Mathématiques (cours)

Première STI2D

Kevin Cauvin

Sixième impression, Juillet 2025

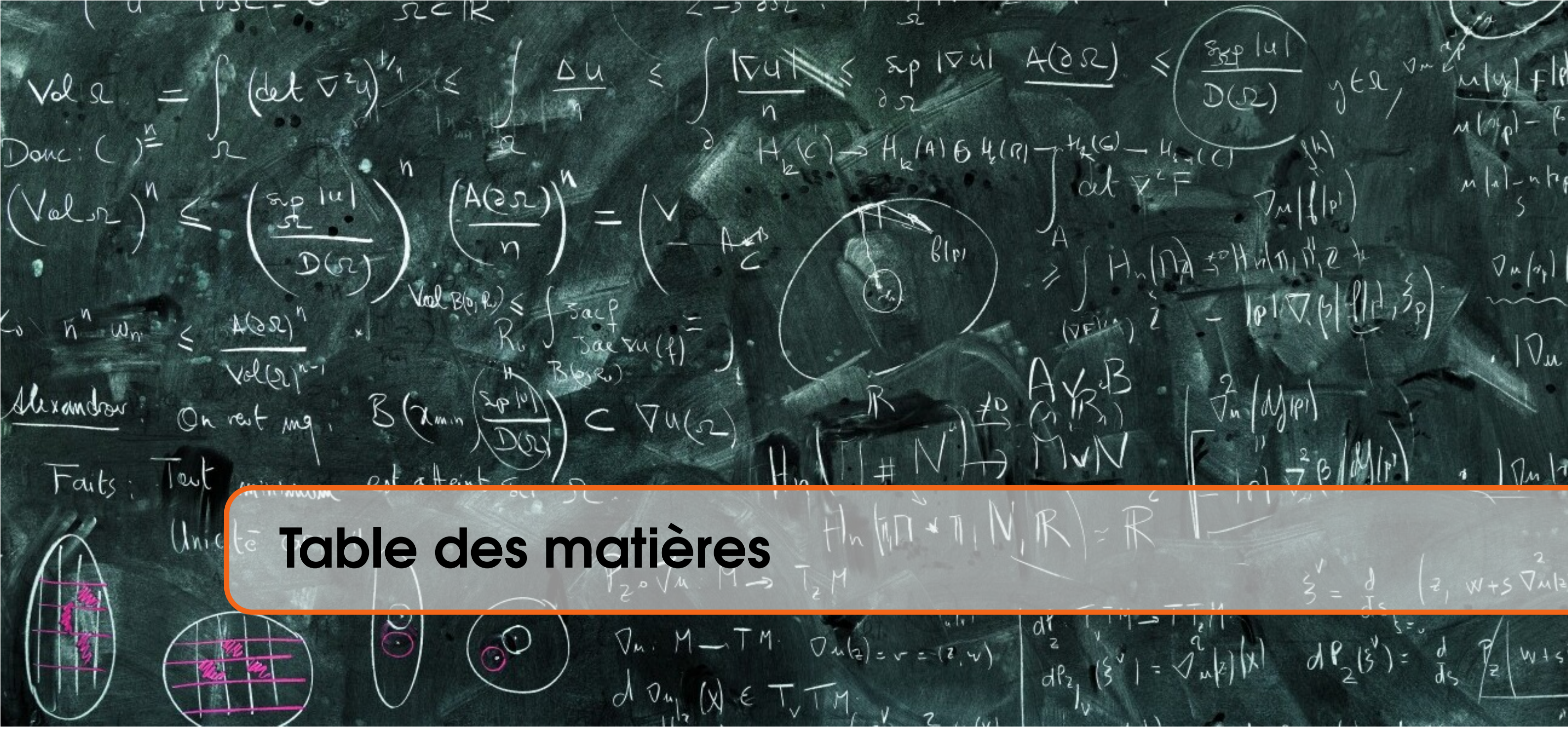
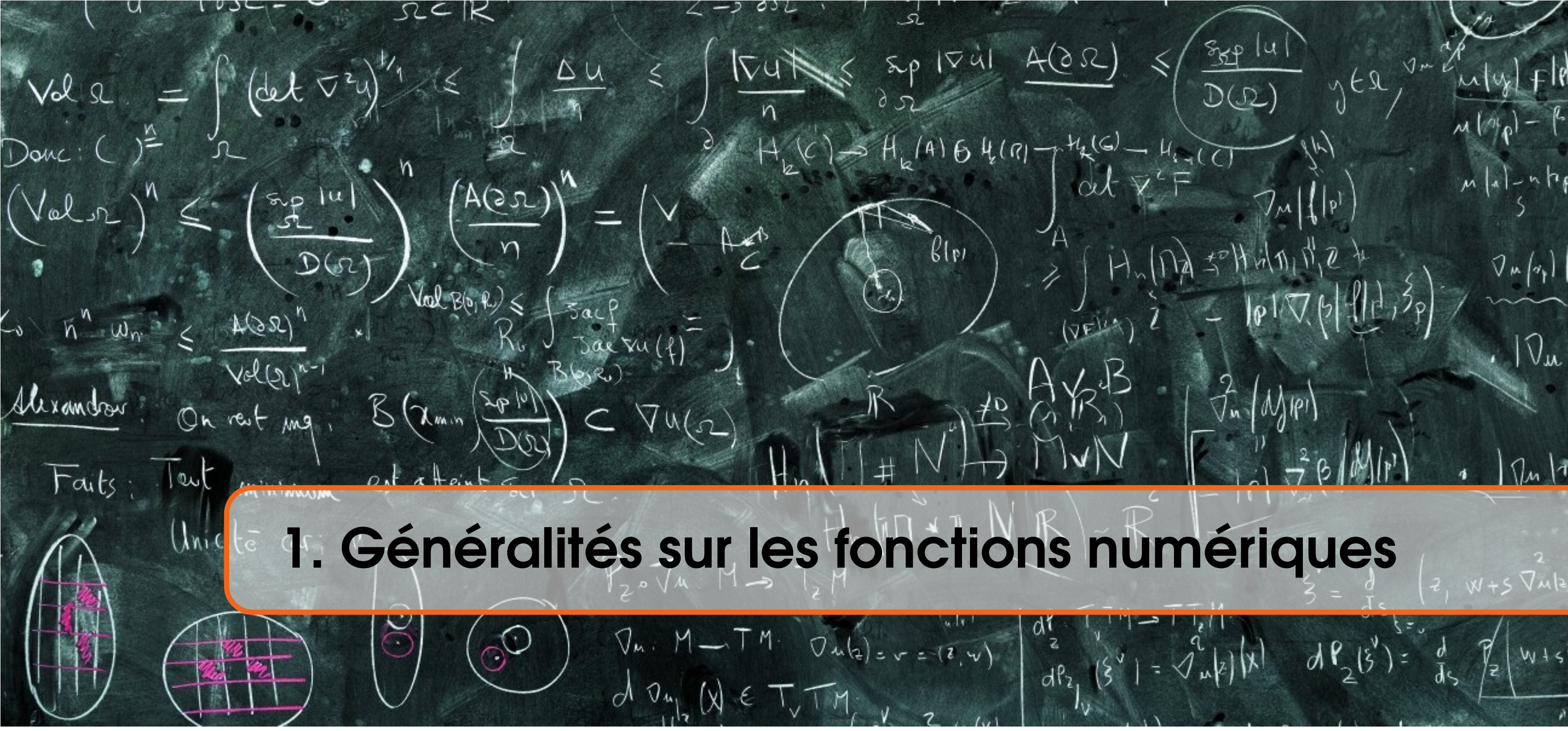


Table des matières

I Analyse réelle (fonctions)

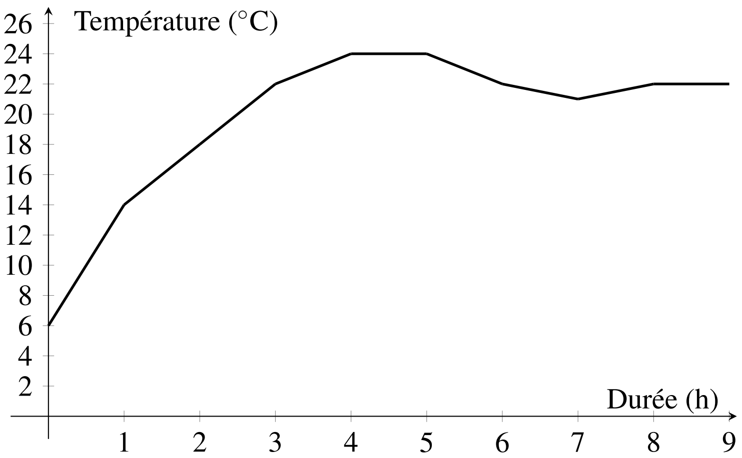
Analyse réelle (fonctions)



1. Généralités sur les fonctions numériques

1.1 Notion de fonction numérique

■ **Exemple 1.1** Dans une pièce initialement fraîche, on décide d'allumer le chauffage. On relève la température, en degrés Celsius, toutes les heures. Les résultats sont représentés par ce graphique.



1. Quelle est la température au moment de l'allumage du chauffage ? . . . .
2. Quelle est la température deux heures après l'allumage du chauffage ? . . . .
3. Quel est le gain de température obtenu grâce au chauffage sur deux heures ? . . . .
4. Quelle est la température maximale obtenue dans cette pièce ? . . . .
5. Au bout de combien de temps la température de la pièce était-elle de 14°C ? . . . .

Définition 1.1 Une *fonction* f est un processus qui, à un nombre x, associe un unique nombre réel noté $f(x)$. Son *ensemble de définition*, noté $\mathscr{D}_f$, est l'ensemble contenant toutes les valeurs de x pour lesquelles on peut bien calculer $f(x)$.

■ **Exemple 1.2** Associer, à chaque expression, son ensemble de définition.

$f(x) = 4x - 1$	•	•	$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
$f(x) = 3 - \sqrt{x}$	•	•	$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
$f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$	•	•	$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+$.

1.2 Image, antécédent, tableau de valeurs

■ **Exemple 1.3** Chez un primeur, un melon coûte 2€. On note $\mathscr{P}(x)$ la dépense d'un client, en euros, lorsque celui-ci achète x melons.

1. Expliquer pourquoi la fonction $\mathscr{P}$ est définie sur $\mathbb{N}$, puis que $\mathscr{P}(x) = 2x$.
   ....
   ....
2. Calculer $\mathscr{P}(3)$. Interpréter ce résultat, à l'aide d'une phrase, dans le contexte de l'énoncé.
   ....
   ....

Définition 1.2 On note f une fonction.

1. L'*image* d'un nombre x par f est le nombre $f(x)$.
2. Un *antécédent* d'un nombre y par f est un nombre x tel que $y = f(x)$.

R **Lorsqu'elle existe**, l'image d'un nombre par une fonction est **unique**. En revanche, il peut exister un unique antécédent d'un nombre par une fonction, ou plusieurs, ou aucun.

■ **Exemple 1.4** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

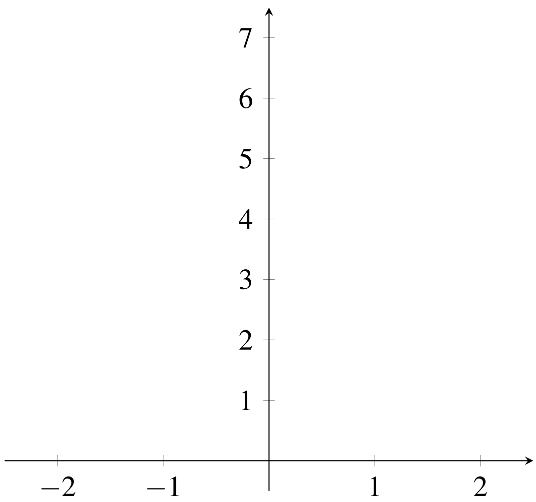
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

2. Répondre aux questions suivantes.
   — Donner la valeur de l'image de 1 par f. ....
   — Donner la valeur de deux antécédents de 1 par f. ....
   — Donner la valeur d'un antécédent de 7 par f. ....

1.3 Courbe représentative, résolutions graphiques

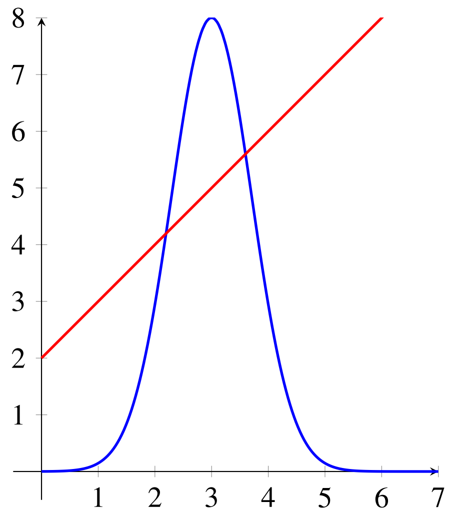
R La courbe d'une fonction f est l'ensemble des points $(x\,;\,y)$ tels que $y = f(x)$.
Autrement dit, pour tracer une courbe d'une fonction, il faut :
— Dresser un tableau de valeurs de la fonction que l'on souhaite tracer.
— Tracer un repère orthogonal d'origine O.
— Placer les points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$, puis les relier entre eux.

■ **Exemple 1.5** Tracer la courbe de la fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.



R Pour résoudre graphiquement une équation (du type $f(x) = g(x)$) ou une inéquation (du type $f(x) \leqslant g(x)$), il faut :
- — Construire les courbes des fonctions f et g.
- — Pour résoudre $f(x) = g(x)$, lire les abscisses des points d'intersection des courbes.
- — Pour résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, lire les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en-dessous de ceux de $\mathscr{C}_g$.

■ **Exemple 1.6** On a tracé les courbes d'une fonction f (droite) et d'une fonction g (curviligne). Résoudre graphiquement les (in)équations suivantes sur $[0; 7]$.



1. $f(x) = 1$.

   . . . .
2. $f(x) \geqslant 4$.

   . . . .
3. $g(x) = 2$.

   . . . .
4. $g(x) = 8$.

   . . . .
5. $g(x) \leqslant 3$.

   . . . .
6. $f(x) = g(x)$.

   . . . .
7. $f(x) < g(x)$.

   . . . .

1.4 Taux de variation, monotonie d'une fonction

Définition 1.3 Soient f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$, a et b deux réels distincts de $\mathscr{D}_f$. Le *taux de variation de f entre a et b* est le nombre :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

R Ce taux de variation correspond au coefficient directeur de (AB), où $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

■ **Exemple 1.7** Calculer le taux de variation, entre -1 et 5, de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4$.

. . . .

. . . .

Définition 1.4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Elle est dite *monotone* si elle est croissante sur I, **ou** elle est décroissante sur I, **ou** elle est constante sur I.

Proposition 1.1 Soient f une fonction définie sur un intervalle I.
1. Si les taux de variation de f sont toujours positifs sur I, alors f est croissante sur I.
2. S'ils sont toujours négatifs sur I, alors f est décroissante sur I.
3. S'ils sont toujours nuls sur I, alors f est constante sur I.

■ **Exemple 1.8** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -33x + 10$. Déterminer sa monotonie.

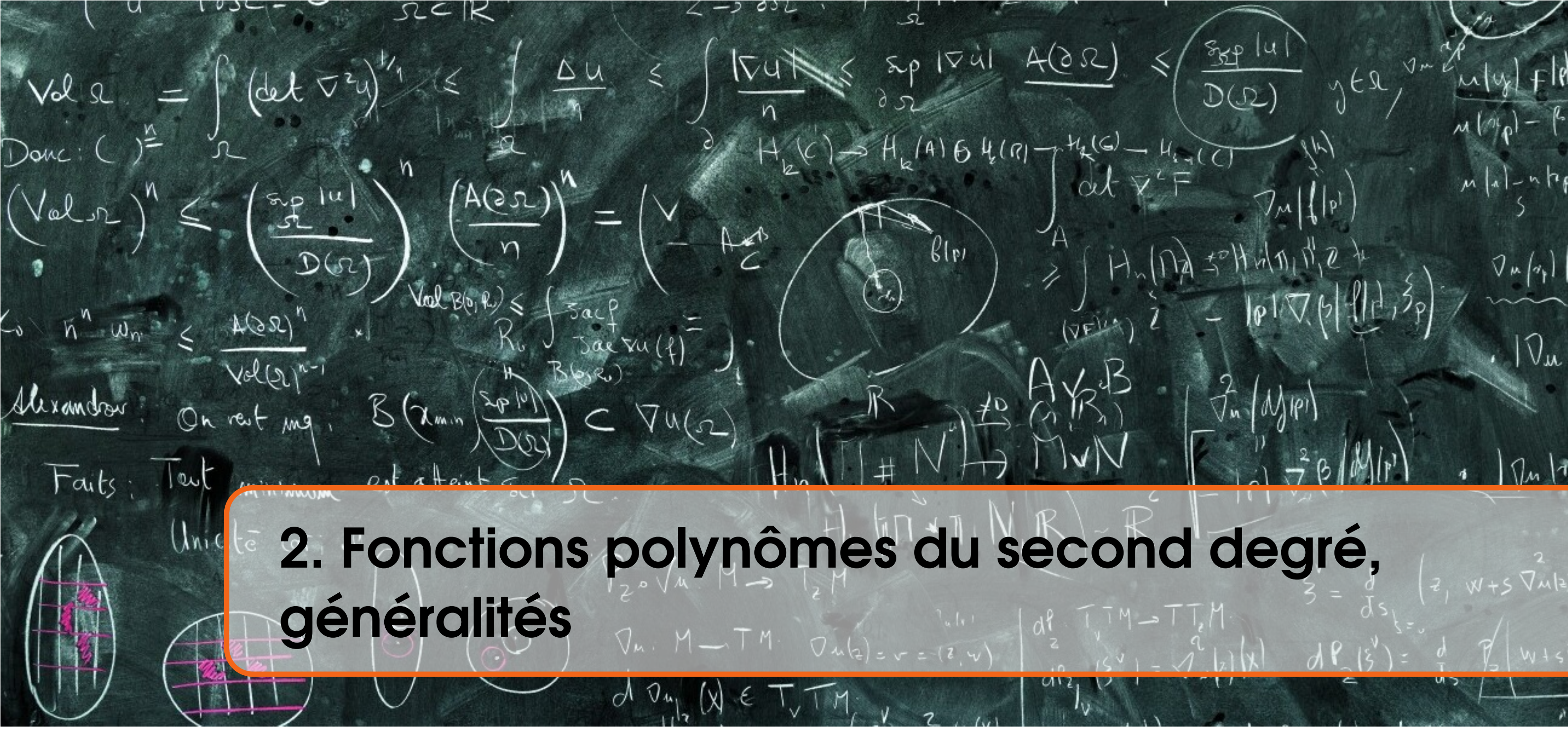
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



2. Fonctions polynômes du second degré, généralités

2.1 Définition, exemples et contre-exemples

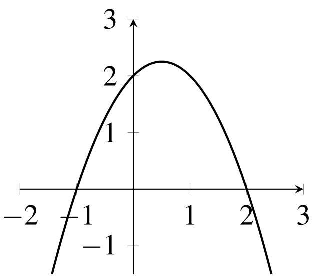
Définition 2.1 Une *fonction polynôme du second degré* est une fonction f définie par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels, avec $a \neq 0$.

■ **Exemple 2.1** On donne ci-dessous une liste d'expression de fonctions. Pour celles qui sont du second degré, indiquer les valeurs des coefficients a, b et c. Pour celles qui ne sont pas du second degré, expliquer brièvement pourquoi.

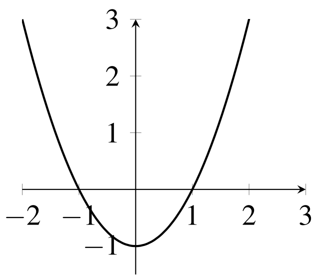
1. $f_1(x) = 3x - 7$: ....
2. $f_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$: ....
3. $f_3(x) = -6x^2 + 8$: ....
4. $f_4(x) = \dfrac{4}{3}x^2 - 5x$: ....
5. $f_5(x) = -11x - 2x^2$: ....

2.2 Représentation graphique

Définition 2.2 La courbe représentant une fonction du second degré s'appelle une *parabole*. On dit qu'elle est « *tournée vers le bas* » si $a < 0$, et « *tournée vers le haut* » si $a > 0$.



$a < 0$

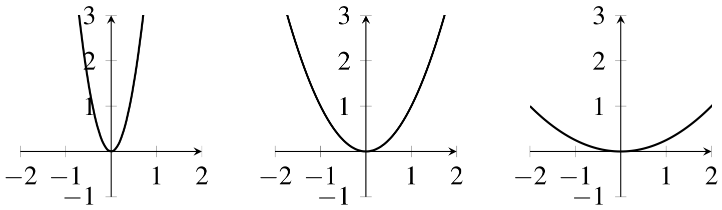


$a > 0$

Définition 2.3 Le *sommet* d'une parabole est le point de coordonnées $(\alpha\,;\beta)$, avec :

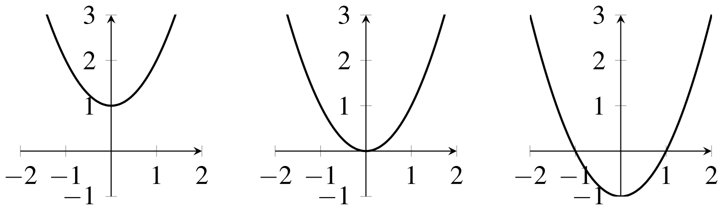
$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

R La valeur de a influe l'« écartement » de la courbe autour de l'axe des ordonnées.



$6x^2$ x^2 $0,25x^2$

R La valeur de c influe l'intersection de la courbe sur l'axe des ordonnées.

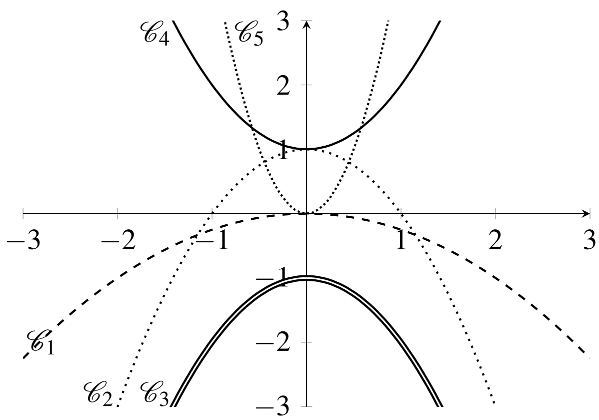


x^2+1 x^2 x^2-1

Proposition 2.1 Soit f une fonction du second degré.

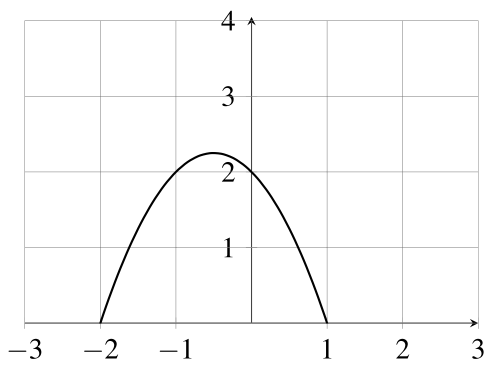
- Le sommet de la parabole correspond à un maximum si $a<0$, à un minimum si $a>0$.
- La parabole représentant f admet un axe de symétrie vertical d'équation $x=\alpha$.

■ **Exemple 2.2** Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.

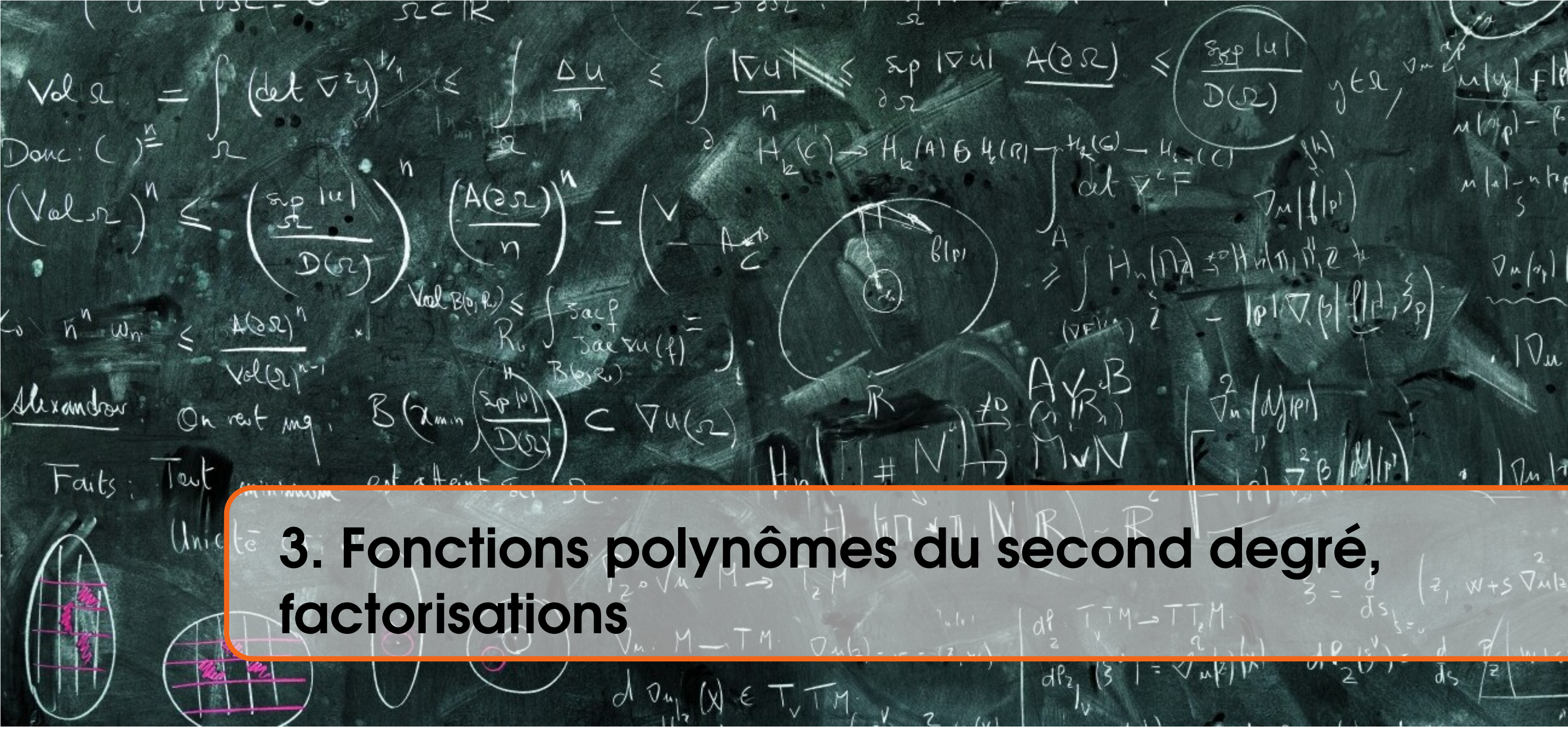


1. $f(x)=-x^2-1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
2. $g(x)=-0,25x^2$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
3. $h(x)=x^2+1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
4. $i(x)=4x^2$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
5. $j(x)=-x^2+1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .

■ **Exemple 2.3** La courbe ci-dessous représente une fonction du second degré. Retrouver son expression sous la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois réels à déterminer, avec $a\neq 0$.



Votre réponse :



3. Fonctions polynômes du second degré, factorisations

3.1 Factorisation de polynômes du second degré

3.1.1 Non-existence d'une forme factorisée

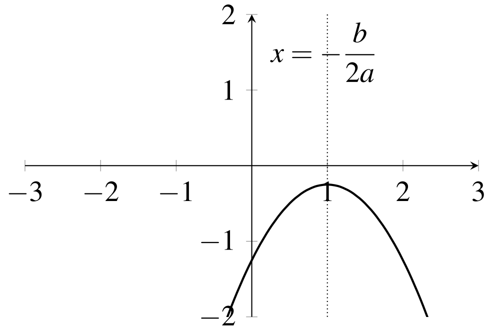
Proposition 3.1 Certaines fonctions du second degré ne peuvent pas s'écrire sous une forme factorisée, mais uniquement sous une forme développée du type $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Dans ce cas :

① $\mathscr{C}$ a pour axe de symétrie :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

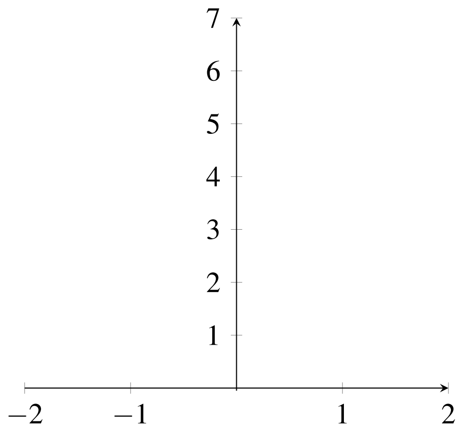
② f n'a pas de racines.

③ f est toujours strictement du signe de a.



■ **Exemple 3.1** On définit la fonction f par $f(x) = x^2 + x + 1$, dont la courbe est notée $\mathscr{C}$. On admet que l'expression de f ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de f sur $\mathbb{R}$? ....
   ....
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$. ....
   ....
3. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.



3.1.2 Existence d'une forme factorisée

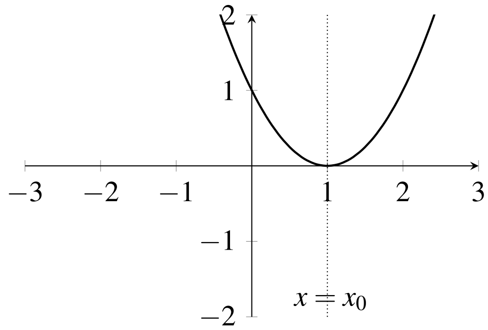
Proposition 3.2 Certaines fonctions du second degré peuvent s'écrire sous une forme *factorisée à une racine double* du type $f(x) = a(x-x_0)^2$, où $a \neq 0$ et x_0 sont deux nombres réels. Dans ce cas :

① $\mathscr{C}$ a pour axe de symétrie :

$$x = -\frac{b}{2a} = x_0$$

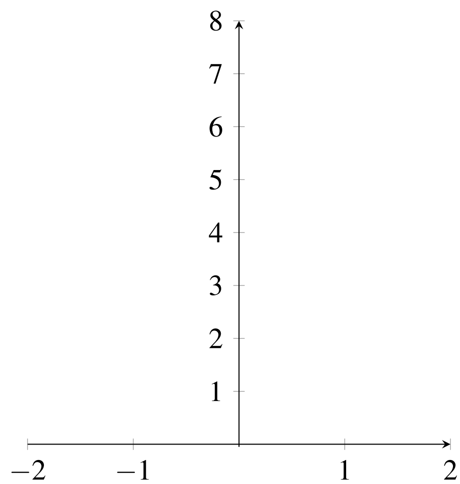
② f a une seule racine x_0.

③ f est toujours du signe de a.



■ **Exemple 3.2** On définit la fonction f par $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$, dont la courbe est notée $\mathscr{C}$.

1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = 2(x+1)^2$. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de f sur $\mathbb{R}$? . . . .
. . . .
3. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$. . . . .
. . . .
4. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.



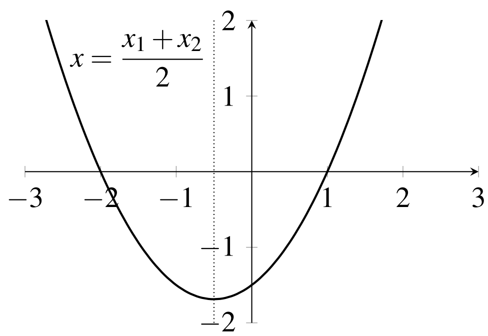
Proposition 3.3 Certaines fonctions du second degré peuvent s'écrire sous une forme *factorisée à deux racines simples* du type $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, où $a \neq 0$, x_1 et x_2 sont trois nombres réels avec $x_1 \neq x_2$. Dans ce cas :

① $\mathscr{C}$ a pour axe de symétrie :

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

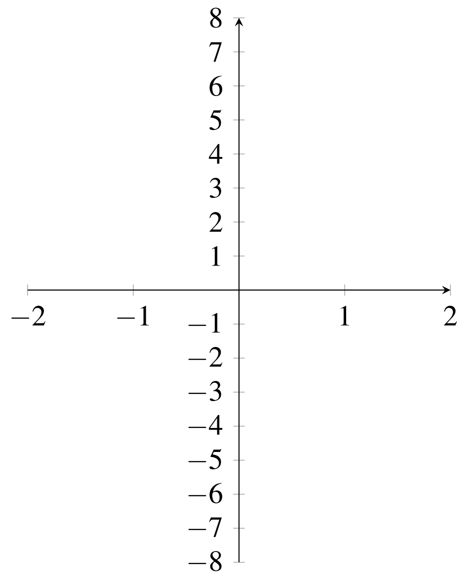
② f a deux racines x_1 et x_2.

③ f est du signe de a, sauf entre x_1 et x_2,

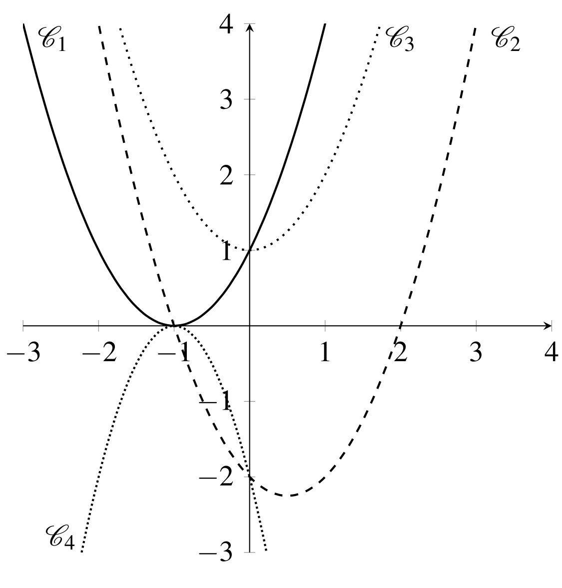


■ **Exemple 3.3** On définit la fonction f par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$, dont la courbe est notée $\mathscr{C}$.

1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = -2(x+1)(x-3)$. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signes de f. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$. ....
   ....
4. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.



■ **Exemple 3.4** Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.



1. $f(x) = -2(x+1)^2$ est associée à $\mathscr{C}_{\dots}$
   ....
2. $g(x) = x^2 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{\dots}$
   ....
3. $h(x) = (x+1)^2$ est associée à $\mathscr{C}_{\dots}$
   ....
4. $i(x) = (x+1)(x-2)$ est associée à $\mathscr{C}_{\dots}$
   ....

3.2 Équations du second degré

Proposition 3.4 On s'intéresse à la résolution de l'équation $x^2 = \alpha$, d'inconnue x.

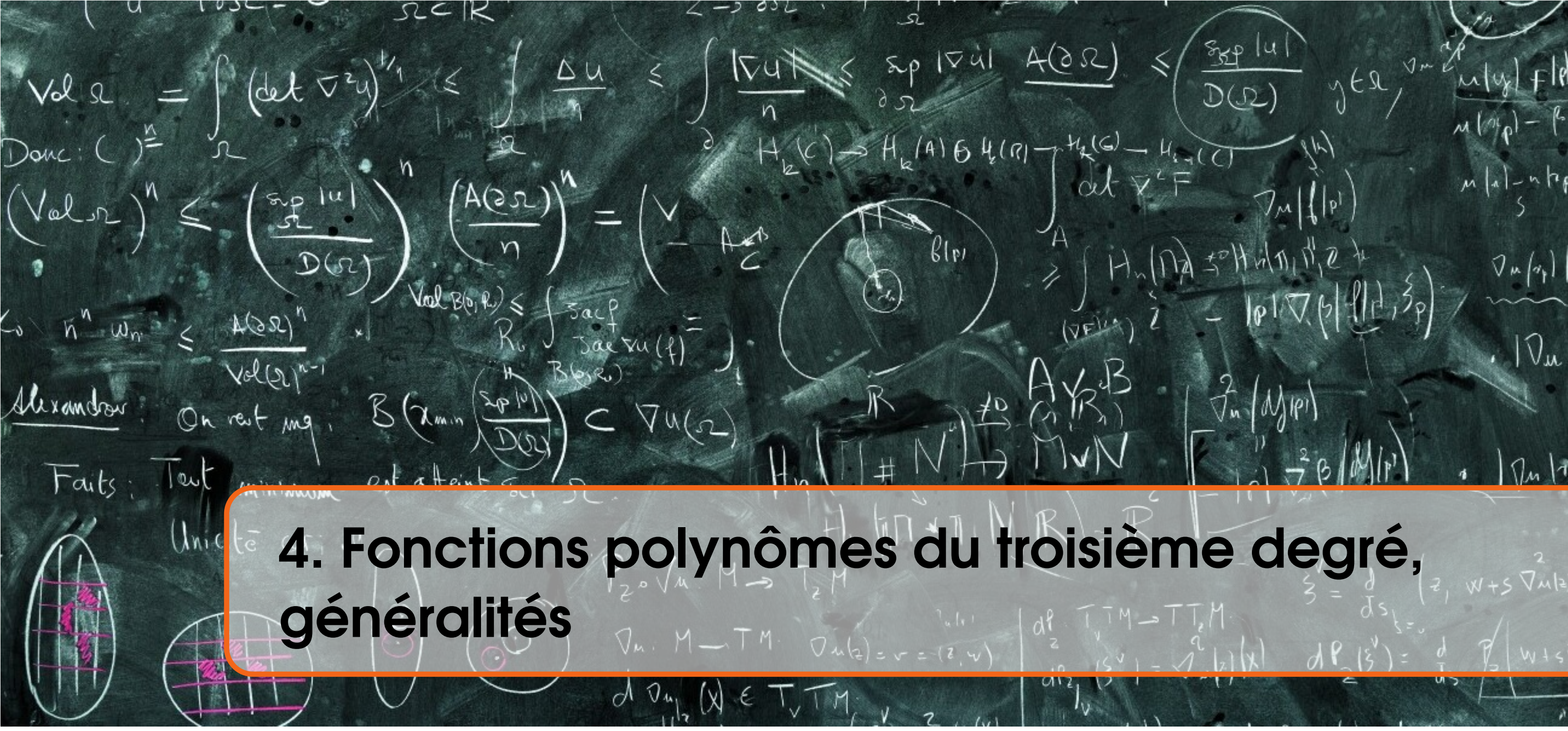
1. Si $\alpha > 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ admet deux racines distinctes : $x_1 = -\sqrt{\alpha}$ et $x_2 = \sqrt{\alpha}$.
2. Si $\alpha = 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ admet une racine unique : $x = 0$.
3. Si $\alpha < 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ n'admet aucune racine réelle.

■ **Exemple 3.5** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $x^2 = 16$: ....
2. $x^2 = 4$: ....
3. $x^2 = 5$: ....
4. $x^2 = -4$: ....

■ **Exemple 3.6** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $3x^2 - 27 = 0$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. $2x^2 + 13 = 45$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. $2(x-5)^2 = 0$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. $2(x-5)^2 + 13 = 45$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....



4. Fonctions polynômes du troisième degré, généralités

4.1 Définition, exemples et contre-exemples

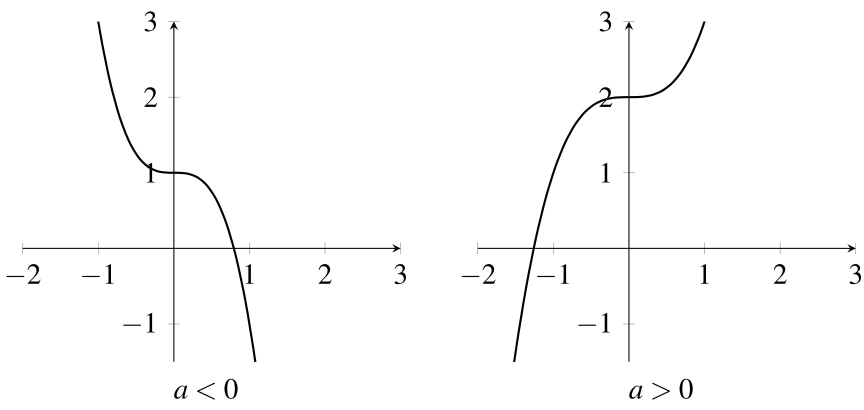
Définition 4.1 Une *fonction polynôme du troisième degré* est une fonction f définie par une expression de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où $a \neq 0$, b, c et d sont quatre nombres réels.

■ **Exemple 4.1** Dans la liste ci-dessous, cocher toutes les fonctions qui sont des fonctions polynômes du troisième degré. Pour les fonctions cochées, indiquer les valeurs des coefficients a, b, c et d. Pour celles qui ne sont pas cochées, expliquer brièvement pourquoi.

1. $f_1(x) = 4x^3 - 1$: ....
2. $f_2(x) = x^3 - x^2 - 4x$: ....
3. $f_3(x) = x^7 + x^3 + 1$: ....
4. $f_4(x) = -5x^3 - 4x + 1$: ....
5. $f_5(x) = -x - 1$: ....

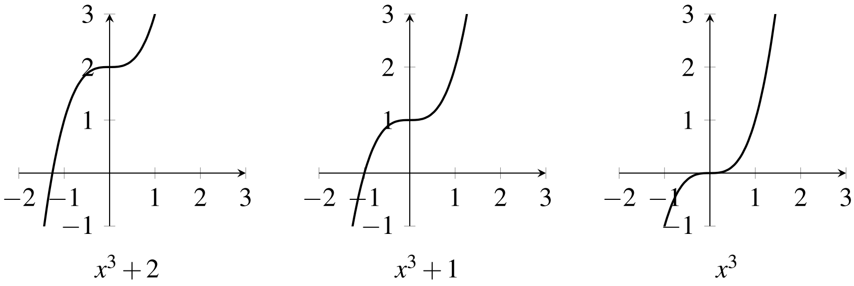
4.2 Représentation graphique

Définition 4.2 La courbe représentant une fonction du type $f(x) = ax^3 + d$, avec $a \neq 0$, s'appelle une *cubique*.

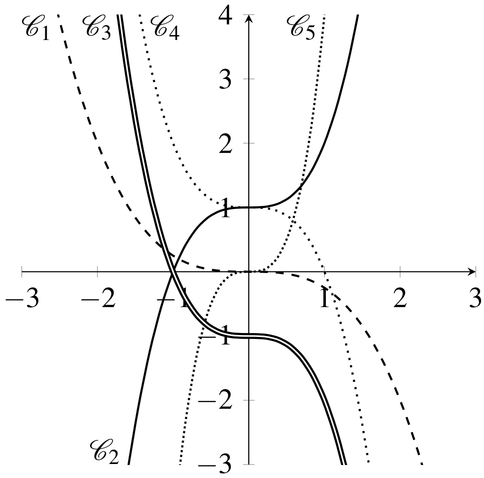


Proposition 4.1 La courbe représentant une fonction du type $f(x) = ax^3 + d$ est décroissante si $a < 0$, et croissante si $a > 0$.

R La valeur de d influe l'intersection de la courbe sur l'axe des ordonnées.



■ **Exemple 4.2** Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.



1. $f(x) = -x^3 - 1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
2. $g(x) = -0,25x^3$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
3. $h(x) = x^3 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
4. $i(x) = 4x^3$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .
5. $j(x) = -x^3 + 1$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   . . . .

4.3 Factorisation de polynômes du troisième degré

Proposition 4.2 Certaines fonctions du troisième degré peuvent s'écrire sous une forme *factorisée à trois racines* du type $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, où $a \neq 0$, x_1, x_2 et x_3 sont quatre nombres réels. Dans ce cas :

① f a trois racines x_1, x_2 et x_3.
② $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses x_1, x_2 et x_3.

■ **Exemple 4.3** On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 26x + 30$.

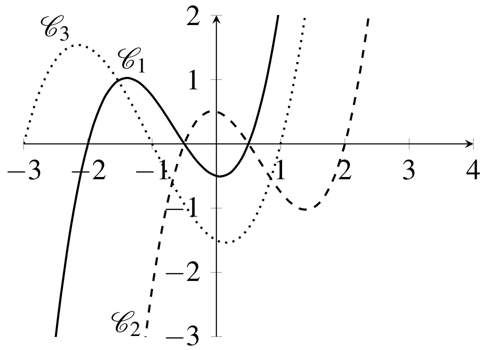
1. Montrer que f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = 2(x-1)(x+3)(x-5)$. . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis établir le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$. . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .

■ **Exemple 4.4** Établir le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2(x-2)(x+2)(x+3)$$

....
....
....
....
....
....
....

■ **Exemple 4.5** Associer, à chaque fonction représentée ci-dessous, son expression algébrique parmi la liste suivante. Justifier, à chaque fois, l'association réalisée.



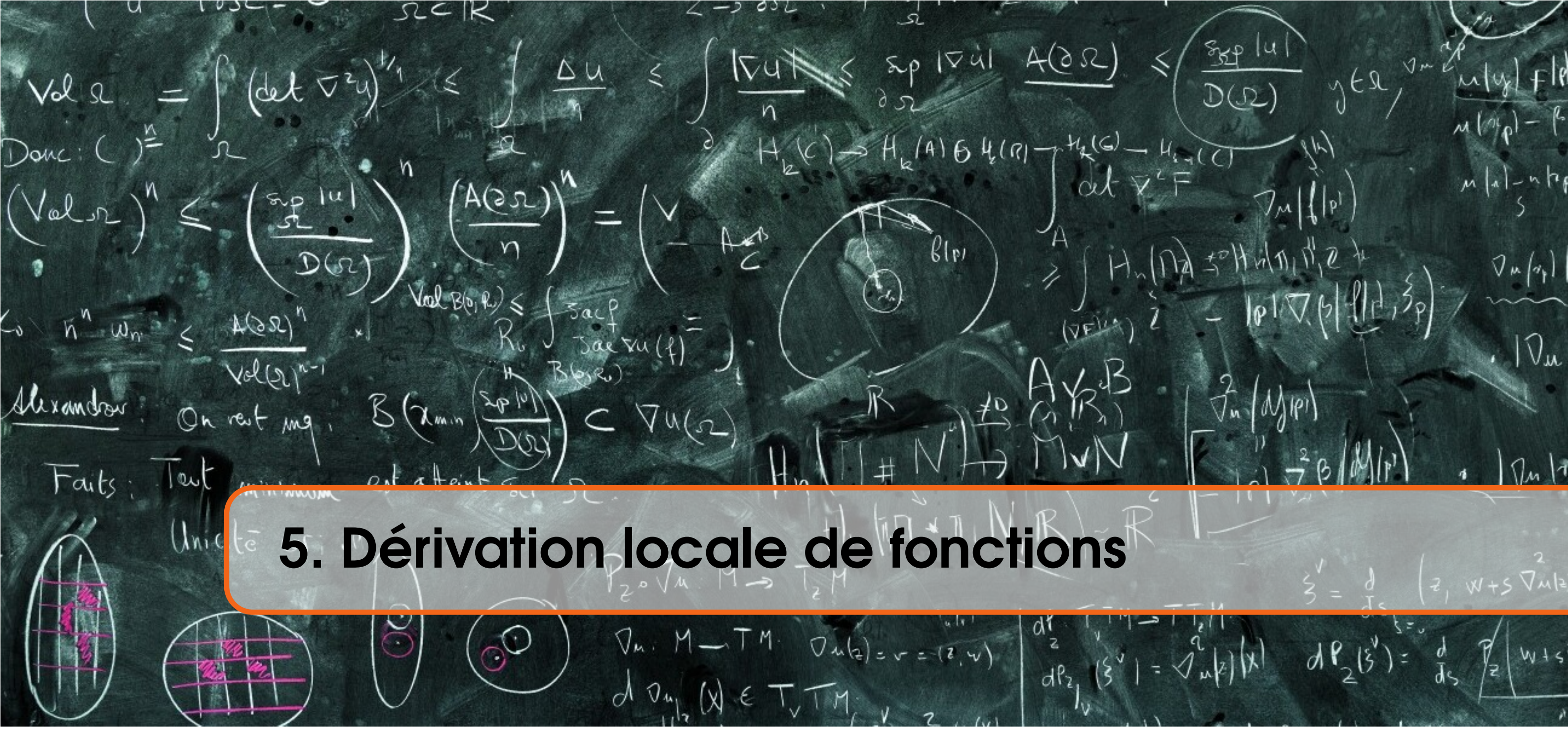
1. $f(x) = (x-2)(x-0,5)(x+0,5)$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   ....
2. $g(x) = (x-0,5)(x+0,5)(x+2)$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   ....
3. $h(x) = 0,5(x-1)(x+1)(x+3)$ est associée à $\mathscr{C}_{...}$
   ....

4.4 Équations du troisième degré

Proposition 4.3 On s'intéresse à la résolution de l'équation $x^3 = \alpha$, d'inconnue x.
Cette équation admet une unique solution qui est $x = \sqrt[3]{\alpha}$. Elle peut également se noter sous la forme d'une puissance, avec la notation $x = \alpha^{\frac{1}{3}}$.

■ **Exemple 4.6** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
1. $x^3 = 1$: ....
2. $x^3 = 8$: ....
3. $x^3 = 27$: ....
4. $x^3 = -27$: ....

■ **Exemple 4.7** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
1. $7x^3 - 56 = 0$.
   ....
   ....
2. $7x^3 + 56 = 0$.
   ....
   ....
3. $7(x-5)^3 = 56$.
   ....
   ....
   ....
4. $(x-3)^3 - 7 = 44$.
   ....
   ....
   ....



5. Dérivation locale de fonctions

5.1 Limite d'une fonction en un nombre réel

■ **Exemple 5.1** On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

   . . . .

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-0,1$	$-0,01$	0	$0,01$	$0,1$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de 0, $f(x)$ prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

   . . . .

   . . . .

■ **Exemple 5.2** On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$.

   . . . .

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$1,9$	$1,99$	2	$2,01$	$2,1$
$f(x)$					

3. Lorsque x prend des valeurs proches de 2, $f(x)$ prend des valeurs proches d'un certain nombre réel. Lequel est-il ? On notera cette valeur $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

   . . . .

   . . . .

5.2 Nombre dérivé

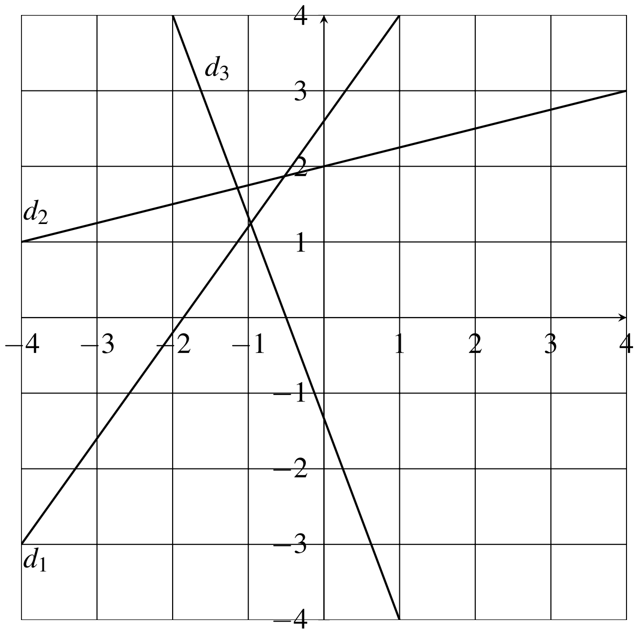
5.2.1 Rappel : calcul du coefficient directeur d'une droite

Proposition 5.1 Le coefficient directeur d'une droite passant par $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

■ **Exemple 5.3** Déterminer les coefficients directeurs, puis les équations des droites tracées ci-dessous.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....



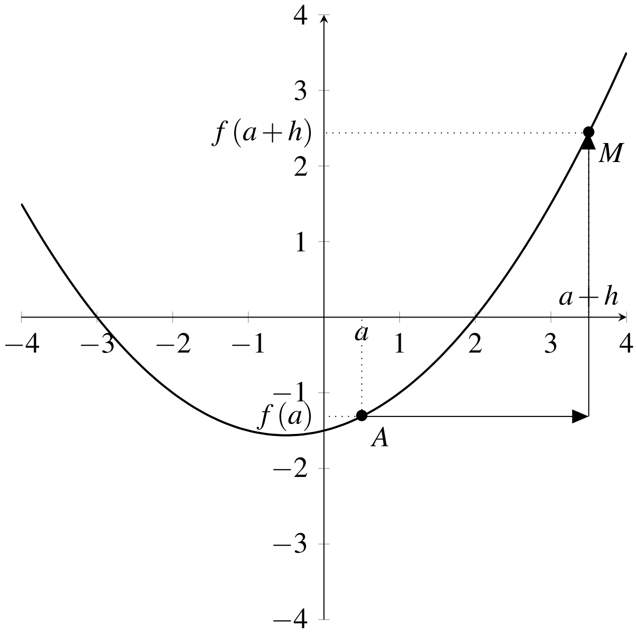
5.2.2 Notion de nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel

On considère une fonction f définie sur un certain intervalle. Sur sa courbe représentative, on note A un point d'abscisse a et M un point d'abscisse $a+h$.
D'après la sous-section précédente, le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On cherche à évaluer la « pente » de la courbe au niveau du point d'abscisse a. Pour cela, on va essayer de « rapprocher » le point M du point A. Pour cela, on cherche à ce que h prenne des valeurs de plus en plus proche de 0. Dans ce cas, le coefficient directeur de la droite (AM) est donné par :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Définition 5.1 Lorsqu'il existe, le *nombre dérivé de f en a* est le nombre ainsi défini :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

■ **Exemple 5.4** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 2$. Calculer le nombre dérivé de f en 1, noté $f'(1)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

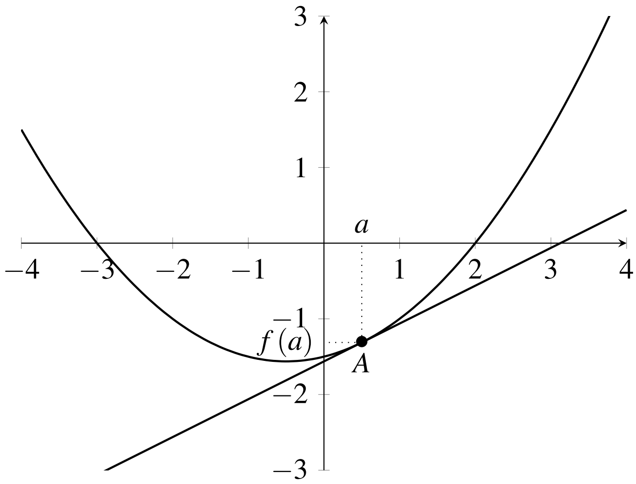
5.3 Tangente à une courbe en un point

On considère une fonction f définie sur un certain intervalle. Sur sa courbe représentative, on note A un point d'abscisse a.

Définition 5.2 La *tangente à la courbe représentant f en a* est la droite passant par A et dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$. Elle « épouse le plus possible la forme de la courbe au niveau de A ».

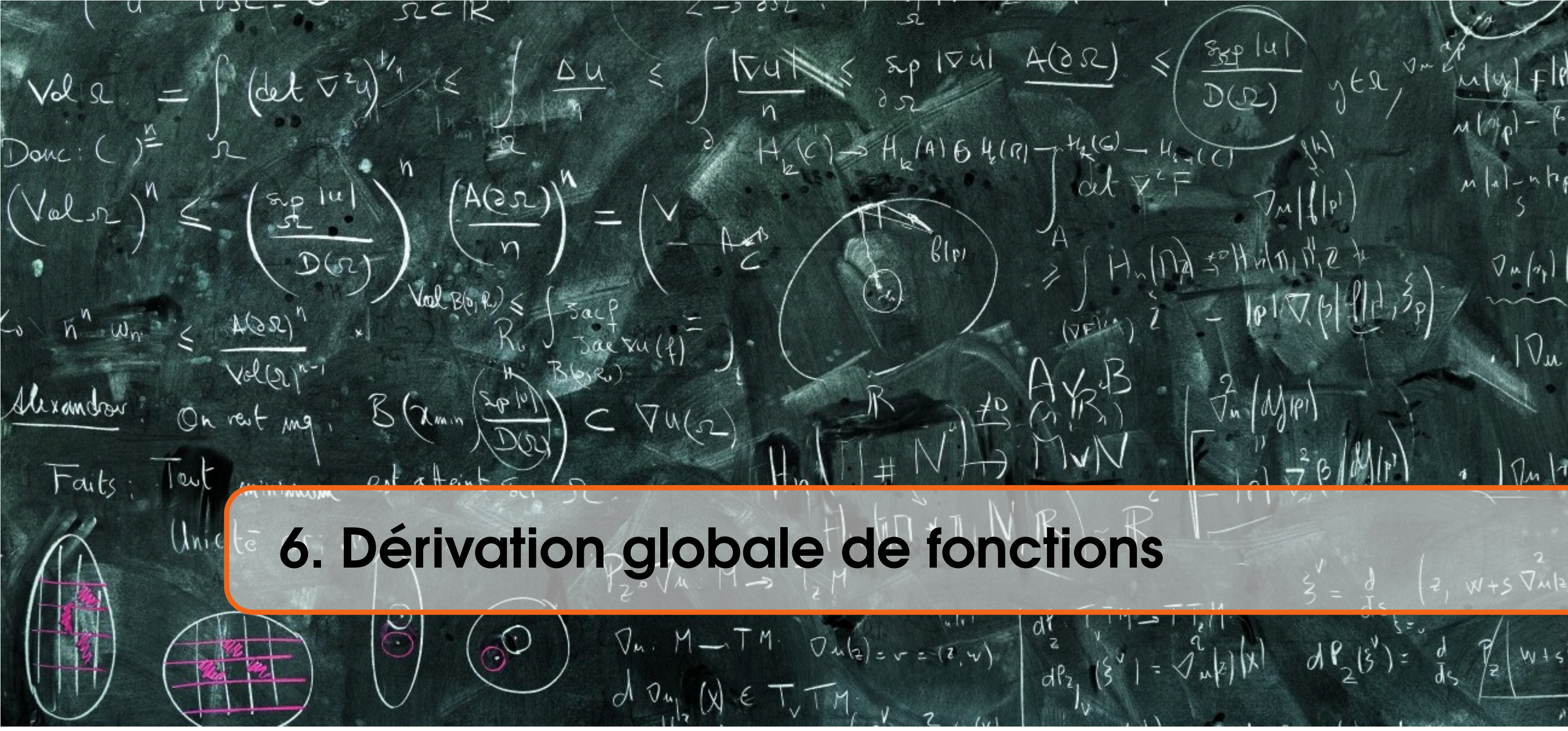
Proposition 5.2 Si f est une fonction, et a un nombre appartenant à l'ensemble de définition de f, l'équation de la tangente à la courbe représentant f en a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



■ **Exemple 5.5** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1.

. . . .
. . . .
. . . .



6. Dérivation globale de fonctions

6.1 Calculs de fonctions dérivées

6.1.1 Définition et premières opérations

Définition 6.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *dérivable* en $a \in I$ si le taux d'accroissement suivant admet une limite finie quand h tend vers 0 :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Cette limite, appelée *nombre dérivé de f en a*, est notée $f'(a)$. Si f est dérivable en tout $a \in I$, alors la fonction qui, à x, associe $f'(x)$, est appelée *fonction dérivée* de f sur I.

Proposition 6.1 Le tableau suivant donne les principales dérivées à connaître.

Fonction	Dérivée
$f(x) = \text{Constante}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = -\omega \sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$

■ **Exemple 6.1** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$: ....
2. $f(x) = 2x$: ....
3. $f(x) = -3x$: ....
4. $f(x) = 4x$: ....
5. $f(x) = x^2$: ....
6. $f(x) = -3x^2$: ....
7. $f(x) = x^3$: ....
8. $f(x) = 5x^3$: ....
9. $f(x) = 6x^2$: ....
10. $f(x) = -5x$: ....
11. $f(x) = 4x^2$: ....
12. $f(x) = 3x^3$: ....

■ **Exemple 6.2** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x+3$: ....
2. $f(x) = -1-4x$: ....
3. $f(x) = x^2+x+1$: ....
4. $f(x) = x^2+x+2$: ....
5. $f(x) = -3x^2-2x$: ....
6. $f(x) = -x^2+4x-6$: ....
7. $f(x) = -x^3+x-1$: ....
8. $f(x) = 2x^3+4x^2-5x+6$: ....
9. $f(x) = x^3+x^2+x+1$: ....
10. $f(x) = -5x^3-5x^2-6$: ....

R Dans l'exemple précédent, on a trouvé deux fonctions qui ont la même dérivée !

6.1.2 Application aux dérivées de fonctions polynômes de degrés 2 et 3

Proposition 6.2 Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors sa fonction dérivée f' est définie par $f'(x) = 2ax + b$.

■ **Exemple 6.3** Déterminer les dérivées des fonctions du second degré suivantes :
1. $f(x) = 4x^2 + 5$: ....
2. $f(x) = -3x^2 - 5x + 7$: ....
3. $f(x) = x^2 + 1$: ....
4. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$: ....
5. $f(x) = 3x^2 + 16x$: ....
6. $f(x) = -5x^2 - 5$: ....
7. $f(x) = -5x^2 - 5x$: ....
8. $f(x) = 50x^2 - 100x + 1\,000$: ....

Proposition 6.3 Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Alors sa fonction dérivée f' est définie par $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

■ **Exemple 6.4** Déterminer les dérivées des fonctions du troisième degré suivantes :
1. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x + 1$: ....
2. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$: ....
3. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x + 7$: ....
4. $f(x) = 3x^3 + 5x - 8$: ....
5. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{7}{3}x - 1$: ....
6. $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{7}x + \frac{6}{7}$: ....
7. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{7}{9}$: ....
8. $f(x) = 1\,000x^3 + 100x^2 + 10x + 1$: ....

6.1.3 Opérations plus avancées

Proposition 6.4 Pour dériver un produit ou un quotient, on retiendra les formules suivantes.

Fonction produit	Dérivée
$u \times v$	$u'v + uv'$

Fonction quotient	Dérivée
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

■ **Exemple 6.5** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x^2 + 1)(3x + 5)$.

....

2. $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x + 1}$.

....

6.2 Applications de la dérivation

6.2.1 Étude des variations d'une fonction

Proposition 6.5 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
2. Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

■ **Exemple 6.6** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f : ....
2. Étudier le signe de f', puis en déduire les variations de f.

....
....
....
....
....
....
....

■ **Exemple 6.7** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f : ....
2. Étudier le signe de f', puis en déduire les variations de f.

....
....
....
....
....
....
....

■ **Exemple 6.8** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f : ....
2. Étudier le signe de f', puis en déduire les variations de f.

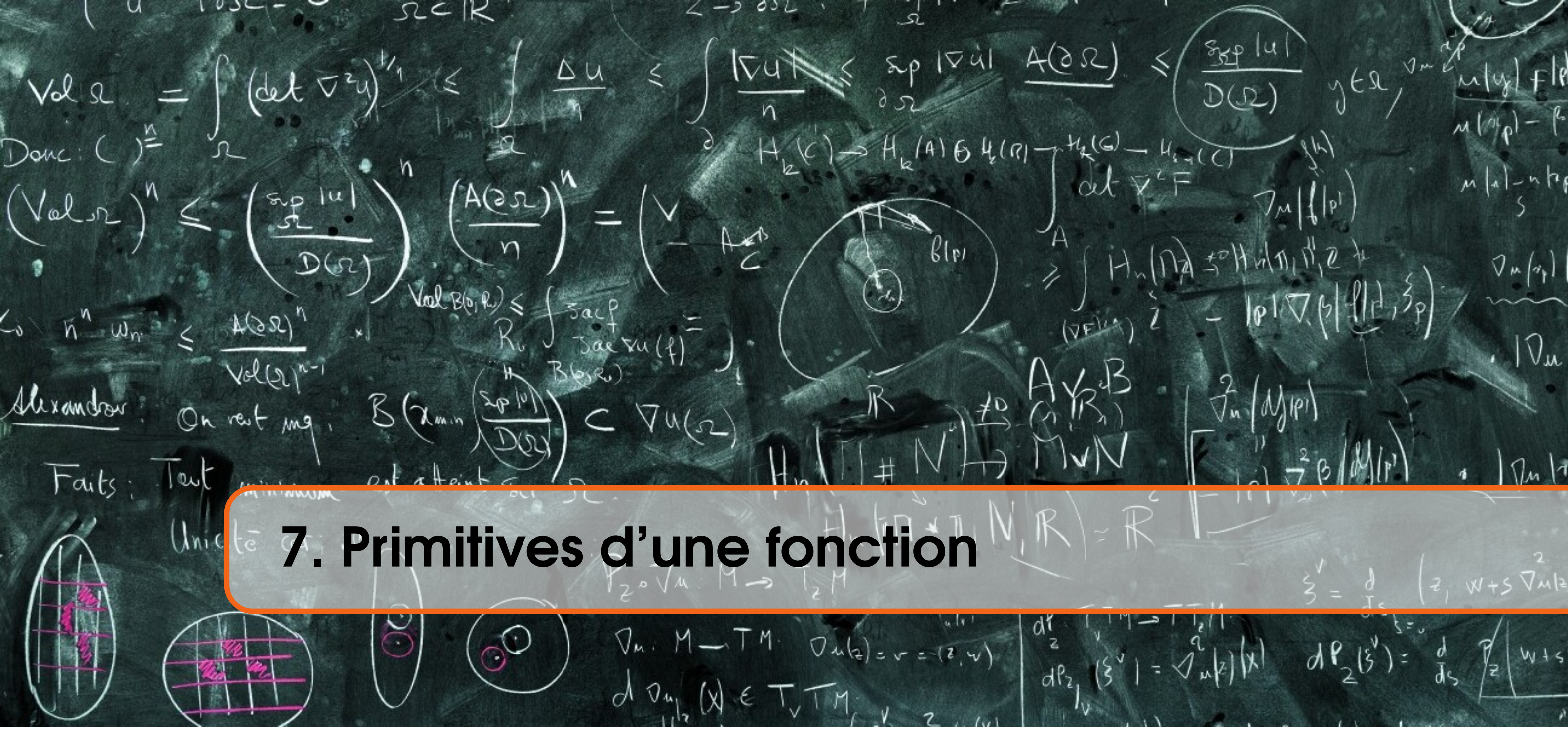
....
....
....
....
....
....
....

6.2.2 Étude des extrema d'une fonction

Proposition 6.6 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors x_0 est un extremum de f sur I.

■ **Exemple 6.9** Déterminer si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$ admet un extremum.

....
....
....
....
....
....



7. Primitives d'une fonction

7.1 Qu'est-ce qu'une primitive ?

Définition 7.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une *primitive de f sur I* est une fonction F définie et dérivable sur I, telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

■ **Exemple 7.1** Vérifier si ces fonctions sont des primitives de la fonction définie par $f(x) = 4x - 5$.

1. Si $F(x) = 4$: ....
2. Si $F(x) = x^2 - 5x + 1$: ....
3. Si $F(x) = 2x^2 - 5x - 3$: ....

Trouver une autre fonction qui est une primitive de f : ....

Proposition 7.1 Si f admet des primitives sur I, elles sont toutes « définies à une constante près », c'est-à-dire qu'elles sont de la forme $F +$ Constante. Si l'on impose en plus une condition du type $F(x_0) = y_0$, cette primitive devient unique.

7.2 Primitives des fonctions de référence

Proposition 7.2 Le tableau suivant donne les principales primitives à connaître.

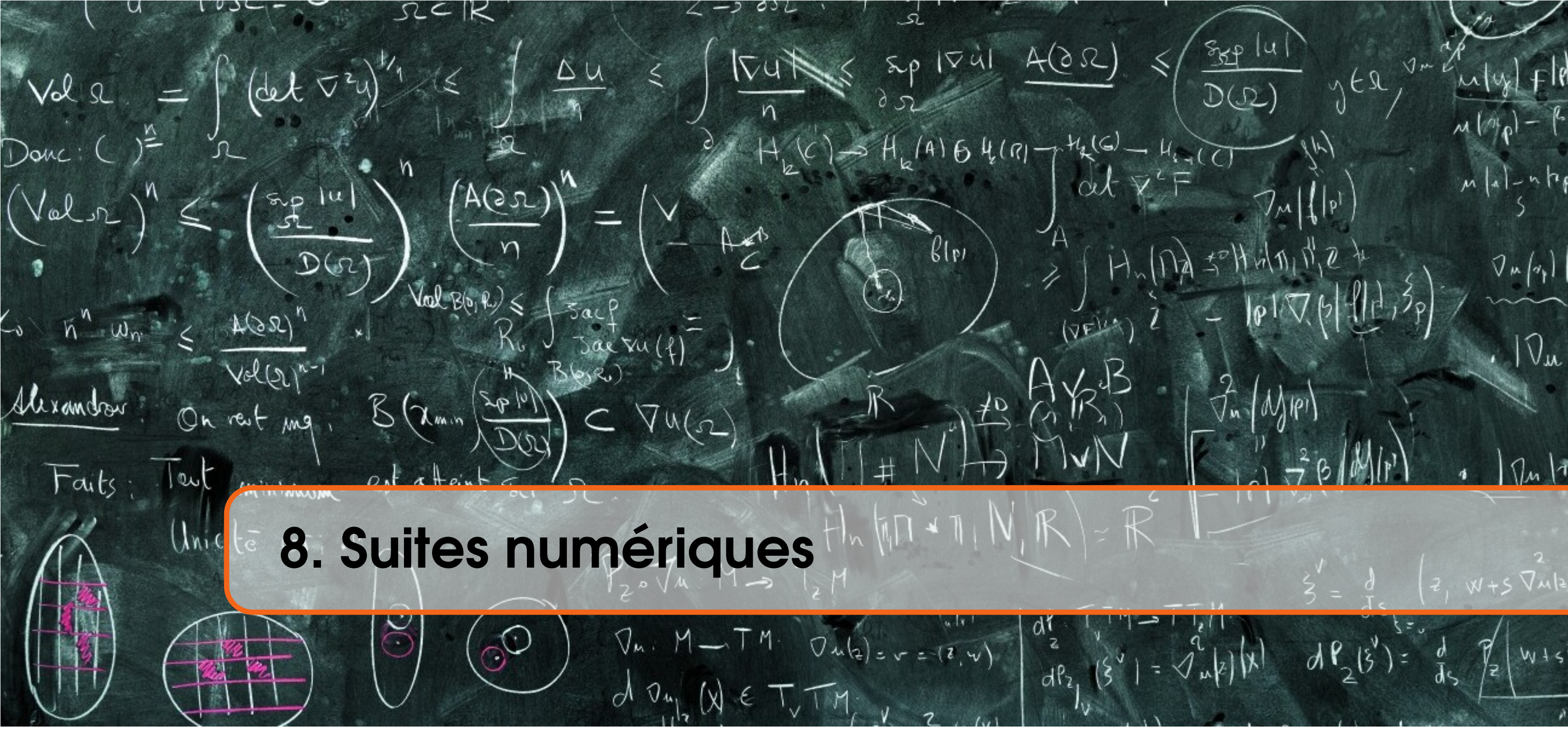
Fonction	Primitive
$f(x) = 0$	$F(x) = \text{Constante}$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + b$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$F(x) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$F(x) = -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi)$

■ **Exemple 7.2** Trouver la primitive F de la fonction f dans chaque cas.

1. Si $f(x) = 2x$, sans imposer de condition particulière.
2. Si $f(x) = 2x^3 - 3\cos(4x)$, en imposant que $F(\pi) = 0$.

....
....
....
....
....

II Analyse réelle (suites)



8. Suites numériques

8.1 Définition, modes de génération

8.1.1 Les suites, un type de fonction particulier

Définition 8.1 Une *suite numérique* est une liste ordonnée de nombres, appelés *termes*.

■ **Exemple 8.1** Pour chaque suite, trouver « logiquement » les termes suivants.

$u_0 = 1$	$u_1 = 3$	$u_2 = 5$	$u_3 = 7$	$u_4 = \ldots\ldots$
$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 8$	$u_4 = \ldots\ldots$
$u_0 = 500$	$u_1 = 50$	$u_2 = 5$	$u_3 = 0,5$	$u_4 = \ldots\ldots$
$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 7$	$u_4 = \ldots\ldots$

R Dans le premier exemple, on dit que 1 est le terme de rang 0, 3 est le terme de rang 1, 5 est le terme de rang 2, etc. Le *rang* indique le « positionnement » du terme dans la suite.

8.1.2 Suites définies de manière explicite

Définition 8.2 Une suite u est définie *explicitement* lorsque l'on a une formule de calcul, appelée *terme général de u*, qui permet de calculer n'importe quel terme, en fonction de n.

R Avec une suite définie explicitement, on peut calculer n'importe quel terme, facilement et directement. Le risque d'erreur dans les calculs est très limité !

■ **Exemple 8.2** On définit la suite u par $u_n = n^2 + 1$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 2. $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 3. $u_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8.1.3 Suites définies par récurrence

Définition 8.3 Une suite u est définie *par récurrence* lorsque l'on dispose d'un terme (par exemple u_0) et d'une *relation de récurrence* permettant de calculer un terme à partir de son prédécesseur.

R Avec une suite définie par récurrence, attention à ne pas faire d'erreurs dans les calculs : si l'on se trompe sur le calcul d'un terme, alors tous les termes suivants risquent d'être erronés !

■ **Exemple 8.3** On définit la suite u par $u_0 = 8$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer la valeur des termes suivants.

1. $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8.2 Sens de variation

Définition 8.4 Soit u une suite numérique. On dira que u est *monotone* si elle est :
1. soit *croissante* c'est-à-dire si, pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. soit *décroissante* c'est-à-dire si, pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

R Pour étudier le sens de variation d'une suite, on calculera généralement le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si elle est positive (resp. négative), alors u est croissante (resp. décroissante).

■ **Exemple 8.4** On définit une suite u pour tout entier n par $u_n = 2 - 2n$.
1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

   $u_0 = \dots\dots\dots\dots$ $u_1 = \dots\dots\dots\dots$ $u_2 = \dots\dots\dots\dots$

2. Quel semble être le sens de variation de u ? ....
3. Étudier la monotonie de u.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

■ **Exemple 8.5** On définit une suite u par $u_0 = 2$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = u_n + 3$.
1. Calculer u_1 et u_2.

   $u_1 = \dots\dots\dots\dots$ $u_2 = \dots\dots\dots\dots$

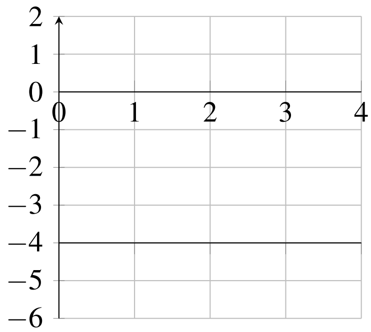
2. Quel semble être le sens de variation de u ? ....
3. Étudier la monotonie de u.

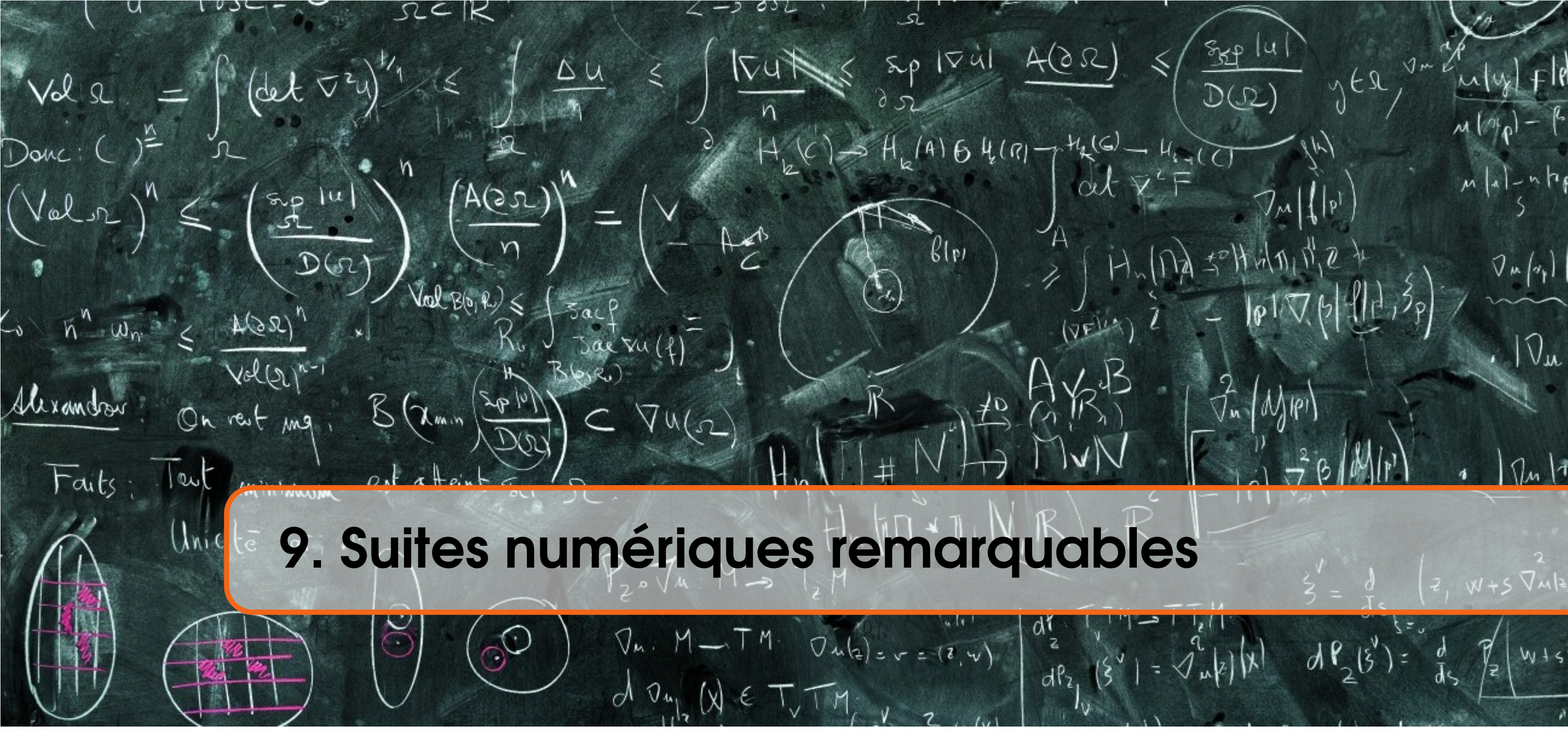
   ....
   ....

8.3 Représentation graphique

R La graphique d'une suite u, appelé *nuage de points de u* est l'ensemble des points $(n\,;u_n)$.
Autrement dit, pour tracer le nuage de points d'une suite, il faut :
- — Dresser un tableau de valeurs de la suite que l'on souhaite représenter.
- — Tracer un repère orthogonal d'origine O.
- — Placer les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ **sans** les relier entre eux.

■ **Exemple 8.6** Tracer le nuage de points de la suite définie par $u_n = 2 - 2n$.





9. Suites numériques remarquables

9.1 Suites arithmétiques

9.1.1 Relation de récurrence, formule explicite

Définition 9.1 On dit qu'une suite est *arithmétique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r.
2. Il existe un nombre réel, noté r, tel que $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est alors appelé *raison de la suite*.

$$\begin{tikzcd} \boxed{u_0} \arrow[r, "+r"] \arrow[rrrr, bend right, "+n\times r"'] & \boxed{u_1} \arrow[r, "+r"] & \boxed{u_2} \arrow[r, "+r"] & \boxed{\cdots} \arrow[r, "+r"] & \boxed{u_n} \arrow[r, "+r"] & \boxed{u_{n+1}} \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 9.1** On considère la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 = \dots\dots\dots\dots$, $u_2 = \dots\dots\dots\dots$, $u_3 = \dots\dots\dots\dots$ et $u_4 = \dots\dots\dots\dots$

■ **Exemple 9.2** On considère la suite arithmétique de raison $r = -5$ telle que $u_0 = 100$.
Calculer $u_1 = \dots\dots\dots\dots$, $u_2 = \dots\dots\dots\dots$, $u_3 = \dots\dots\dots\dots$ et $u_4 = \dots\dots\dots\dots$

Proposition 9.1 Si u est une suite arithmétique de raison r, il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n :

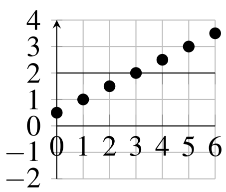
$$u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n-p)r$$

■ **Exemple 9.3** On considère la suite arithmétique de raison $r = 0,9$ telle que $u_0 = 2,4$.
La formule explicite est $u_n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ On en déduit que $u_{30} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

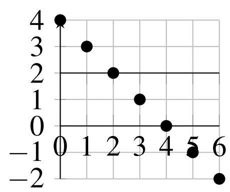
9.1.2 Représentation graphique, sens de variation

Proposition 9.2 Dans un repère, les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

Si $r > 0$, u est strictement croissante.



Si $r < 0$, u est strictement décroissante.



9.2 Suites géométriques

9.2.1 Relation de récurrence, formule explicite

Définition 9.2 On dit qu'une suite est *géométrique* sous l'une de ces conditions équivalentes.

1. Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre $q \neq 0$.
2. Il existe un nombre réel non nul, noté q, tel que $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le nombre q est alors appelé *raison de la suite*.

$$\begin{tikzcd} \boxed{u_0} \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^n"'] & \boxed{u_1} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{u_2} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{\cdots} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{u_n} \arrow[r, "\times q"] & \boxed{u_{n+1}} \end{tikzcd}$$

À chaque fois que l'on est confronté à une situation où une grandeur évolue à plusieurs reprises de $\pm T\%$, on peut modéliser la situation à l'aide d'une suite géométrique de raison :

$$q = 1 \pm \frac{T}{100}$$

■ **Exemple 9.4** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple 9.5** On considère la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $u_0 = 1\,000$.
Calculer $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition 9.3 Si u est une suite géométrique de raison q, il existe une *formule explicite* permettant de calculer n'importe quel terme u_n :

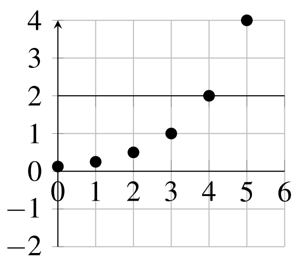
$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

■ **Exemple 9.6** On considère la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_0 = 0,25$.
La formule explicite est $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ On en déduit que $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

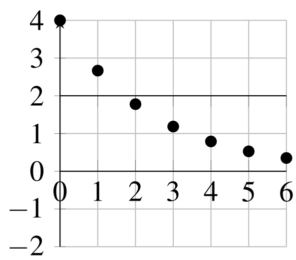
9.2.2 Représentation graphique, sens de variation

Proposition 9.4 Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.

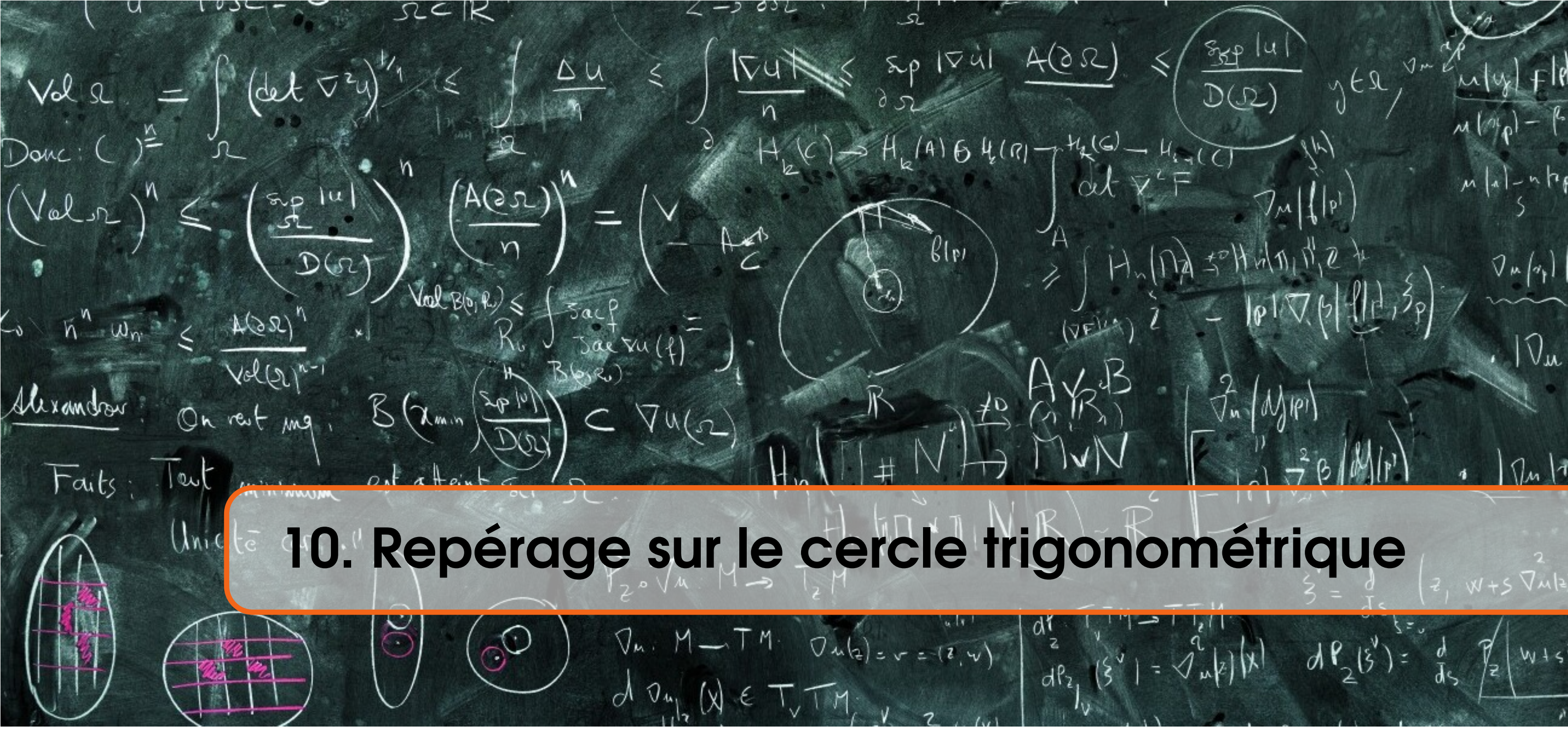
Si $q > 1$, u est strictement croissante.



Si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante.



III Géométrie dans le plan

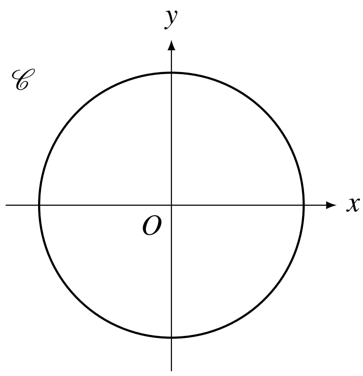


10. Repérage sur le cercle trigonométrique

10.1 Cercle trigonométrique, radians

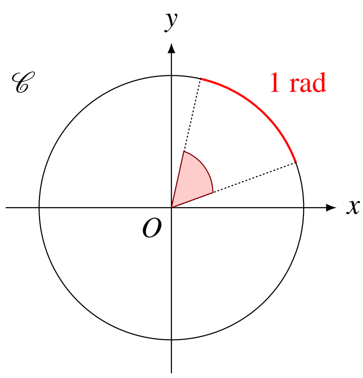
Définition 10.1 Dans un repère orthonormé d'origine O, le *cercle trigonométrique* est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
On peut le parcourir dans deux sens :

1. Le sens *horaire*, *indirect* ou *négatif*, lorsqu'on le parcourt dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Le sens *trigonométrique*, *direct* ou *positif*, lorsqu'on le parcourt dans le sens contraire.



Définition 10.2 Le *radian* est l'unité de mesure des angles plans dans le système international, correspondant à la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ suivant un arc de longueur 1.
On retiendra la règle de conversion par proportionnalité suivante :

« 2π rad $= 360°$ »



■ **Exemple 10.1** Les mesures d'angles en degré et radians sont proportionnelles. Compléter :

Mesure (°)	0	30	45	60	90	180	360
Mesure (rad)							

■ **Exemple 10.2** Effectuer les conversions suivantes.

1. Convertir, en radians, la mesure de l'angle 20°.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

2. Convertir, en radians, la mesure de l'angle 150°.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

3. Convertir, en degrés, la mesure de l'angle $\dfrac{\pi}{5}$ rad.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

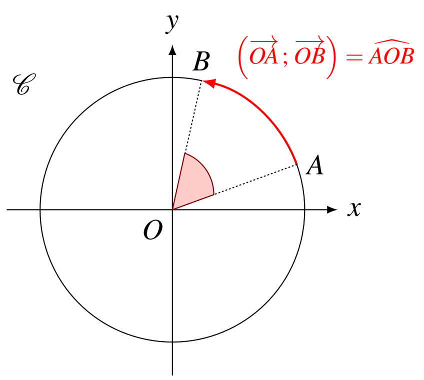
4. Convertir, en degrés, la mesure de l'angle $\dfrac{5\pi}{3}$ rad.

Mesure (°)		360
Mesure (rad)		2π

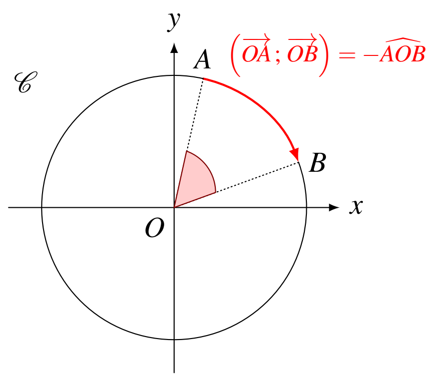
10.2 Mesures d'un angle orienté, mesure principale

Définition 10.3 Un *angle orienté* est un angle qui a un sens.

Si l'angle est orienté dans le sens direct, alors sa mesure est positive.



Si l'angle est orienté dans le sens indirect, alors sa mesure est négative.



R Un angle orienté a donc une infinité de mesures, toutes définies à 2π près.

Définition 10.4 La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure d'un angle orienté qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

■ **Exemple 10.3** Déterminer les mesures principales des angles de mesure $\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{-23\pi}{4}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

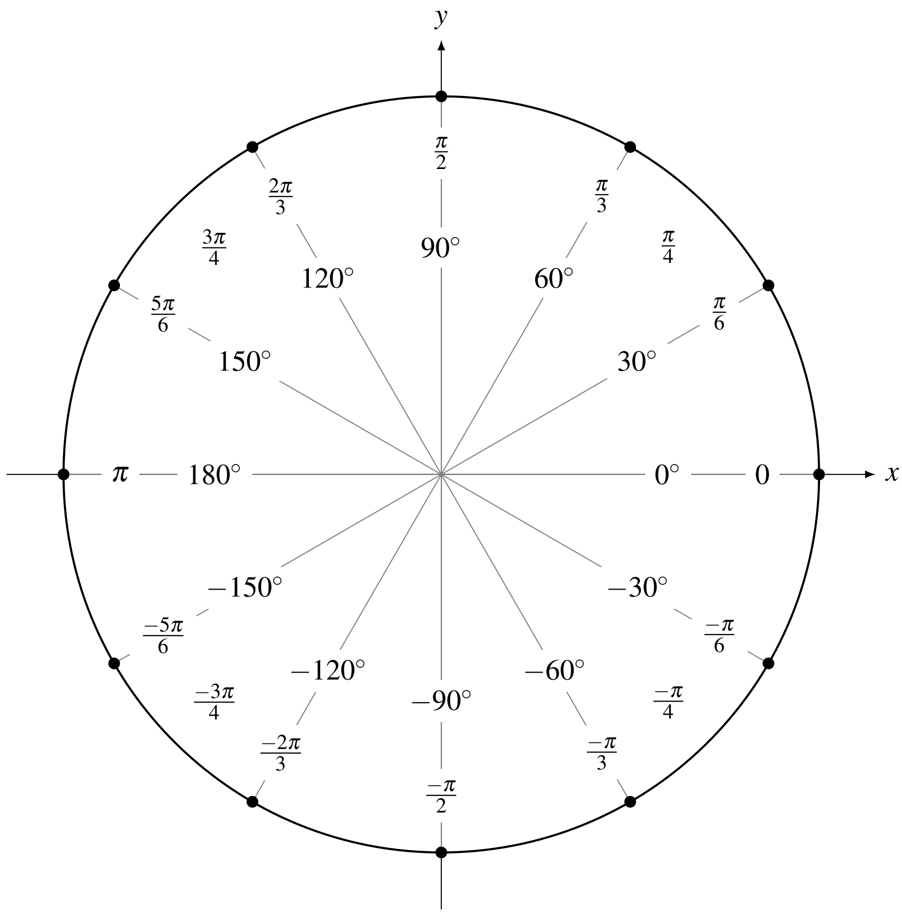
. . . .

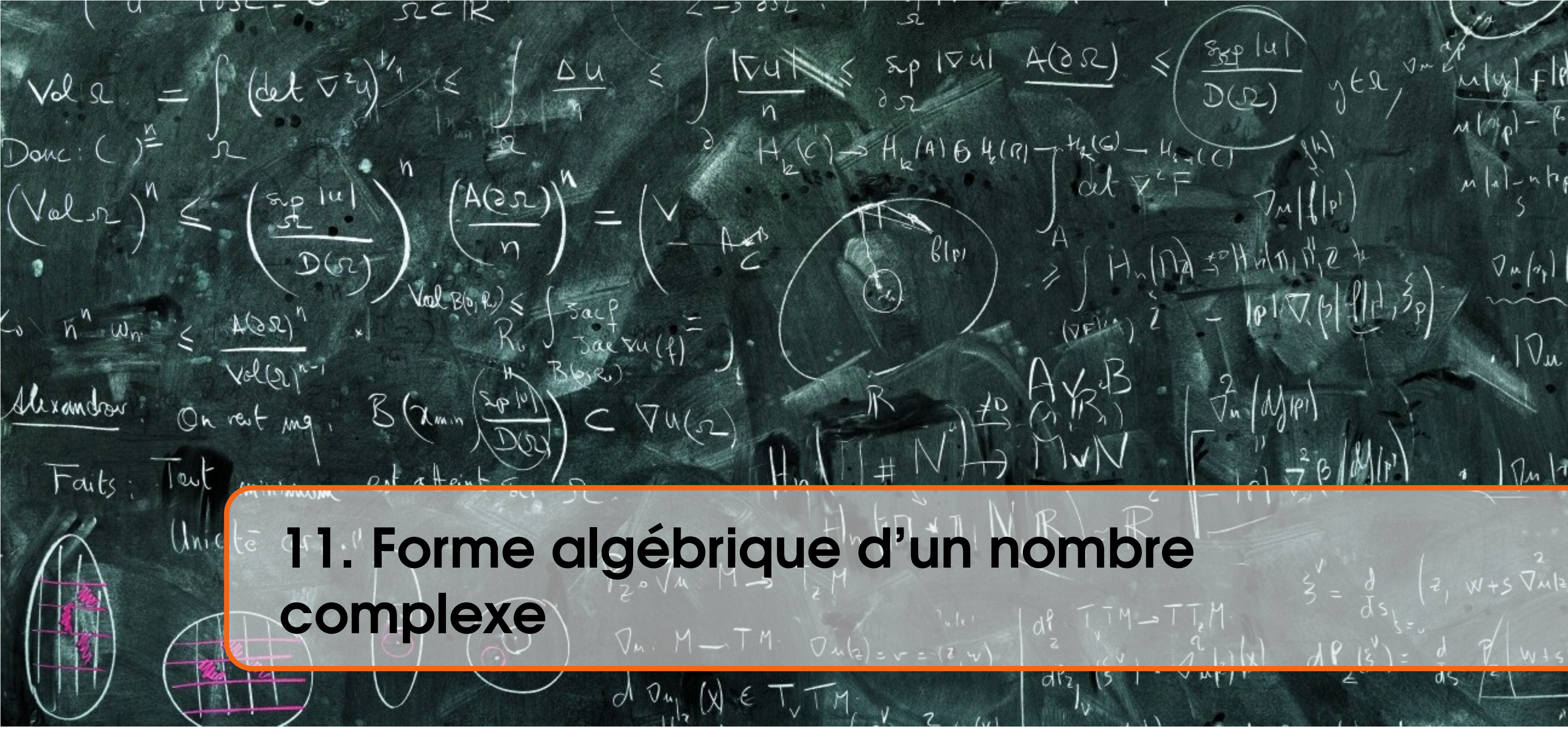
. . . .

. . . .

. . . .

10.3 Addendum : le cercle trigonométrique complet





11. Forme algébrique d’un nombre complexe

11.1 Écriture d’un nombre complexe

Définition 11.1 Un *nombre complexe* est un nombre qui s’écrit de manière unique sous une *forme algébrique* $z = a + ib$, où :

1. i est un nombre, appelée *unité imaginaire*, tel que $i^2 = -1$.
2. a est un nombre réel appelé *forme algébrique de z*. Si $a = 0$, z est appelé *imaginaire pur*.
3. b est un nombre réel appelé *partie imaginaire de z*. Si $b = 0$, z est un nombre réel.

On notera $\mathbb{C}$ l’ensemble des nombres complexes.

■ **Exemple 11.1** Pour chacun des nombres complexes suivants, identifier leur partie réelle, leur partie imaginaire et indiquer s’ils ont une particularité (s’ils sont réels ou imaginaires purs).

Nombre complexe	Partie réelle	Partie imaginaire	Particularité ?
$z_1 = 2 + 3i$			
$z_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$			
$z_3 = 5i - 1$			
$z_4 = 5i$			
$z_5 = -1$			
$z_6 = -2 - 2i$			

11.2 Opérations entre nombres complexes

Proposition 11.1 Sur l’ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les propriétés de calculs entre deux nombres (addition, soustraction, multiplication, division, puissances, distributivité...) sont les mêmes que celles dans l’ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

■ **Exemple 11.2** Additionner les nombres complexes $2 + 3i$ et $1 - i$.

. . . .

■ **Exemple 11.3** Soustraire les nombres complexes $2 + 3i$ et $1 - i$.

. . . .

■ **Exemple 11.4** Multiplier les nombres complexes $2 + 3i$ et $1 - i$.

. . . .

. . . .

. . . .

■ **Exemple 11.5** Diviser les nombres complexes $2+3i$ et $1-i$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

11.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 11.2 Si $z=a+ib$ est un nombre complexe, son *conjugué* est le nombre complexe défini par $\overline{z}=a-ib$.

Proposition 11.2 Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, et n un nombre entier, on a :

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2} \qquad \overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ si } z_2\neq 0 \qquad \overline{z_1^n}=\overline{z_1}^n$$

■ **Exemple 11.6** Déterminer le conjugué de $z=(2-3i)(1+i)$.

. . . .

. . . .

■ **Exemple 11.7** Déterminer le conjugué de $z=\dfrac{2-3i}{1+i}$.

. . . .

. . . .

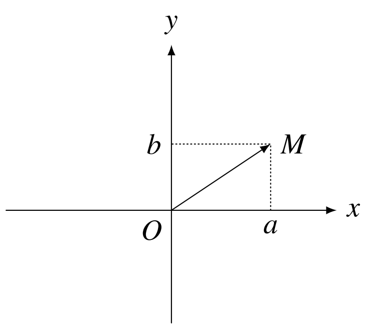
. . . .

11.4 Représentation graphique

Définition 11.3 Le *plan complexe* est le plan où l'axe des abscisses est l'*axe réel* et l'axe des ordonnées est l'*axe imaginaire*. À un nombre complexe $z=a+ib$, on associe :

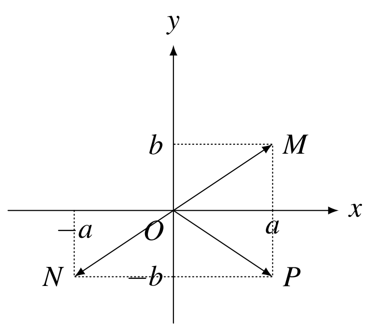
1. Un *point image* $M\,(a\,;b)$.
2. Un *vecteur image* $\overrightarrow{OM}\,(a\,;b)$.

On dira que z est l'*affixe* de M et de $\overrightarrow{OM}$.

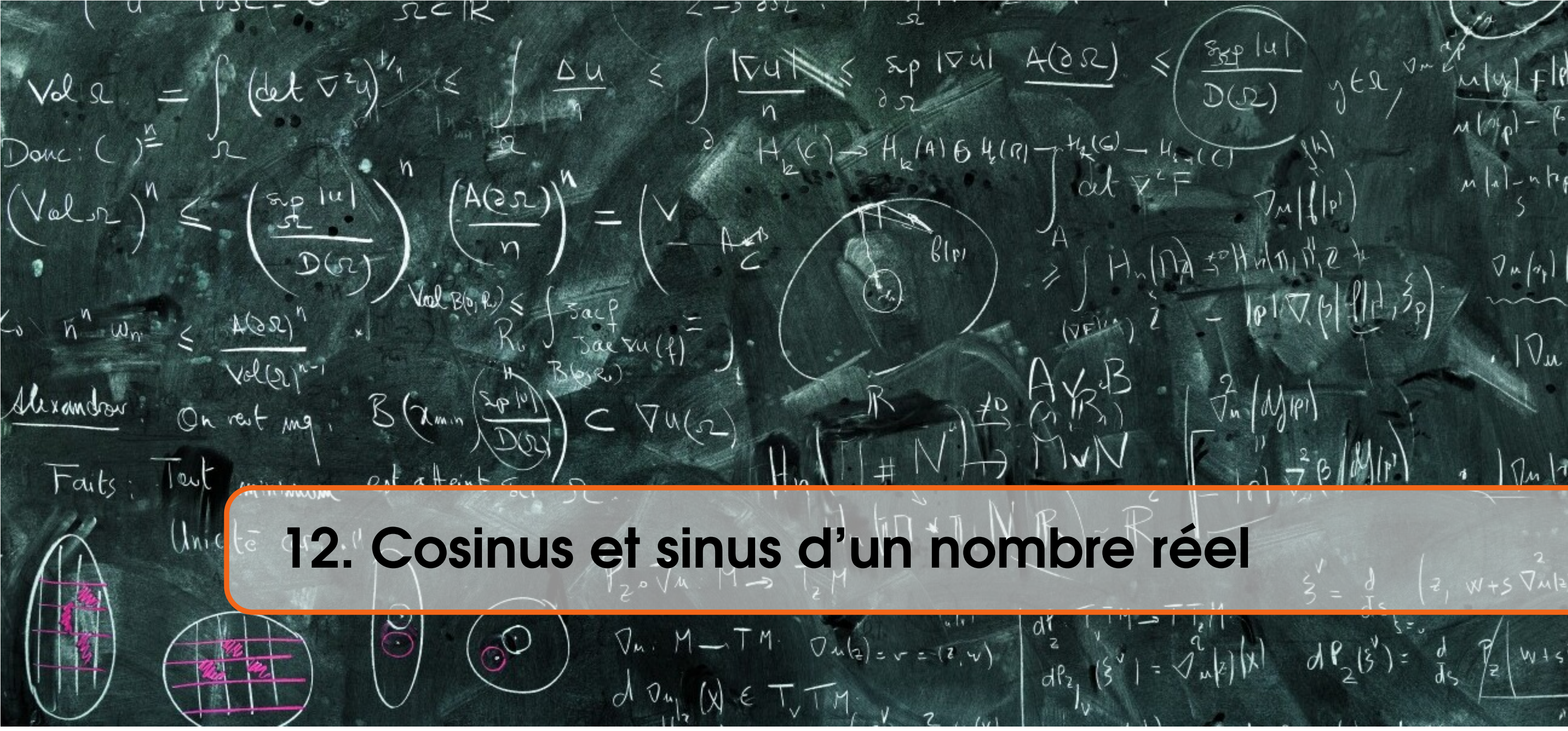


Proposition 11.3 On suppose que M est un point du plan complexe, d'affixe $z=a+ib$.

1. Si N est le symétrique de M par rapport à O, $z_N=-z=-a-ib$.
2. Si P est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, $z_P=\overline{z}=a-ib$.



Proposition 11.4 Si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$.



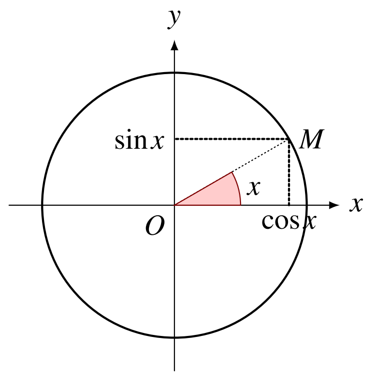
12. Cosinus et sinus d'un nombre réel

12.1 Cosinus et sinus d'un angle

Définition 12.1 Soit M un point du cercle trigonométrique, dont on note x une mesure de l'angle formé par rapport à l'horizontale. Autrement dit, x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})$.

— L'abscisse de M est appelée *cosinus de* x, et est notée $\cos x$.
— L'ordonnée de M est appelée *sinus de* x, et est notée $\sin x$.

On a donc $M\,(\cos x\,;\,\sin x)$.



Proposition 12.1 Le cosinus et le sinus répondent à trois propriétés remarquables.
— **Bornitude.** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
— **Périodicité.** Pour tout réel x, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.
— **Identité trigonométrique.** Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Proposition 12.2 Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs remarquables du cosinus et du sinus, suivant les valeurs des meures d'angles x.

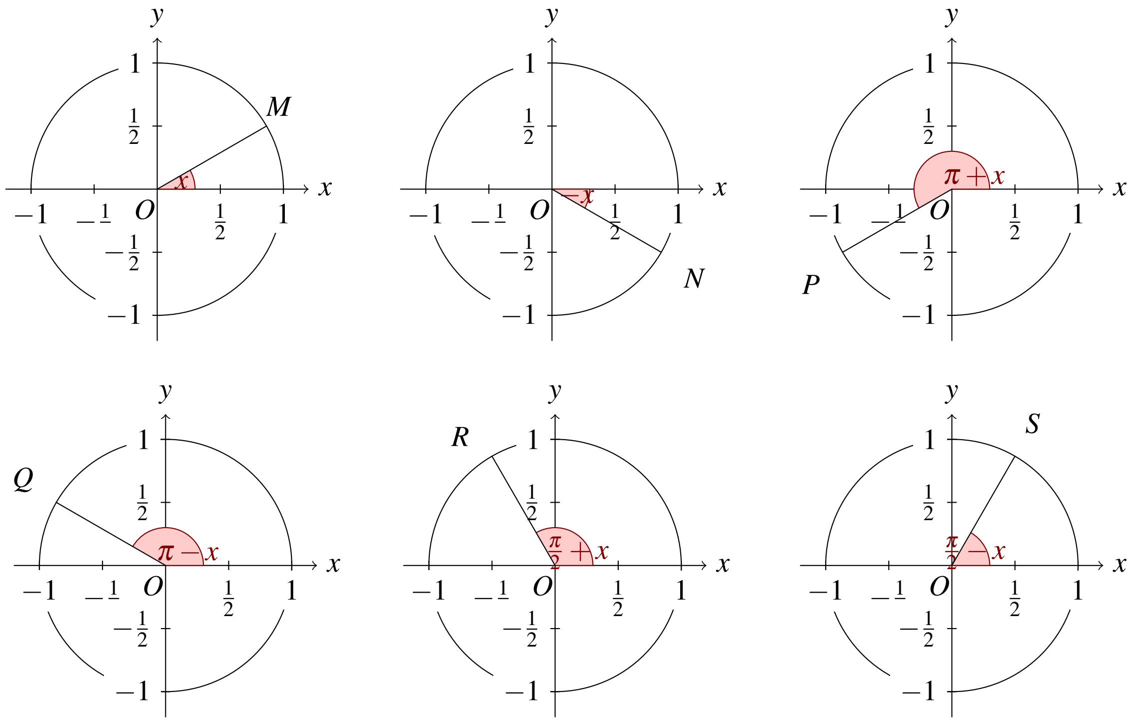
Mesure x, en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ **Exemple 12.1** On s'intéresse à la mesure d'angle $x = -\dfrac{17\pi}{3}$.

1. Déterminer la mesure principale de x.
. . . .
. . . .
. . . .
2. En déduire la valeur de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos x =$ . . . . et $\sin x =$ . . . .

12.2 Cosinus et sinus d'angles associés

Proposition 12.3 Pour tout réel x, on peut déterminer les cosinus et sinus d'angles associés à x.



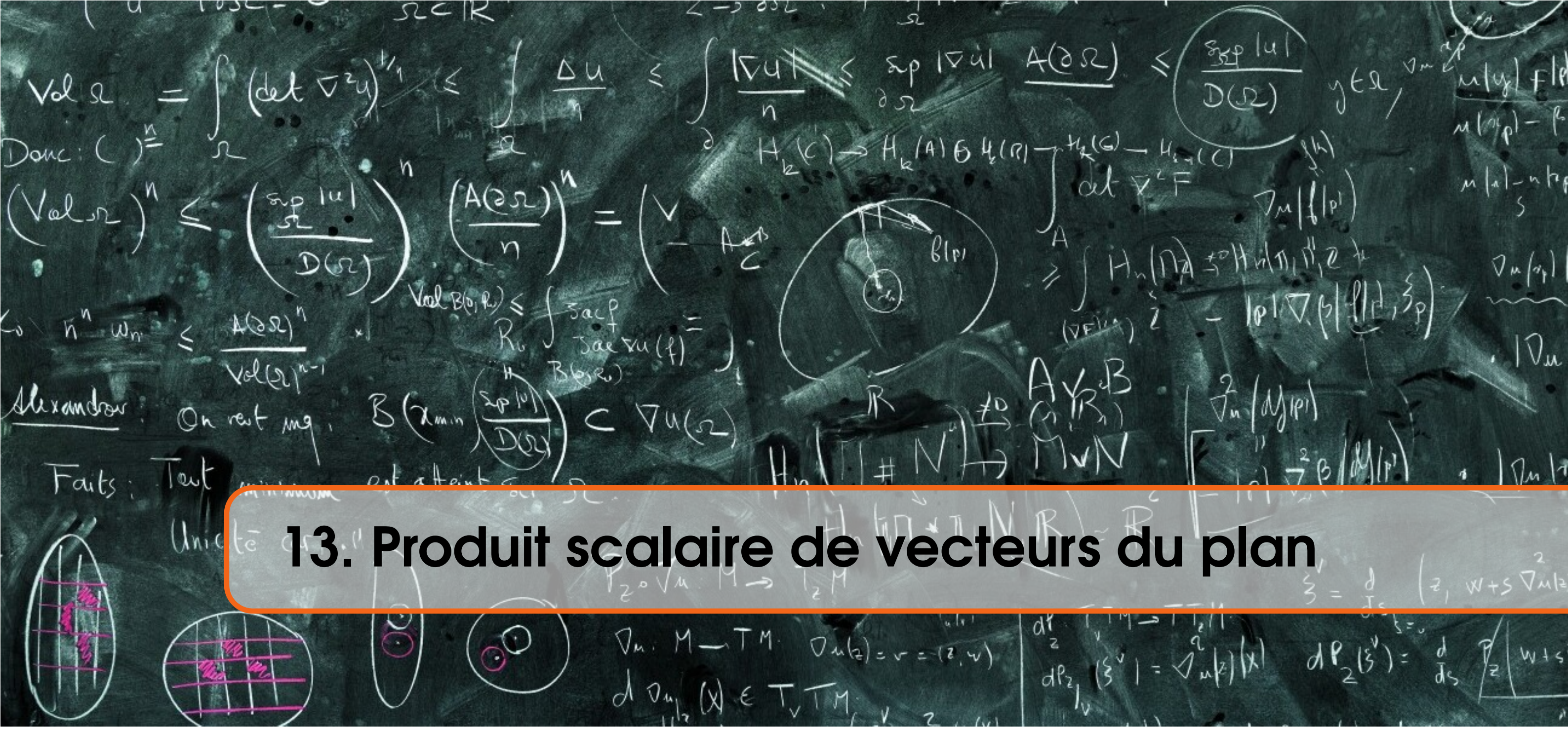
Angle associé $-x$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
Angle associé $\pi + x$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
Angle associé $\pi - x$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
Angle associé $\dfrac{\pi}{2} + x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
Angle associé $\dfrac{\pi}{2} - x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

■ **Exemple 12.2** À l'aide de la propriété précédente, évaluer les valeurs de $\cos\dfrac{3\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

■ **Exemple 12.3** À l'aide de la propriété précédente, simplifier le plus possible l'expression suivante, pour tout réel x : $f(x) = \cos(-x) - 2\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .



13. Produit scalaire de vecteurs du plan

On rappelle que dans un repère orthonormé, si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$, alors :

— Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$.

— La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire la longueur AB) est égale à $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

13.1 Trois définitions équivalentes du produit scalaire

13.1.1 Définition géométrique, « angles-normes »

Définition 13.1 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
Le *produit scalaire de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$$

où $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ désigne l'angle formé entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

■ **Exemple 13.1** On considère un triangle équilatéral ABC de côté 2 cm. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition 13.1 Le produit scalaire répond à deux propriétés remarquables.

— **Commutativité (symétrie).** Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

— **Linéarité.** Pour tout réel λ et tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

13.1.2 Définition analytique, cooordonnées

Définition 13.2 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées $(x_{\overrightarrow{u}}\,;\,y_{\overrightarrow{u}})$ et $(x_{\overrightarrow{v}}\,;\,y_{\overrightarrow{v}})$.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel égal à :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{v}}$$

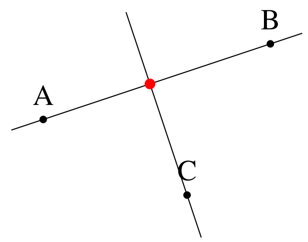
■ **Exemple 13.2** Soient $\overrightarrow{u}\,(-1\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{v}\,(3\,;\,-1)$ deux vecteurs du plan. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

. . . .

13.1.3 Définition géométrique, projections orthogonales

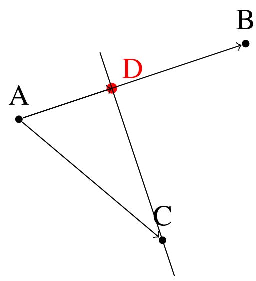
Proposition 13.2 Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *orthogonaux* (c'est-à-dire dirigés par des droites orthogonales, qui forment un angle droit) si, et seulement si, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Définition 13.3 On considère trois points distincts A, B et C du plan.
Le *projeté orthogonal de C sur (AB)* est le point d'intersection de la droite (AB) avec sa perpendiculaire passant par C.



Définition 13.4 Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note D le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel égal à :

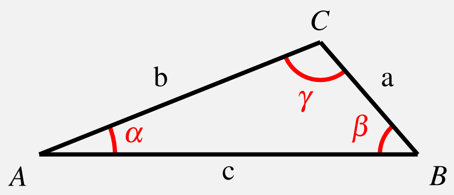
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$



■ **Exemple 13.3** On considère un carré $ABCD$ de côté 2 cm. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

13.2 Application : le Théorème d'Al-Kashi

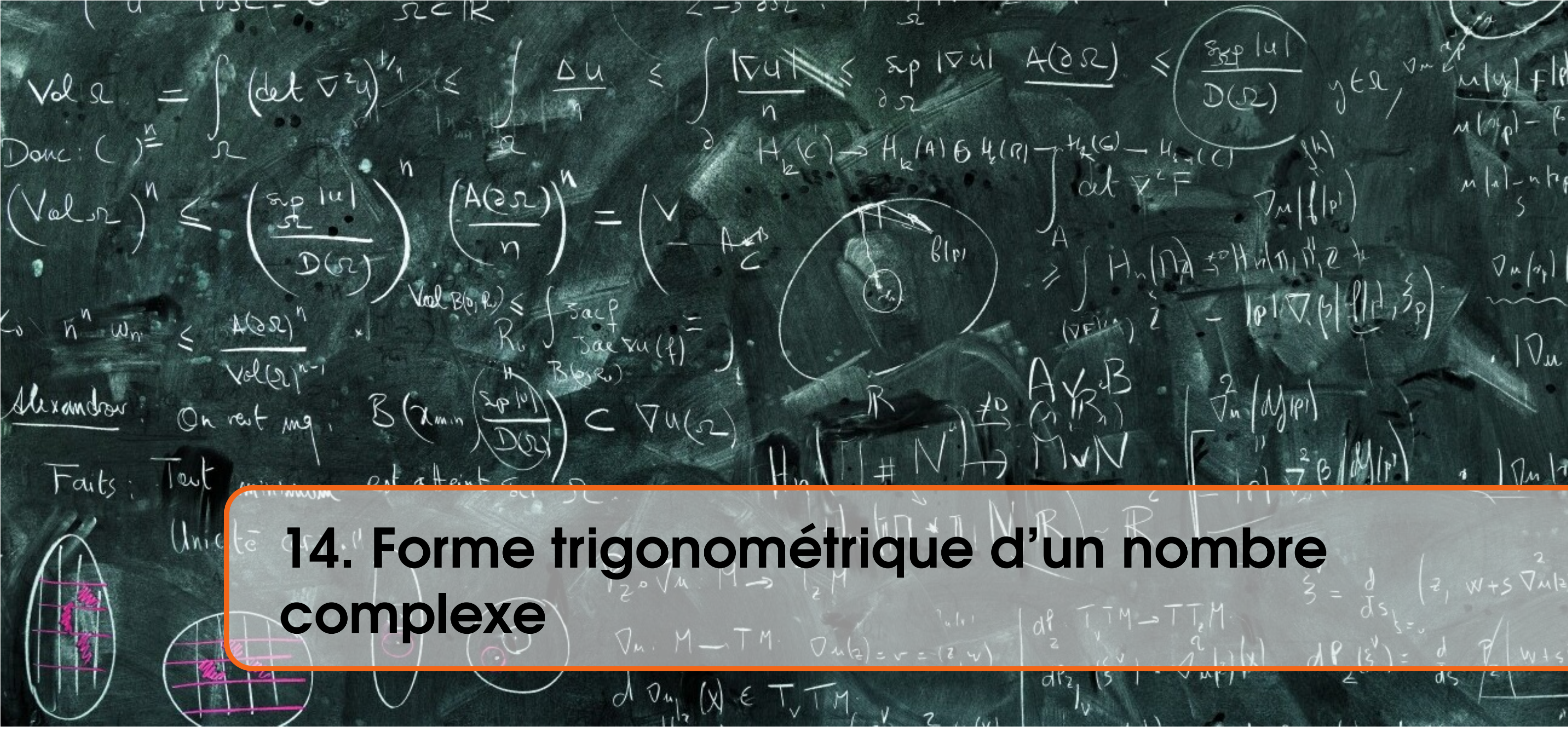
Théorème 13.1 On considère un triangle ABC avec les notations suivantes :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

R Le deuxième nom du théorème d'Al-Kashi est le « Théorème de Pythagore généralisé ». En effet, si $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le fameux théorème de Pythagore applicable dans un triangle rectangle.

■ **Exemple 13.4** Soit un triangle ABC où $AC = 7$ cm, $BC = 10$ cm et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ rad. Calculer AB.



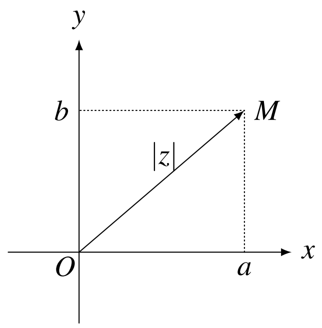
14. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

14.1 Module d'un nombre complexe

Définition 14.1 Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, son *module* est le nombre réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si $M(a\,;b)$ est un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$, $|z|$ mesure la distance OM du point M par rapport à l'origine.



■ **Exemple 14.1** Calculer le module du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 14.1 Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, et n un nombre entier, on a :

$$|\overline{z_1}| = |z_1| \quad ; \quad |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad ; \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0 \quad ; \quad |z_1^n| = |z_1|^n$$

■ **Exemple 14.2** Calculer le module du nombre complexe $z = \dfrac{2i}{1-i}$.

Proposition 14.2 Dans le plan complexe muni d'un repère **orthonormé**, si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B, la longueur AB est :

$$AB = |z_B - z_A|$$

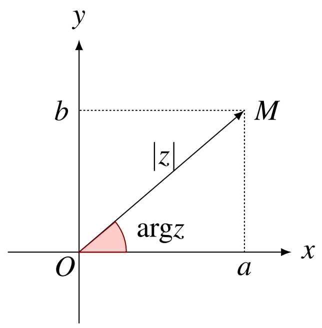
■ **Exemple 14.3** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'origine O, vérifier que le triangle OAB est rectangle en O, où A et B sont des points d'affixes $z_A = 3 + i$ et $z_B = 1 - 3i$.

14.2 Argument d'un nombre complexe

Définition 14.2 Si $z = a + ib$ est un nombre complexe **non nul**, un *argument* de z est un nombre réel, noté $\arg z$ ou θ, tel que :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Si $M(a\,;b)$ est un point du plan complexe d'affixe non nulle $z = a + ib$, $\arg z$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})$.

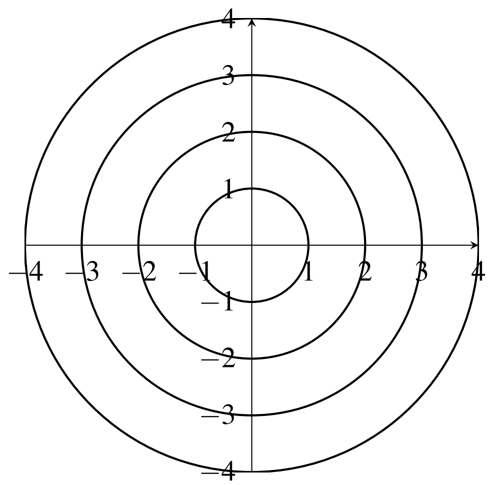


R Le nombre complexe nul est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument. Les autres nombres complexes ont une infinité d'arguments, définis à un multiple de 2π près.

■ **Exemple 14.4** Sur le cercle ci-contre, placer les points A, B, C et D d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D tels que :
— $|z_A| = 4$ et $\arg z_A = 0$.
— $|z_B| = 2$ et $\arg z_B = \frac{\pi}{2}$.
— $|z_C| = 1$ et $\arg z_C = -\frac{3\pi}{4}$.
— $|z_D| = 3$ et $\arg z_D = \pi$.

Justifier vos placements.

....
....
....
....
....
....



■ **Exemple 14.5** Déterminer un argument du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

....
....
....
....
....

14.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 14.3 Si $z = a + ib$ est un nombre complexe **non nul**, dont on note $|z|$ son module et θ un de ses arguments, une *forme trigonométrique de z* est une écriture de la forme :

$$z = |z| \times (\cos\theta + i\sin\theta)$$

■ **Exemple 14.6** Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe :

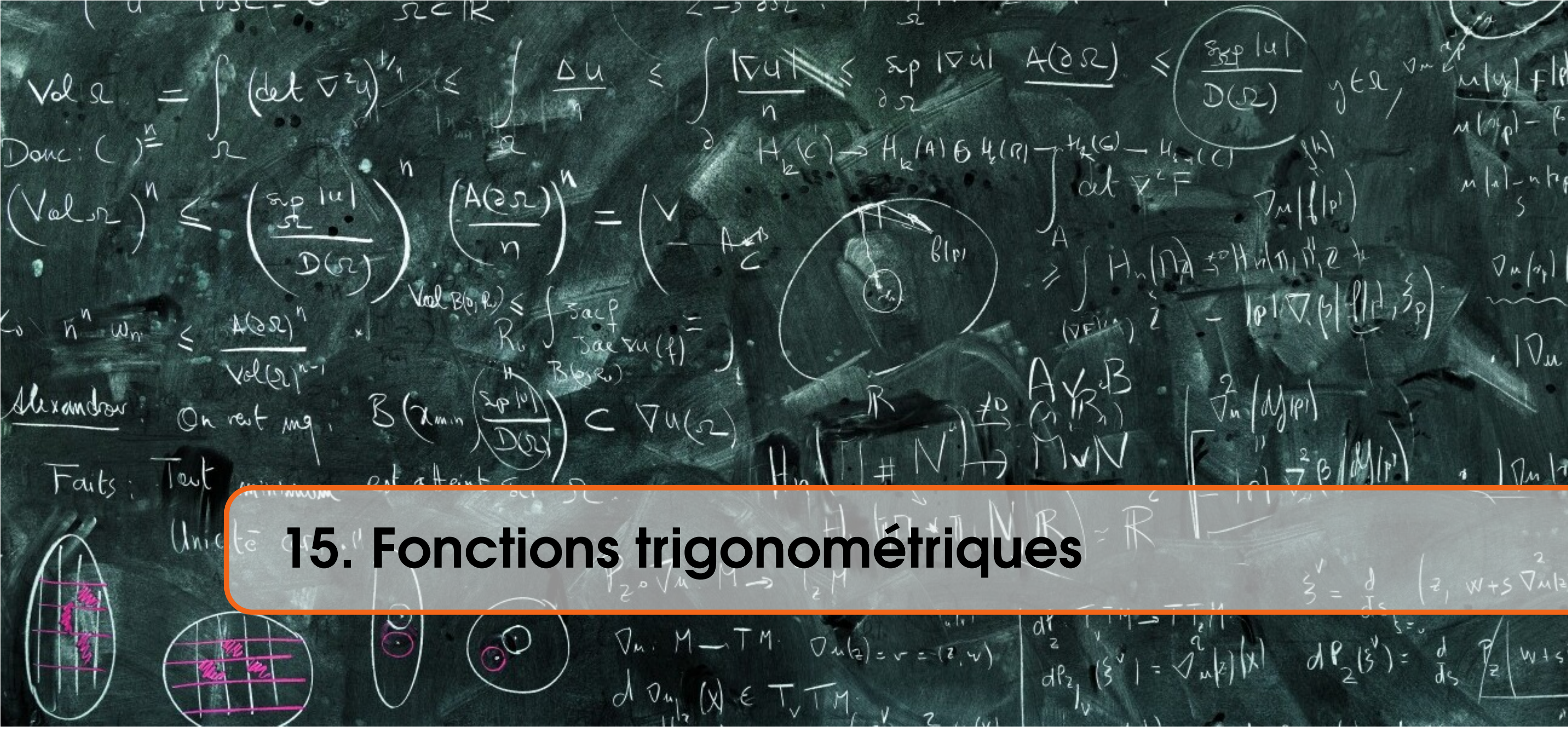
$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

....
....
....

■ **Exemple 14.7** Déterminer une forme algébrique du nombre complexe :

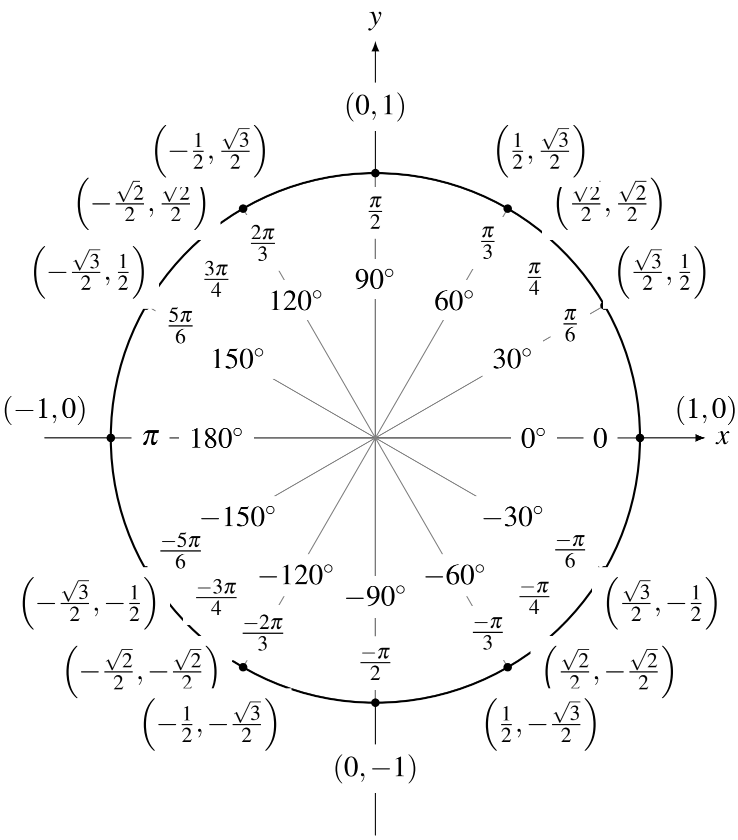
$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

....
....
....



15. Fonctions trigonométriques

15.1 Étude des fonctions cos et sin



Définition 15.1 Soit x un nombre réel, auquel on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique, tel que x soit une mesure (exprimée en radians, où 2π rad = 360 degrés) de l'angle formé entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

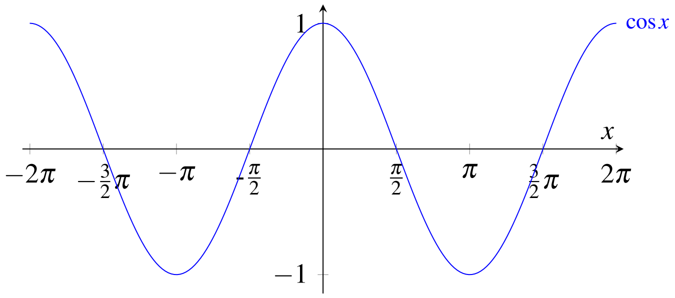
1. On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point M. La fonction, qui à tout réel x, associe $\cos x$ est appelée *fonction cosinus*.
2. On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point M. La fonction, qui à tout réel x, associe $\sin x$ est appelée *fonction sinus*.

Proposition 15.1 Les fonctions cosinus et le sinus répondent à quatre propriétés remarquables.

- **Bornitude.** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- **Périodicité.** Pour tout réel x, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.
- **Identité trigonométrique.** Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- **Parité/imparité.**
  - cos **est paire**, c'est-à-dire que $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout réel x.
  - sin **est impaire**, c'est-à-dire que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout réel x.

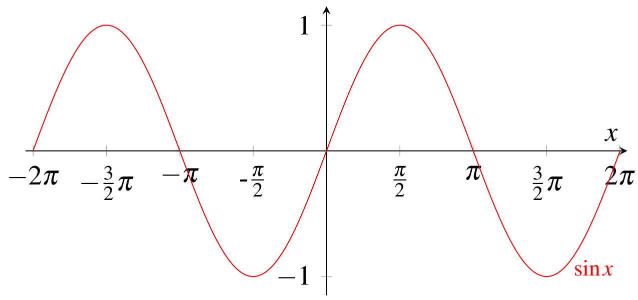
Proposition 15.2 On donne le tableau de variations et la courbe représentant la fonction cos.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1



Proposition 15.3 On donne le tableau de variations et la courbe représentant la fonction sin.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0



15.2 Étude des fonctions sinusoïdales

Définition 15.2 Une *fonction sinusoïdale* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ou $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

1. A est l'*amplitude* ou *valeur maximale*.
2. ω est la *pulsation* : c'est le nombre de périodes par intervalle de longueur 2π. On a :

$$\omega = 2\pi \times f = \frac{2\pi}{T}$$

3. f est la *fréquence* : c'est le nombre de périodes par seconde, exprimé en Hz.
4. T est la *période*.
5. φ est la *phase à l'origine*, et $\omega t + \varphi$ est la *phase instantanée*.

R A et T se lisent facilement sur un oscillogramme (ou sur la représentation graphique de la sinusoïde) : A est la valeur maximale, et T est la longueur d'un motif qui se répète (on doit donc repérer un cycle qui débute et qui se termine à un point situé sur l'axe d'oscillation).

■ **Exemple 15.1** La tension alternative sinusoïdale aux bornes d'une bobine et une fonction sinusoïdale dont la période est de $0,04$s, l'amplitude est de 20V et on sait que $u(0) = 10$V. Déterminer l'expression de $u(t)$.

. . . .

. . . .

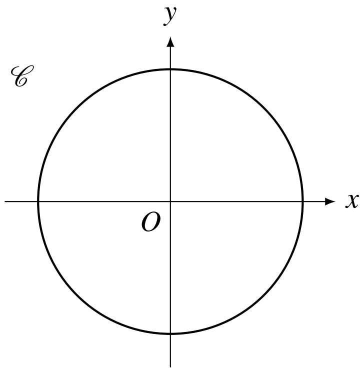
. . . .

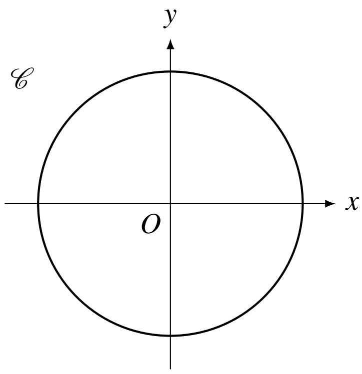
. . . .

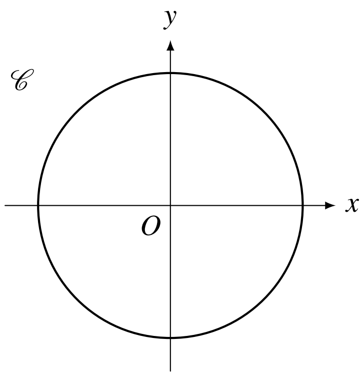
15.3 Résolution d'équations trigonométriques

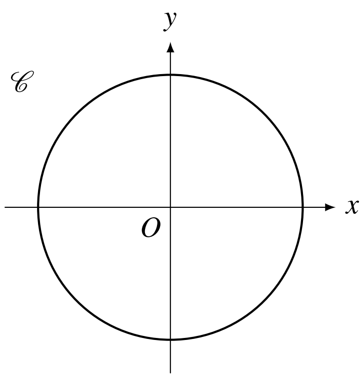
■ **Exemple 15.2** Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ les (in)équations suivantes, à l'aide d'un cercle trigonométrique.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$.
2. $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\sin x = -\frac{1}{2}$.
4. $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

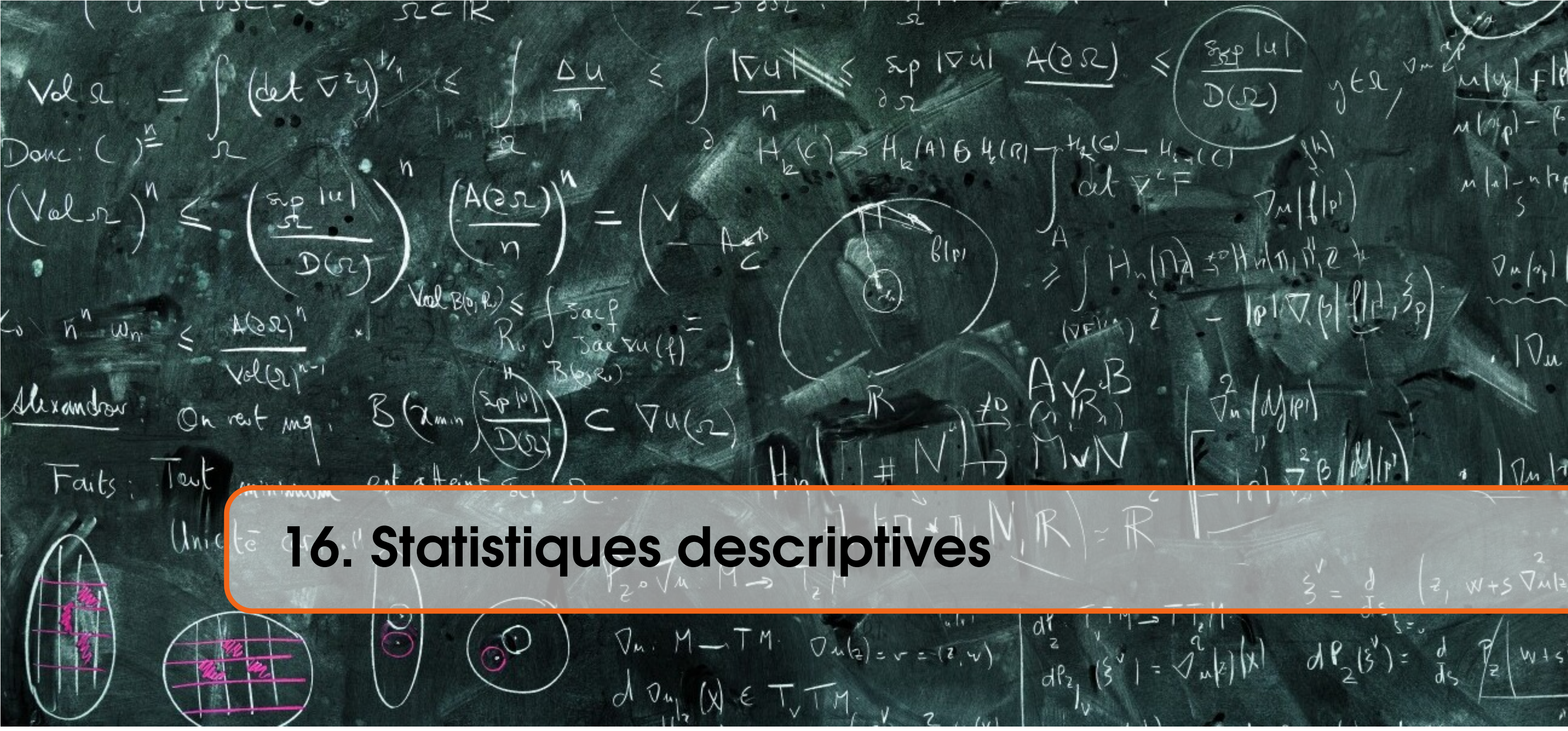








IV Probabilités et statistiques



16. Statistiques descriptives

16.1 Rappels sur les indicateurs statistiques

Définition 16.1 Une *série statistique* est un ensemble d'informations collectées sur une *population* (personnes ou objets). Pour chaque *individu* de la population, on s'intéresse à un *caractère* pouvant prendre plusieurs valeurs.

1. L'*écart-type* σ sert à mesurer la dispersion d'un ensemble de valeurs autour de leur moyenne. Plus il est faible, plus les valeurs sont « concentrées » autour de la moyenne.
2. Le *premier quartile* Q_1 est la plus petite valeur de la série, telle qu'**au moins** 25% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
3. La *médiane* Me est la plus petite valeur de la série, telle qu'**au moins** 50% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
4. Le *troisième quartile* Q_3 est la plus petite valeur de la série, telle qu'**au moins** 75% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
5. L'*écart interquartile* est l'écart $Q_3 - Q_1$ entre le premier et le troisième quartile.

R Pour calculer ces indicateurs statistiques, on utilisera la calculatrice.

1. **Pour les utilisateurs de Casio :**
   — Appuyer sur $\boxed{\text{MENU}}$ et sélectionner le menu $\boxed{\text{STAT}}$.
   — Rentrer les données dans la liste 1, et les effectifs dans la liste 2.
   — Appuyer sur $\boxed{\text{OPTN}}$, puis $\boxed{\text{Calc à 1 variab}}$.
2. **Pour les utilisateurs de TI :**
   — Appuyer sur $\boxed{\text{stats}}$ et sélectionner le menu $\boxed{\text{EDIT}}$, puis l'option $\boxed{\text{1 :Modifier...}}$.
   — Rentrer les données dans la colonne L1, et les effectifs dans la colonne L2.
   — Appuyer sur $\boxed{\text{stats}}$ et sélectionner le menu $\boxed{\text{CALC}}$, puis l'option $\boxed{\text{1 : Stats 1 Var}}$.
   — Taper ensuite L1 ($\boxed{\text{2nd}}$ puis $\boxed{\text{1}}$), L2 ($\boxed{\text{2nd}}$ puis $\boxed{\text{2}}$) puis appuyer sur $\boxed{\text{ENTER}}$.

■ **Exemple 16.1** Un opérateur téléphonique décompte le nombre d'appels qu'il reçoit, chaque jour, pendant 20 jours.

Nombre d'appels	8	9	11	12	14	16
Effectif	1	3	5	5	2	4

Vérifier qu'en moyenne, ce standardiste reçoit $12,1$ appels par jour et que le nombre d'appels par jour s'écarte de $2,4$ par rapport à cette moyenne.

....

....

16.2 Croisement de deux variables catégorielles

Dans cette section, on s'intéresse à une population E qui possède deux caractères, que l'on note C et C'. On peut la représenter à l'aide d'un tableau d'effectifs à deux entrées.

	C	$\overline{C}$	**Total**
C'			
$\overline{C'}$			
Total			

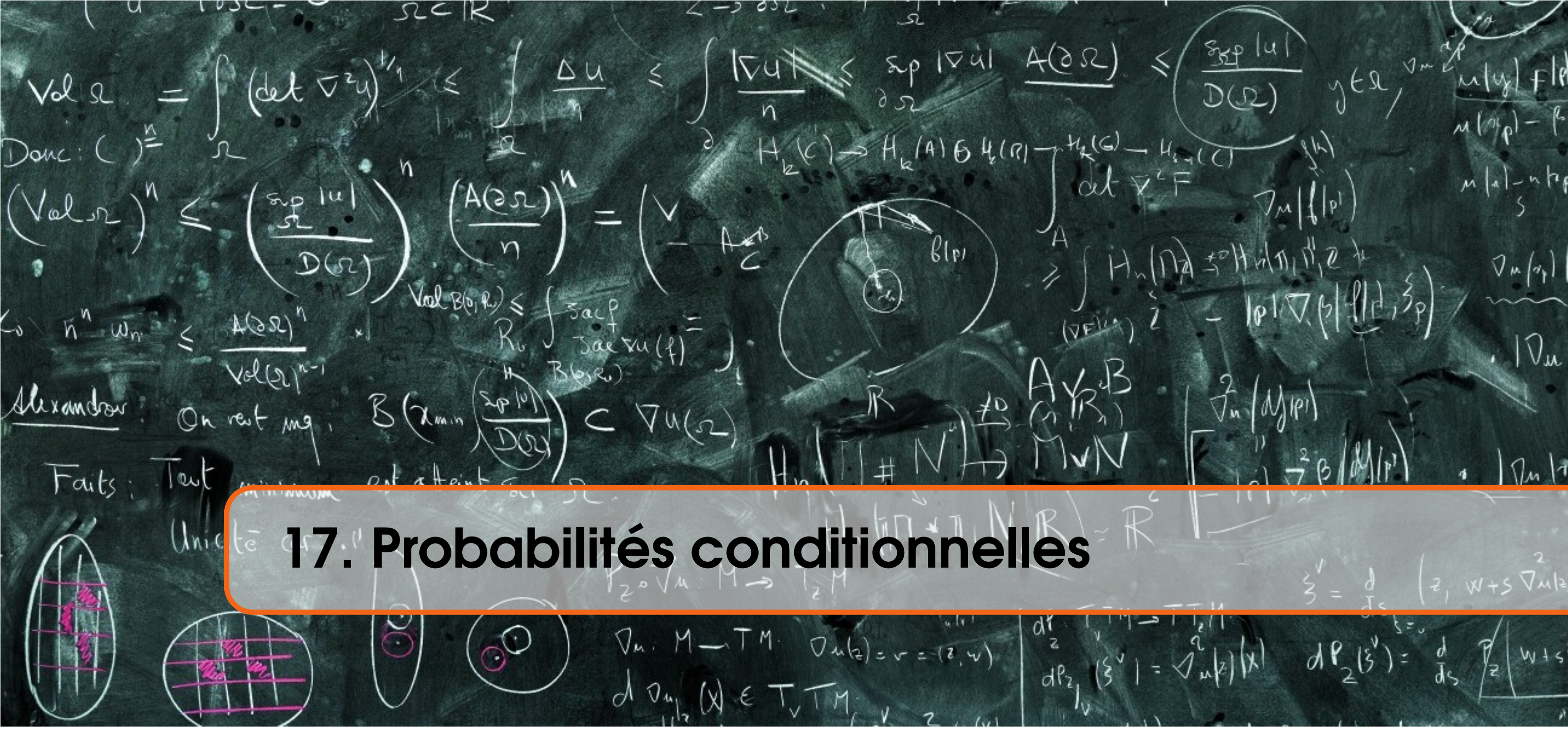
Définition 16.2 On réalise une étude statistique sur une population, et on s'intéresse à deux caractères C et C' portant sur les individus de cette population.

1. La *fréquence marginale de C* est $\dfrac{\text{Effectif d'individus ayant } C}{\text{Effectif total}}$.
2. La *fréquence conditionnelle de C parmi C'* est $\dfrac{\text{Effectif d'individus ayant } C}{\text{Effectif d'individus ayant } C'}$.

■ **Exemple 16.2** Voici la répartition des candidats à la session de BTS 2017, selon la spécialité :

	Hommes	**Femmes**	**Total**
Production	43 329		54 364
Services		78 015	
Total	91 549		

1. Compléter les cases manquantes du tableau. Combien de candidats ont composé ? ....
2. Les proportions seront exprimées sous la forme d'un pourcentage arrondi à $0,01\%$.
   a. Parmi les candidats, quelle est la proportion de femmes ?
   ....
   b. Parmi les candidats, quelle proportion d'hommes présentent un BTS services ?
   ....
   c. Parmi les hommes, quelle est la proportion de ceux qui présentent un BTS services ?
   ....



17. Probabilités conditionnelles

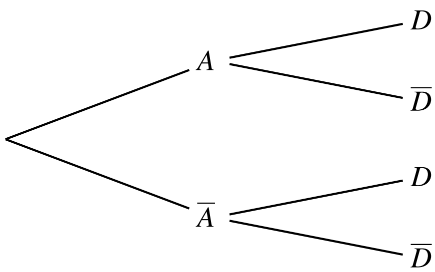
17.1 Rappels sur les calculs de probabilités

R La *probabilité d'un évènement A*, noté $\mathbb{P}(A)$, est un nombre compris entre 0 (évènement impossible) et 1 (évènement certain). Lorsque l'on veut représenter schématiquement la succession de deux épreuves, on utilisera un *arbre pondéré*.

1. La probabilité de l'intersection de deux évènements (c'est-à-dire d'avoir **à la fois** un évènement et un autre) est le produit des probabilités apparaissant sur chaque branche.
2. La somme des probabilités des branches issues d'un même évènement est égale à 1.

■ **Exemple 17.1** Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A (qui produit les trois-quarts des aiguilles), le site B (qui produit le reste). Une étude de contrôle de qualité a révélé que 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses, contre 4 % des aiguilles du site B. Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots. On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les évènements A : « L'aiguille provient du site A », B : « L'aiguille provient du site B » et D : « L'aiguille a un défaut ».

1. D'après l'énoncé, donner la valeur de la probabilité A : $\mathbb{P}(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.
3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A ?
   ....
4. Montrer que $\mathbb{P}(D) = 0,025$.
   ....
   ....



17.2 Calculs de probabilités conditionnelles

Définition 17.1 Soient A et B deux évènements, tel que A ne soit pas un évènement impossible. On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A*, que l'on note $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple 17.2** Une culture de pois comporte des pois de couleur « jaune » ou « vert » et de forme « lisse » ou « ridé ». Le tableau ci-dessous est partiellement renseigné à partir des observations effectuées sur un grand nombre de pois de cette culture.

	Pois jaunes	**Pois verts**	**Total**
Pois ridés	100		600
Pois lisses			
Total	300		10 000

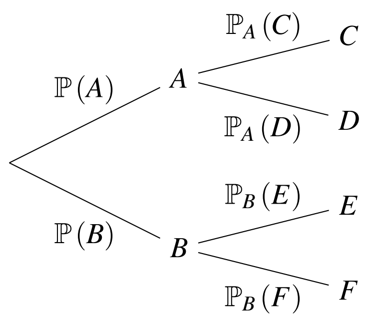
Compléter le tableau, puis calculer la probabilité qu'un pois soit vert sachant qu'il est lisse.

. . . .

. . . .

Proposition 17.1 On construit un arbre pondéré à l'aide de trois règles :

1. Sur la première profondeur de l'arbre, on inscrit les probabilités des évènements.
2. Sur la deuxième profondeur de l'arbre, on inscrit les probabilités conditionnelles.
3. Sur les *branches* issues d'un même *noeud*, la somme des probabilités est égale à 1.



■ **Exemple 17.3** Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports). Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ». On constate que, dans cette école :

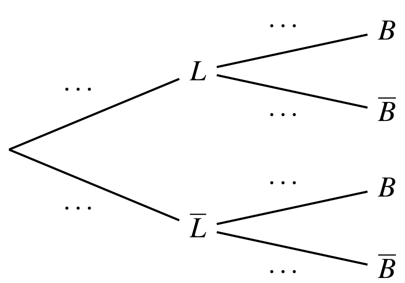
— 40 % d'étudiants sont dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation » ;
— Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS ;
— Parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

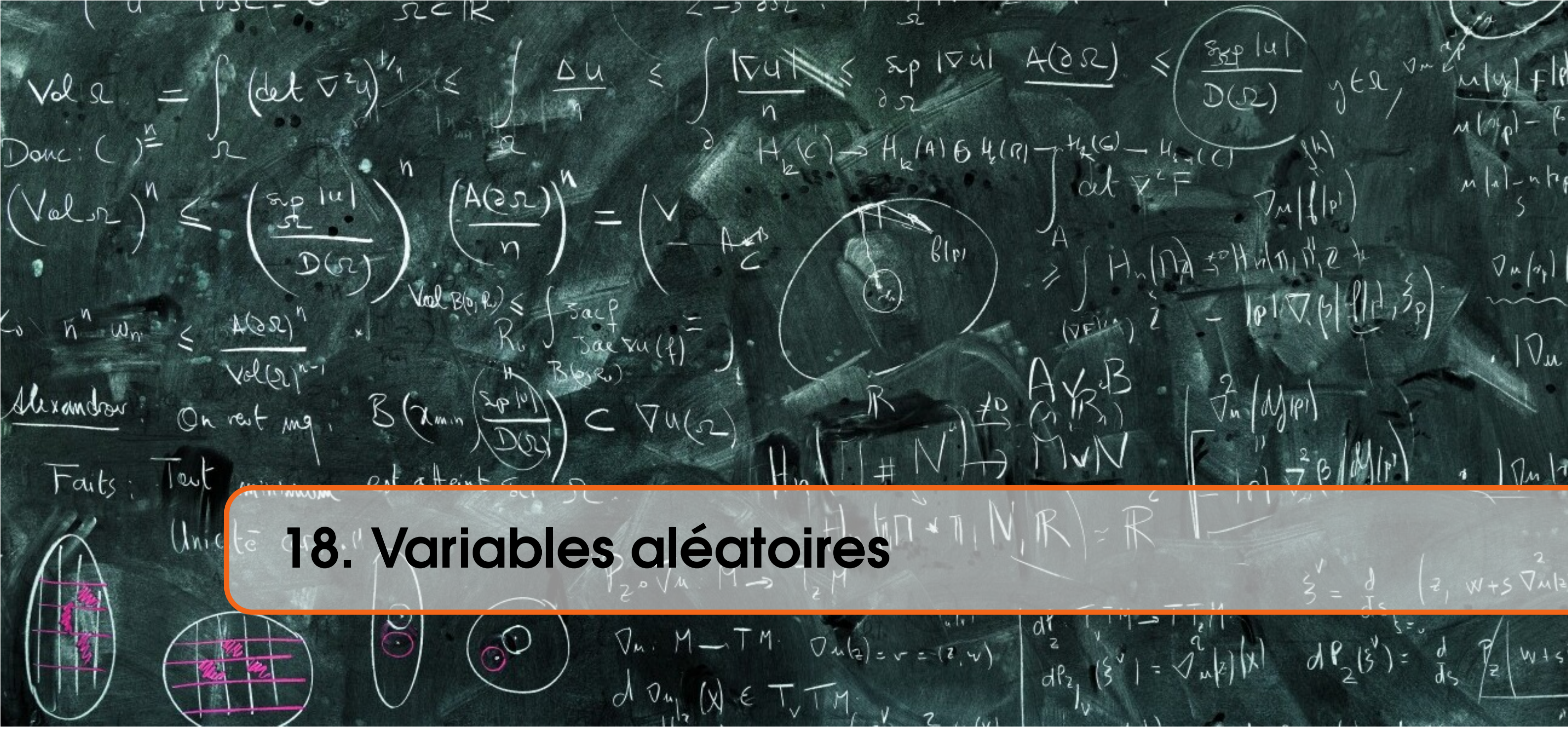
On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les évènements L : « L'étudiant est dans le cycle « licence » et B : « L'étudiant est membre du BDS ».

1. Écrire chacun des pourcentages comme des probabilités d'évènements.

   $0,40 = \mathbb{P}(\ldots)$ $\qquad$ $0,60 = \mathbb{P}(\ldots)$ $\qquad$ $0,08 = \mathbb{P}_{\ldots}(\ldots)$ $\qquad$ $0,10 = \mathbb{P}_{\ldots}(\ldots)$

2. Compléter l'arbre pondéré modélisant la situation.





18. Variables aléatoires

18.1 Variables aléatoires

■ **Exemple 18.1** On lance un dé cubique équilibré, et on note le résultat obtenu.

1. Déterminer Ω l'*univers*, qui est l'ensemble de toutes les *issues* (ou *éventualités*) possibles.
   . . . .
2. On considère le jeu suivant :
   — Si le résultat obtenu est 6, le joueur gagne 10 €.
   — Si le résultat obtenu est un nombre pair différent de 6, le joueur gagne 2 €.
   — Si le résultat obtenu est un nombre impair différent de 1, le joueur ne gagne ni ne perd.
   — Si le résultat obtenu est 1, le joueur perd 5 €.

   On note X la variable aléatoire qui, à l'issue du lancer du dé, associe le gain algébrique (exprimé en euros) obtenu par le joueur. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
   . . . .

18.2 Loi de probabilité

Définition 18.1 Une *loi de probabilité* se présente sous la forme d'un tableau, où seront indiquées toutes les issues de l'expérience aléatoire (sur la première ligne), ainsi que leurs probabilités respectives (sur la seconde ligne).

■ **Exemple 18.2** Donner la loi de probabilité de X, où X est la variable aléatoire de l'exemple 1.

x_i				
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

■ **Exemple 18.3** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes (comportant les figures 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As, disponibles dans les quatre couleurs Pique, Trèfle, Cœur, Carreau). On gagne 5 € si l'on tire un as, 2 € si l'on tire un trèfle, et on perd 10 € si l'on tire une autre carte. On note X la variable aléatoire qui, à l'issue du tirage, associe le gain algébrique (exprimé en euros) obtenu par le joueur.

1. Compléter la loi de probabilité de X, dans le tableau ci-dessous.

x_i				
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

2. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
   . . . .
   . . . .

18.3 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 18.2 On définit l'*espérance* d'une variable aléatoire X comme le nombre :

$$\mathbb{E}(X) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + \ldots + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$$

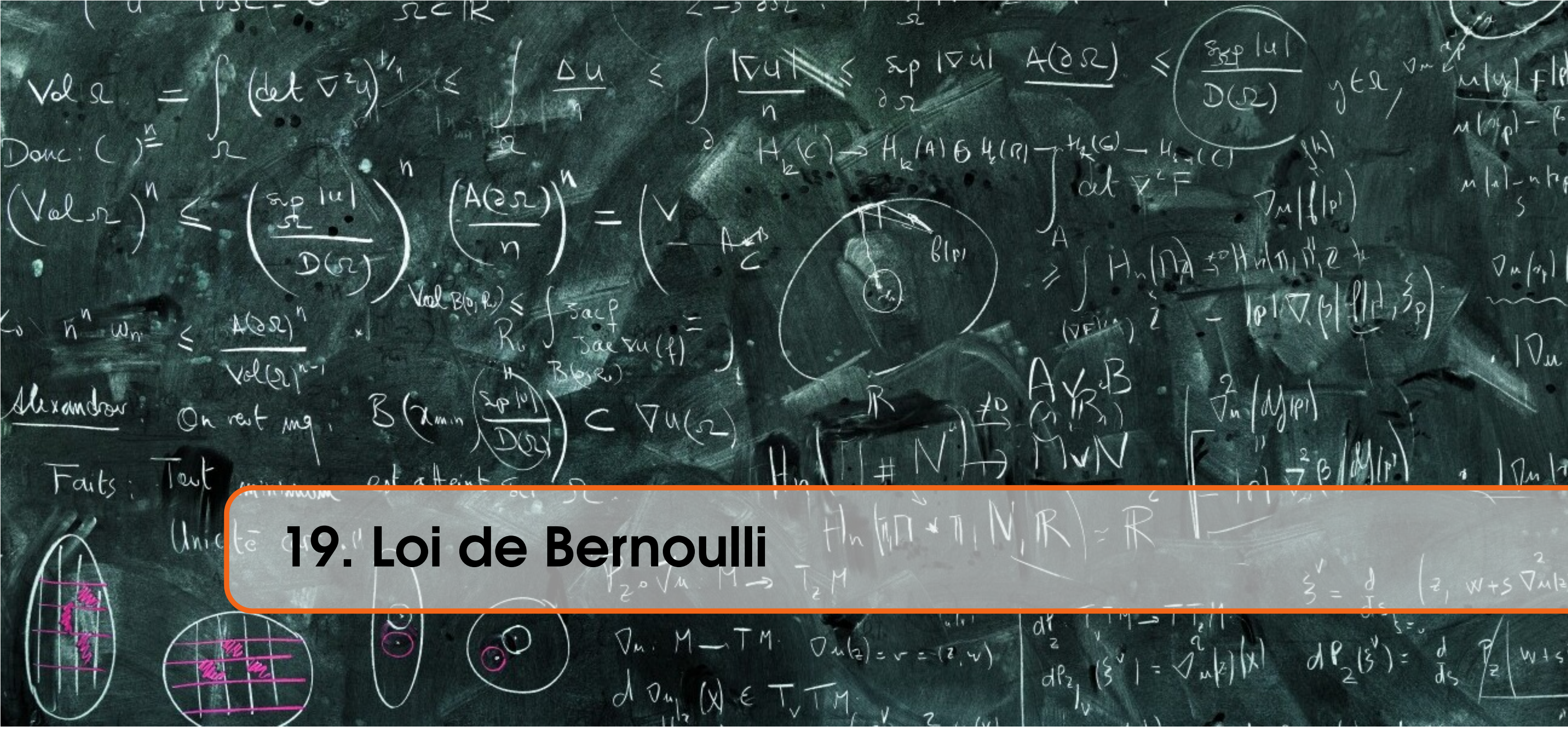
L'espérance peut être interprétée comme une moyenne, si l'on venait à répéter une expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

■ **Exemple 18.4** On reprend les lois de probabilités dressées dans les exemples précédents.

1. Pour l'exemple du dé équilibré, calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter ce résultat.
   ....
   ....
   ....
2. Pour l'exemple du jeu de cartes, calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter ce résultat.
   ....
   ....
   ....

■ **Exemple 18.5** Si X représente le gain algébrique d'un jeu, que signifie le fait d'avoir :

1. Une espérance positive ? ....
2. Une espérance négative ? ....
3. Une espérance nulle ? ....



19. Loi de Bernoulli

19.1 Épreuves de Bernoulli

Définition 19.1 Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire à deux issues contraires :
- Une de ces issues est appelée *succès* (à laquelle on associe le nombre 1),
- L'autre de ces issues est appelée *échec* (à laquelle on associe le nombre 0).

■ **Exemple 19.1** Proposer deux exemples simples d'épreuves de Bernoulli (c'est-à-dire une situation, une issue assimilée à un succès, et sa probabilité).

. . . .

. . . .

Définition 19.2 Une *loi de Bernoulli de paramètre* p est une loi de probabilité où :
1. La probabilité d'obtenir 1 (le succès) est égale à p.
2. La probabilité d'obtenir 0 (l'échec) est égale à $1-p$.

■ **Exemple 19.2** On lance un dé cubique équilibré, et on s'intéresse au fait d'obtenir le nombre 2.
1. Expliquer pourquoi cette situation relève d'une épreuve de Bernoulli.

   . . . .

   . . . .
2. Compléter la loi de Bernoulli suivante. Quelle est son paramètre ?

x_i		
$\mathbb{P}(X=x_i)$		

   . . . .

   . . . .

Proposition 19.1 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$1-p$	p

Son espérance est alors $\mathbb{E}(X)=p$.

■ **Exemple 19.3** Démontrer ce résultat à l'aide de la formule de calcul d'espérance vue dans le chapitre précédent.

. . . .

19.2 Répétition d'épreuves de Bernoulli

Définition 19.3 Des expériences aléatoires sont dites *identiques et indépendantes* si elles possèdent les mêmes issues, et que chaque issue possède la même probabilité.

■ **Exemple 19.4** Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne.

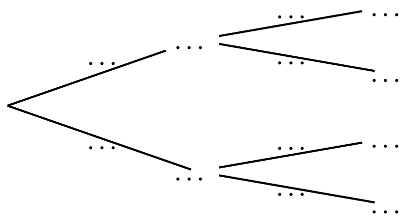
1. En considérant que le succès est « Tirer une boule blanche », cette situation relève d'une loi de Bernoulli. Préciser son paramètre.

   ....

   ....

2. On décide de répéter cette expérience deux fois de suite.

   a. Dresser un arbre pondéré de probabilités schématisant la situation.



   b. Déterminer les probabilités suivantes.

   — Tirer deux boules blanches.

   ....

   — Tirer une boule de chaque couleur.

   ....

   — Tirer au moins une boule rouge.

   ....