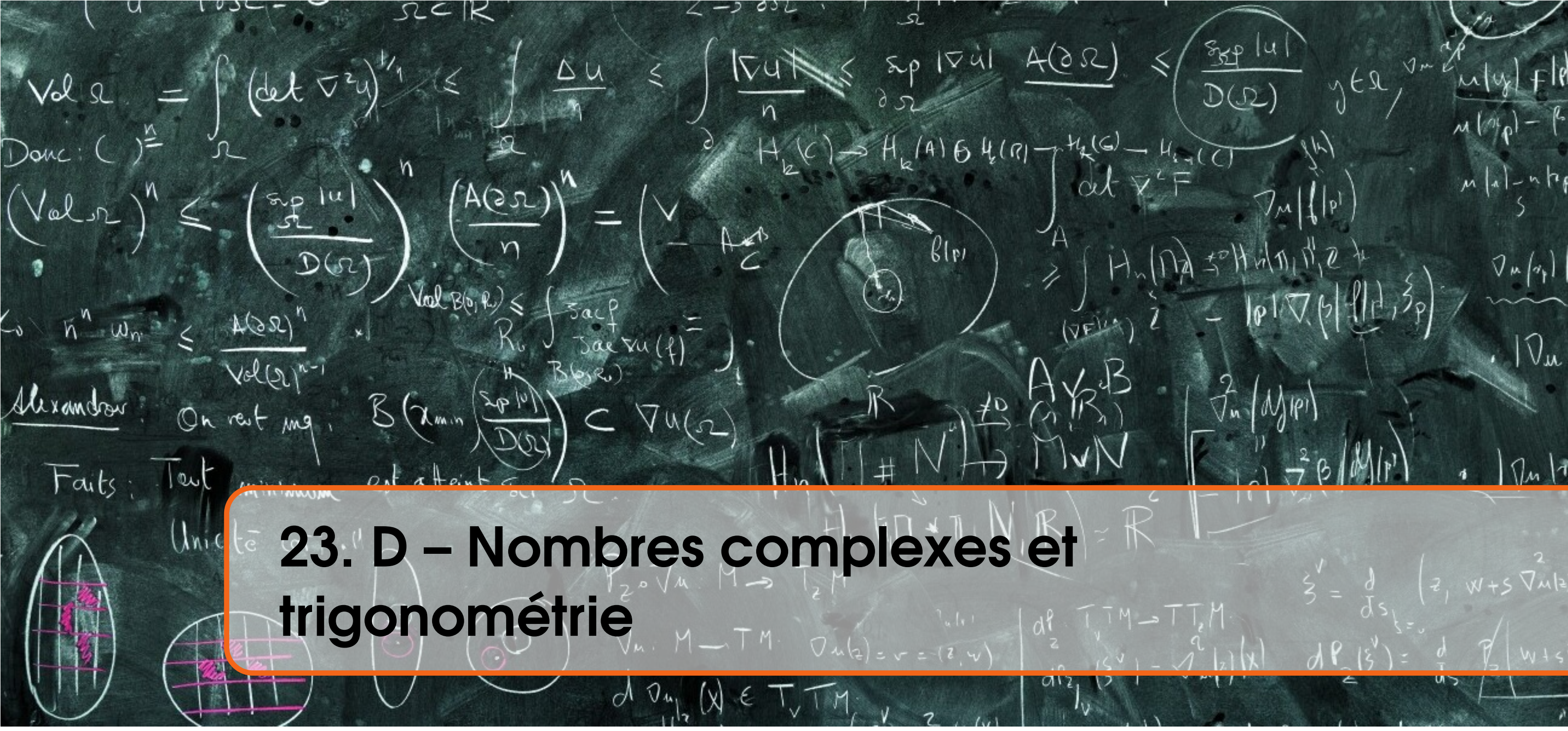
L'entreprise prévoit d'investir dans une nouvelle plateforme numérique de vente à distance dès que le nombre de produits vendus dépassera 3 000.

4. a. Compléter les différentes lignes non renseignées dans l'algorithme ci-dessous pour qu'après exécution, la variable N contienne l'année à partir de laquelle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois 3 000 produits selon ce modèle.

```
N ← 0
U ← ......
Tant que .........
    N ← ...
    U ← ... * U
Fin Tant que
N ← 2022 + N
```

   b. Déterminer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois 3 000.

■



23. D – Nombres complexes et trigonométrie

Ce chapitre mêle des exercices-bilans sur les chapitres 10, 11 et 14 (repérage sur le cercle trigonométrique, formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe).

Exercice 23.1 **Automatismes.** *Répondre à ces questions, sans justifications.*

- Convertir les mesures d'angles suivantes dans l'unité demandée.
  - **Question 1.** 140 degrés en radians.
  - **Question 2.** $\frac{3\pi}{8}$ radians en degrés.
- On considère la mesure d'angle $\theta = \frac{11\pi}{3}$.
  - **Question 3.** Déterminer la mesure principale de θ.
- On considère le nombre complexe $z = 1 + i$.
  - **Question 4.** Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z^2.
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Si elle est vraie, prouver cette affirmation. Sinon, trouver un contre-exemple qui montre qu'elle est fausse.
  - **Question 5.** « Le conjugué d'un nombre réel est égal à l'opposé de ce nombre. ».

■

Exercice 23.2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 2 cm. On note A, B, C et D les points dont les affixes respectives sont :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_B = -z_A, \quad z_C = z_A^2 \quad \text{et } z_D = \frac{8}{z_A}$$

1. Donner l'écriture algbérique de z_B et z_C, et montrer que $z_D = -z_C$.
2. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.
3. *Dans cette question, on s'intéresse au triangle ABC.*
   a. Déterminer les longueurs AB, AC et BC.
   b. En déduire que le triangle ABC est un triangle rectangle.
4. En déduire la nature du quadrilatère $ACBD$.

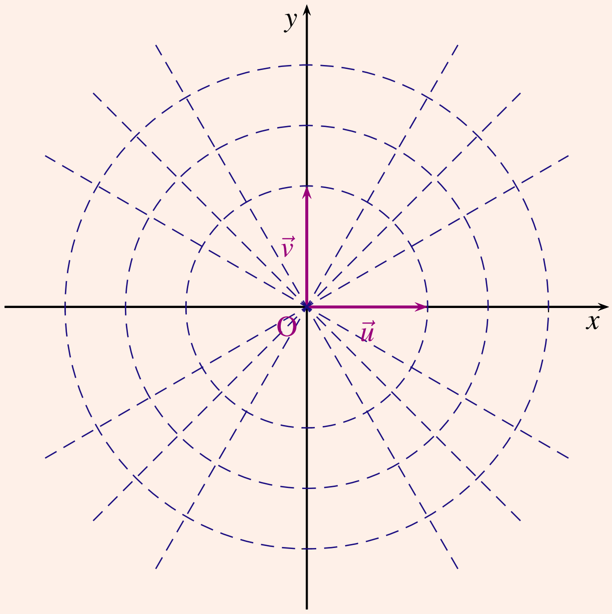
■

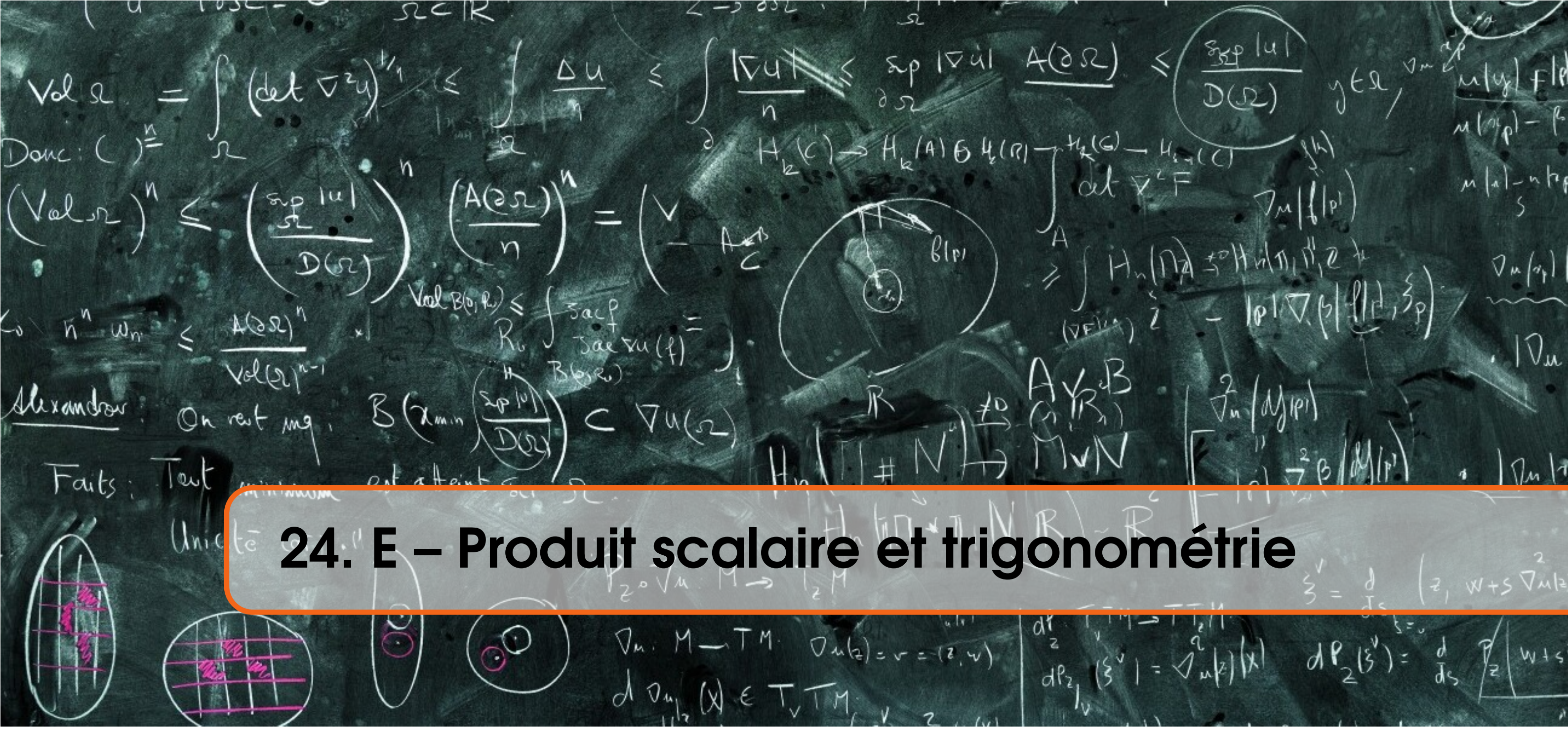
Exercice 23.3 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On définit les quatre nombres complexes suivants :

$$z_A = -1 - i\sqrt{3}, \qquad z_B = -\frac{2}{\overline{z_A}}, \qquad z_C = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right), \qquad z_D = \frac{3i\sqrt{2}}{-2+2i}$$

Pour chacun des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer son module.
2. Déterminer un argument, exprimé sous forme de mesure principale en radians.
3. En déduire une écriture du nombre complexe sous forme trigonométrique.
4. Placer le point image correspondant dans le repère ci-dessous.





24. E – Produit scalaire et trigonométrie

Ce chapitre mêle des exercices-bilans sur les chapitres 12, 13 et 15 (produit scalaire de deux vecteurs du plan, cosinus et sinus d'un nombre réel, fonctions cosinus et sinus).

Exercice 24.1 **Automatismes.** *Répondre à ces questions, sans justifications.*

- On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\,;\,3)$ du plan.
  — **Question 1.** Déterminer la valeur de $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.
- ABC est un triangle équilatéral de côté 3cm. On pose M le milieu du segment $[AB]$.
  — **Question 2.** Déterminer la valeur de $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$.
- On considère l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'inconnue réelle x.
  — **Question 3.** Résoudre cette équation sur $]-\pi\,;\,\pi]$.
- La valeur instantanée (en volts) d'une tension alternative sinusoïdale en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $u(t) = 317{,}5\sin(125\pi t)$.
  — **Question 4.** Donner la valeur maximale et la valeur minimale de $u(t)$.
  — **Question 5.** On définit la *tension efficace U d'un courant alternatif* comme la tension du courant continu qui produit le même effet que ce courant alternatif. Calculer U, en sachant que :

$$U_m = U\sqrt{2}$$

où U_m est la tension alternative maximale.

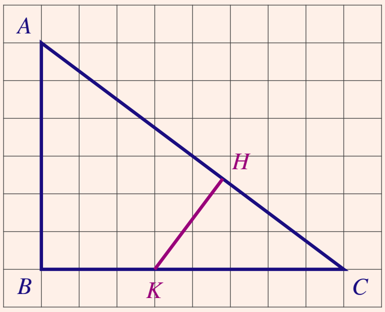
■

Exercice 24.2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A\,(-1\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,-3)$ et $C\,(4\,;\,4)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire la valeur, en radians, de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. En déduire la valeur, en radians, de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

■

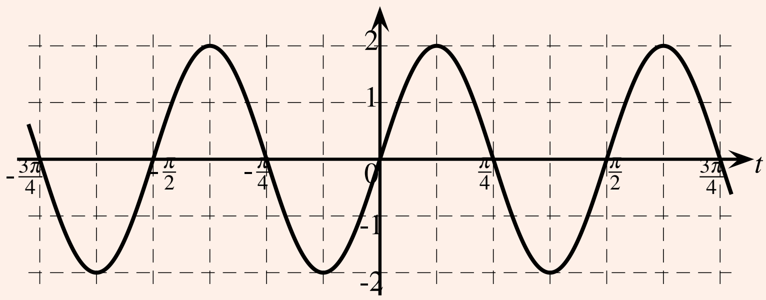
Exercice 24.3 Dans la configuration ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A, tel que $AB = 6$ et $BC = 8$. De plus, H est le point du segment $[BC]$ tel que $AH = 6$, et tel que la droite (HK) est perpendiculaire à (AC).



Calculer les produits scalaires suivants :

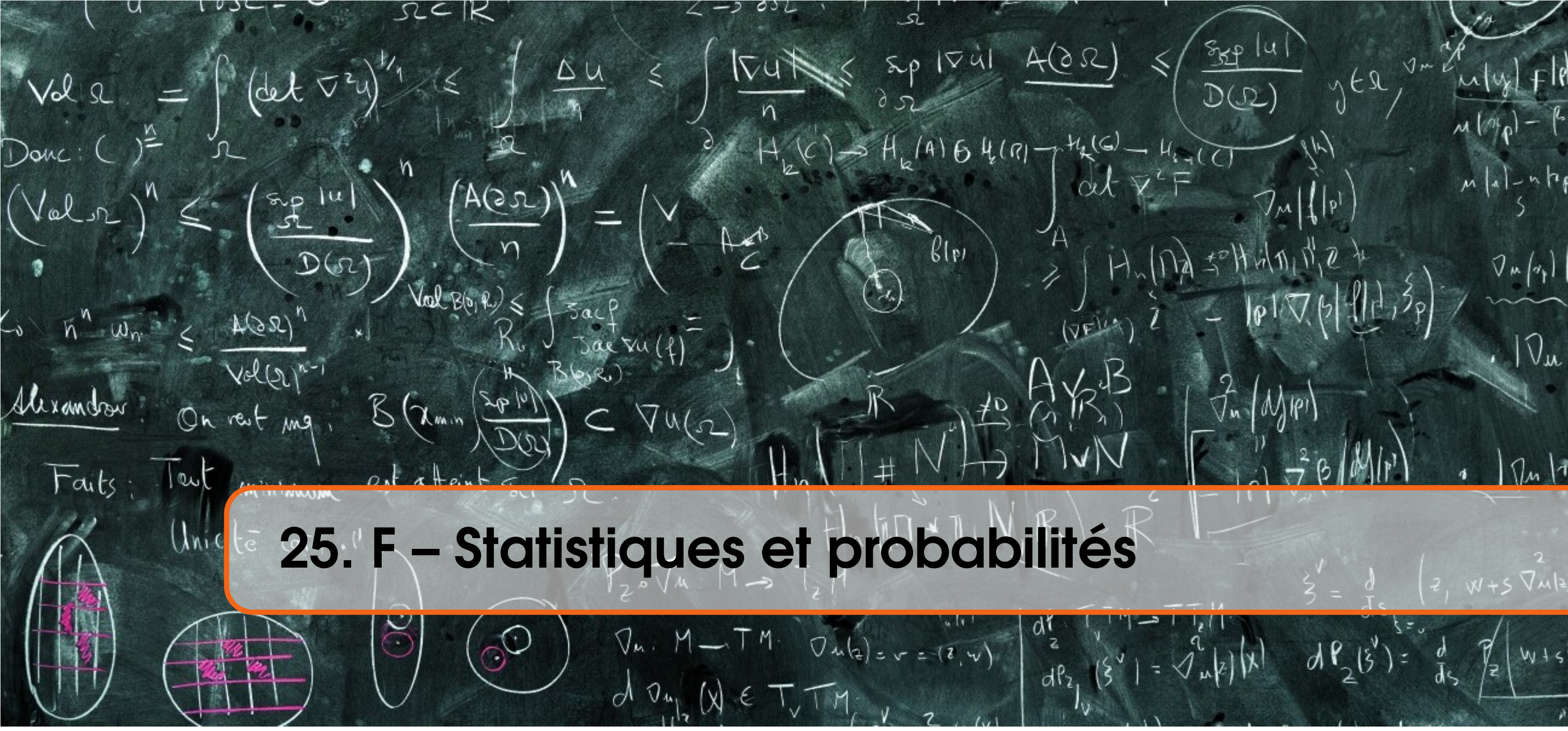
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CK}$
3. $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$
4. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$

Exercice 24.4 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(t) = A\sin(\omega t)$.



On souhaite, à l'aide de cette courbe, retrouver l'expression de la fonction f.

1. *Détermination de la pulsation ω.*
   a. Déterminer graphiquement la période T de la fonction f.
   b. On rappelle que la pulsation ω est reliée à la période T par :
   $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
   Donner la valeur de la pulsation ω.
2. *Détermination de l'amplitude A.*
   a. Justifier graphiquement que $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$.
   b. En déduire la valeur de l'amplitude A.
3. En déduire l'expression de la fonction f.



25. F – Statistiques et probabilités

Ce chapitre mêle des exercices-bilans sur les chapitres 16, 17, 18 et 19 (statistiques descriptives, probabilités conditionnelles, variables aléatoires et théorie de Bernoulli).

Exercice 25.1 **Automatismes.** *Répondre à ces questions, sans justifications.*

- Le comité d'entreprise d'une société française souhaite organiser un week-end à Rome. Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette société afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport. Les moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar. Les résultats de l'enquête sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femmes	468	196	56	720
Hommes	150	266	64	480
Total	618	462	120	1 200

  On note T l'évènement « L'employé prend le train » et F l'évènement « L'employé est une femme ».
  - **Question 1.** Calculer les valeurs de $\mathbb{P}(T\cap F)$ et de $\mathbb{P}(F)$, arrondie au millième.
  - **Question 2.** En déduire la valeur de $\mathbb{P}_F(T)$, arrondie au millième.
- Une compagnie d'assurance auto propose deux types de contrat : un contrat « Tous risques » dont le montant annuel est de 500 €, et un contrat « de base » dont le montant annuel est de 400 €. On note X la variable aléatoire qui donne le montant du contrat souscrit par un client, et on sait que 62% de la clientèle a souscrit à un contrat « Tous risques ».
  - **Question 3.** Compléter la phrase suivante : « La variable aléatoire X ne prend que deux valeurs : $a = \dots$ et $b = \dots$ ».
  - **Question 4.** Donner les valeurs de $\mathbb{P}(X=a)$ et $\mathbb{P}(X=b)$.
  - **Question 5.** Déterminer l'espérance de X. Interpréter cette phrase dans le contexte de l'énoncé.

■

Exercice 25.2 *Dans cet exercice, toutes les probabilités seront à arrondir à* 10^{-4} *près.*

L'entreprise SASSEMBON est spécialisée dans la fabrication de savons. Elle propose des savons senteur vanille ou noix de coco qui peuvent présenter des défauts de forme lors de la fabrication. Après avoir réalisé une étude sur 200 savons, l'entreprise constate que :

- 130 savons sont à la vanille,
- parmi les savons à la vanille, 2 % présentent un défaut de forme,
- parmi les savons à la noix de coco, 96 % ne présentent aucun défaut de forme.

On prend un savon au hasard. On considère les évènements V : « Le savon est à la vanille » et F : « Le savon présente un défaut de forme ».

1. Donner la valeur des probabilités $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}_V(F)$ et $\mathbb{P}_{\overline{V}}\left(\overline{F}\right)$.
2. Réaliser un arbre pondéré de probabilité représentant la situation.
3. Calculer la probabilité que le savon soit à la noix de coco et présente un défaut de forme.
4. Montrer que la probabilité qu'un savon présente un défaut de forme est $0,027$.
5. Sachant que le savon présente un défaut de forme, quelle est la probabilité qu'il soit à la vanille ?
6. Dans ce magasin, le prix moyen d'un savon à la vanille est de 5 € et le prix moyen d'un savon à la noix de coco est de 7 €. Lorsqu'un savon présente un défaut de forme, son prix est baissé de $1,5$ €.
   On note X la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.
   a. Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i				
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

   b. Calculer l'espérance de X.
   Donner une interprétation de ce nombre dans le contexte de l'exercice.