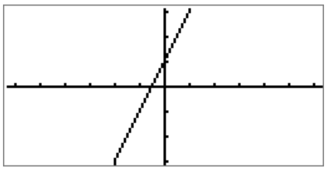
C.1 Voici les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;4]$:

- sur l'intervalle $[-4\,;0]$, la fonction f est décroissante.
- sur l'intervalle $[0\,;4]$, la fonction f est croissante

x	-4		0		4
Variation de f	4	↘	0	↗	4

C.2

1. La représentation de la fonction f à la calculatrice a pour allure :

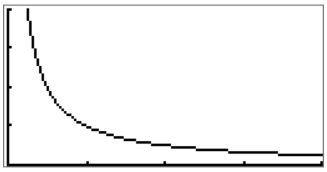


On peut conjecturer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Cela peut se schématiser par le tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	$+\infty$

2. La courbe représentative de la fonction g donne l'affichage suivant sur la calculatrice :

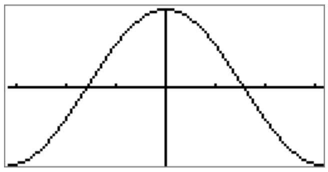


L'allure de la courbe permet de conjecturer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cela peut se schématiser par le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
Variation de g	$+\infty$	↘	0

3. La fonction cosinus s'affiche sur la calculatrice par :



L'allure de la courbe permet de conjecturer que :

- la fonction g est croissante sur $[-\pi\,;0]$;
- la fonction g est décroissante sur $[0\,;\pi]$;

Cela peut se schématiser par le tableau de variations :

x	$-\pi$		0		π
Variation de h	-1	↗	1	↘	-1

C.3

1. Le tableau de variations de la fonction f est :

x	-7		-4		0		4		6
Variation de f	1	↗	4	↘	-3	↗	3	↘	0

2. a. Le point le plus haut de la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnée $(-4\,;4)$.

   b. La valeur maximale atteinte par $f(x)$ est 4 et elle est atteinte pour $x=-4$.

3. La valeur minimale prise par la fonction f est -3 et elle est atteinte pour x=0.

C.4

1. a. L'ensemble de définition de la fonction f est : $[-10\,;-0{,}5]$.

   b.

x	-10		-5		-0.5
Variation de f	-6	↗	-0.5	↘	-5.5

2. a. Le point le plus haut de la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnée $(-5\,;-0{,}5)$.

   b. Ainsi, $f(x)$ prend pour valeur maximale $-0{,}5$; ce maximum est atteint pour $x=-5$.

3. Sur l'intervalle $[-10\,;-5]$, f atteint son minimum en -10 et a pour valeur -6.

C.5

1. La fonction f a pour ensemble de définition l'intervalle $[0\,;7]$

②

x	0		1		2,5		4,5		6		7
Variation de f	2	↗	3	↘	0	↗	4	↘	1	↗	2,5

③ Sur $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$, la fonction f atteint son maximum 3 pour $x=1$.

④ La valeur maximale prise par la fonction f sur son ensemble de définition est 4 ; cette valeur sera atteinte pour $x=4{,}5$

⑤ Le minimum de la fonction f est 0 et est atteinte pour $x=2{,}5$

C.6

ⓐ **Vrai** : à l'aide du tableau de variation, on obtient l'égalité : $f(-2)=3$.
Le nombre -2 est un antécédent du nombre 3 par la fonction f.

ⓑ **Faux** : l'image de 1 par la fonction f est un nombre négatif.
La fonction f est croissante sur $[-2\,;0]$ et admet 3 pour minimum : $f(-1)$ est un nombre strictement positif.

On en déduit la comparaison suivante : $f(1)<f(-1)$

ⓒ **Indécidable** : d'après le tableau de variation, on a :
$f\Big([1\,;+\infty[\Big)=[-4\,;3[$
L'image du nombre 2 peut être soit positive, soit négative.

ⓓ **Vrai** : sur $\mathbb{R}$, la fonction f décroit par deux fois. Elle atteint deux minimums locaux dont les valeurs sont 3 et -4.
Ainsi, sur $\mathbb{R}$, le minimum de la fonction f est -4.

ⓔ **Vrai** : par la fonction f, on a les images suivantes d'intervalles :

- $f\Big(]-\infty\,;-2]\Big)=[3\,;5]$
- $f\Big([-2\,;0]\Big)=[3\,;7]$

On en déduit que la fonction est strictement positive sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$.

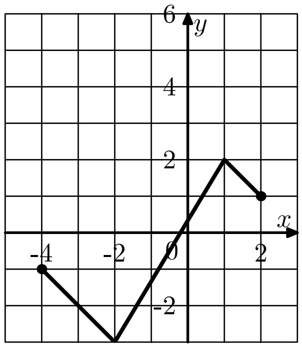
ⓕ **Faux** : en fait, la fonction f admet trois antécédents du nombre 4 ; chacun de ses antécédents appartient à l'un des intervalles $]-\infty\,;-2]$, $[-2\,;0]$ et $[0\,;1]$.

C.7 Voici les phrases complétées :

- l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f=\mathbf{[-5\,;7[}$
- la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{[3\,;7]}$
- la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{[-5\,;1]}$
- la fonction f est **constante** sur l'intervalle $[1\,;3]$
- Le nombre **7** n'admet pas d'image par f.

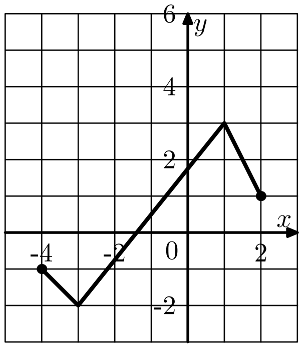
C.8 Voici les différentes associations des courbes représentatives et de leurs tableaux de variation :

- Pour la fonction f :



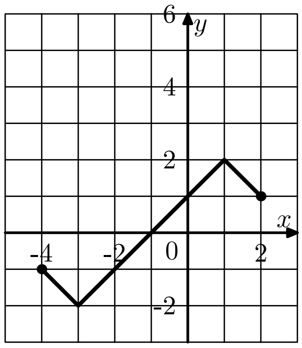
x	-4		-2		1		2
Variation de f	-1	↘	-3	↗	2	↘	1

- Pour la fonction g :



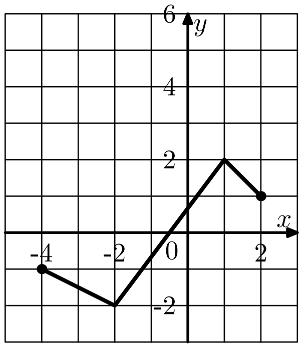
x	-4		-3		1		2
Variation de g	-1	↘	-2	↗	3	↘	1

- Pour la fonction h :



x	-4		-3		1		2
Variation de h	-1	↘	-2	↗	2	↘	1

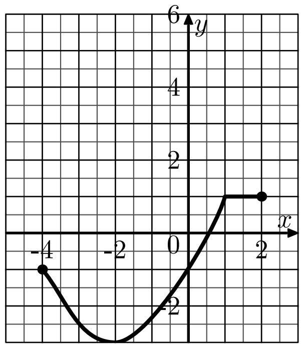
- Pour la fonction j :



x	-4		-2		1		2
Variation de j	-1	↘	-2	↗	2	↘	1

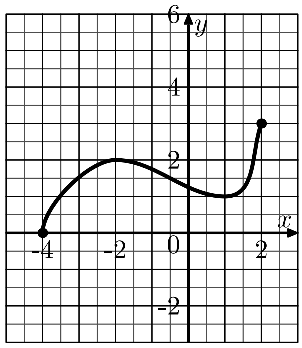
C.9 Voici les différentes associations des courbes représentatives et de leurs tableaux de variation :

- Pour la fonction f :



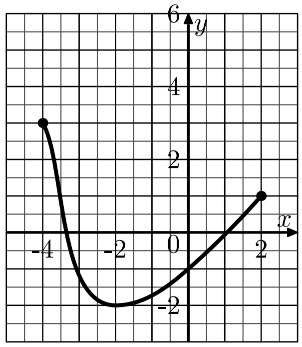
x	-4		-2		1		2
Variation de f	-1	↘	-3	↗	1	→	1

- Pour la fonction g :



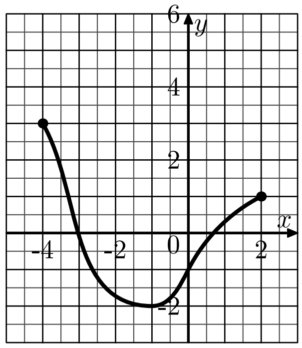
x	-4		-2		1		2
Variation de f	0	↗	2	↘	1	↗	3

- Pour la fonction h :



x	-4		-2		0		2
Variation de f	3	↘	-2	↗	-1	↗	1

- Pour la fonction j :

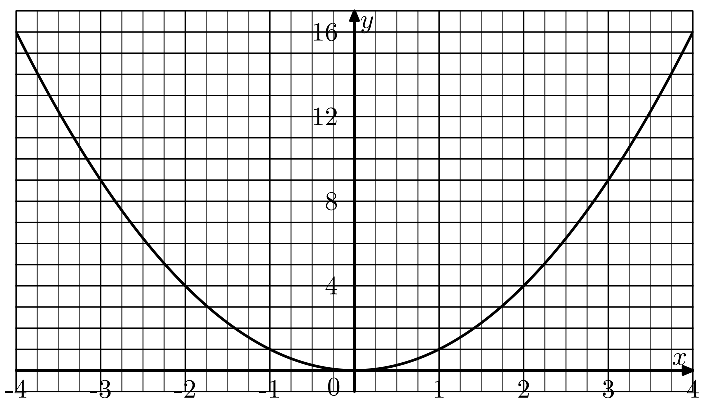


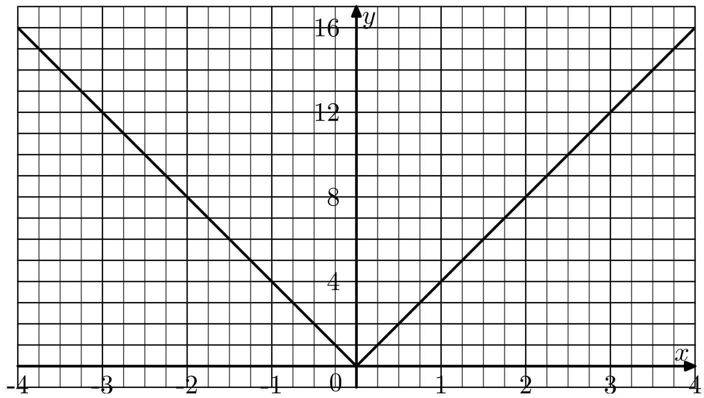
x	-4		-1		0		2
Variation de f	3	↘	-2	↗	-1	↗	1

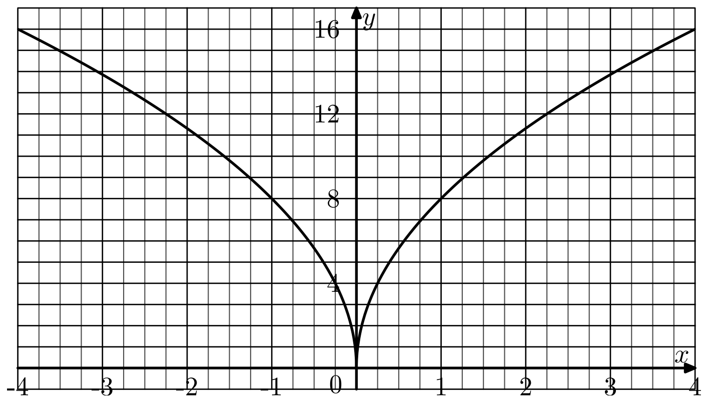
C.10 La fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	-3		$-1,5$		1		3
Variation de f	$1,5$	↘	$-1,5$	↗	1	↘	0

C.11 Voici l'exemple de trois fonctions différentes les unes des autres et admettant, toutes, le même tableau de variations :







C.12

(a) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;3]$. On en déduit l'implication :
$0<1 \implies f(0)<f(1)$

(b) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[3\,;5]$. On en déduit l'implication :
$4<5 \implies f(4)>f(5)$

(c) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-3\,;0]$. On en déduit l'implication :
$-2<-1 \implies f(-2)>f(-1)$

(d) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;3]$. On en déduit l'implication :
$1<2 \implies f(1)<f(2)$

C.13

(a) Sur l'intervalle $[-5\,;-2]$, la fonction f est croissante. On en déduit :
$-3>-4 \implies f(-3)>f(-4)$

(b) Sur l'intervalle $[2\,;6]$, la fonction f est décroissante. On en déduit :
$3<4 \implies f(3)>f(4)$

(c) D'après le tableau de variation, on a les encadrements suivants :

- $-4\in[-5\,;-2] \implies f(-4)\in[3\,;5]$
- $4\in[2\,;6] \implies f(4)\in[1\,;-2]$

On en déduit la comparaison : $f(-4)>f(4)$

(d) D'après le tableau de variation, on a les encadrements suivants :

- $f(-2)=5$
- $1\in[0\,;2] \implies f(1)\in[-4\,;1]$

On en déduit la comparaison : $f(-2)>f(1)$

C.14

ⓐ f est croissante sur $\left[-\dfrac{9}{2}\,;-1\right]$:
$f(-3) < f(-2)$

ⓑ f est décroissante sur $\left[0\,;\,3\right]$:
$f(1) > f(2)$

ⓒ $f(-5) > f(3)$

ⓓ $f(6) < f(-4)$

ⓔ $f(-4{,}75) \in \left[-2\,;2\right]$ et $f(7) \in \left[-3\,;0\right]$.
On ne peut conclure.

ⓕ $f(-10) \in \left[-2\,;5\right[$ et $f(-3) \in \left[2\,;6\right]$.
On ne peut conclure.

ⓖ $f(-6) > f(4)$

ⓗ $f(7) < f(-2)$.

C.15

① Le tableau de signes de la fonction f est :

ⓑ

x	-8		$-\dfrac{5}{2}$		1		12		15
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

② D'après le tableau de variations, on voit que la fonction f est positive sur :
$\left[-8\,;-\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[1\,;12\right]$

C.16

① **Faux** : car d'après le tableau de signe, on voit que tous les nombres de l'intervalle $]-3\,;5[$ ont une image négative.

② **Vrai** : le tableau de signes nous indique que la fonction f s'annule pour les valeurs -3 et 5.

③ **Faux** : une fonction affine, non constante, étant strictement décroissante ou strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois.

④ **Faux** : d'après le tableau de signe, l'image de 0 est un nombre négatif ; par contre, le point $(5\,;0)$ est un point de $\mathscr{C}_f$.

⑤ **On ne peut pas savoir** : le minimum de la fonction f est atteint sur l'intervalle $]-3\,;5[$, mais non-nécessairement atteint pour la valeur 1.

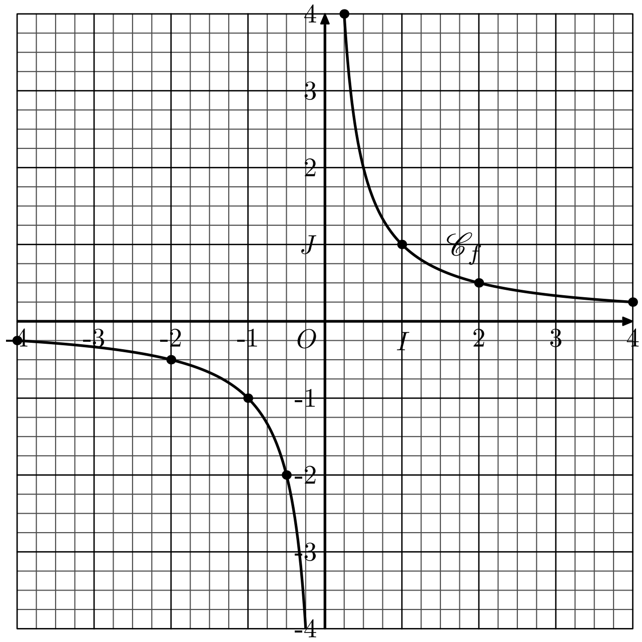
C.17

① Un quotient n'est pas défini si son numérateur est nul. On en déduit que l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction inverse est :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

② ⓐ Voici le tableau complété :

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}25$	1	2	4
$f(x)$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	-1	-2	4	1	$0{,}5$	$0{,}25$

ⓑ Voici la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction inverse :



③ ⓐ Soient a et b non tous les deux nuls, on a les transformations algébriques :
$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a{\cdot}b} - \frac{b}{b{\cdot}a} = \frac{a-b}{a{\cdot}b}$$

ⓑ Soit a et b deux nombres de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ tels que $a<b$:

-
- $a-b<0$: car b est plus grand que a.
- $a{\cdot}b>0$: car a et b sont deux nombres strictement positifs.

On en déduit les comparaisons :
$$\frac{a-b}{a{\cdot}b} < 0$$
$$f(b) - f(a) < 0$$
$$f(b) < f(a)$$
$$f(a) > f(b)$$
Deux nombres de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire : on en déduit que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

④ La courbe représentative de la fonction inverse admet pour centre de symétrie l'origine O du repère.

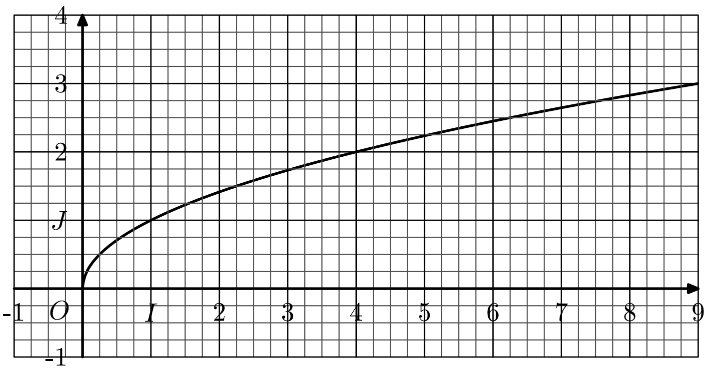
C.18

① La racine carrée d'un nombre x est définie si, et seulement si, le nombre x est positif ou nul. On en déduit l'ensemble de définition de la fonction f :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

② ⓐ Complétons le tableau de valeurs de la fonction f :

x	0	$0{,}125$	$0{,}25$	1	2	4	9
$f(x)$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	1	$\sqrt{2}$	2	3

ⓑ Voici la représentation de la fonction f :



3 a a et b sont deux nombres appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et non tous les deux nuls. Le facteur $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est non nul :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

b Supposons que $a<b$.

Cette comparaison entraine l'inégalité suivante :

$$a<b \implies a-b<0$$

Étudions alors le signe du quotient $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$:

- Le numérateur $a-b$ est négatif.
- Le dénominateur est strictement positif car :
  - les deux termes $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs ;
  - ces deux termes ne peuvent être simultanément nuls, car $a<b$.

On en déduit que le quotient étudié est négatif :

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<0 \implies \sqrt{a}-\sqrt{b}<0$$

$$\implies \sqrt{a}<\sqrt{b} \implies f(a)<f(b)$$

Deux nombres de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et leurs images par la fonction f sont ordonnées dans le même sens : la fonction racine carrée est croissante sur son ensemble de définition.

On peut résumer ce résultat par le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	$+\infty$

4 Non, la courbe représentative de la fonction racine carrée n'admet aucun axe de symétrie ou centre de symétrie.

C.19

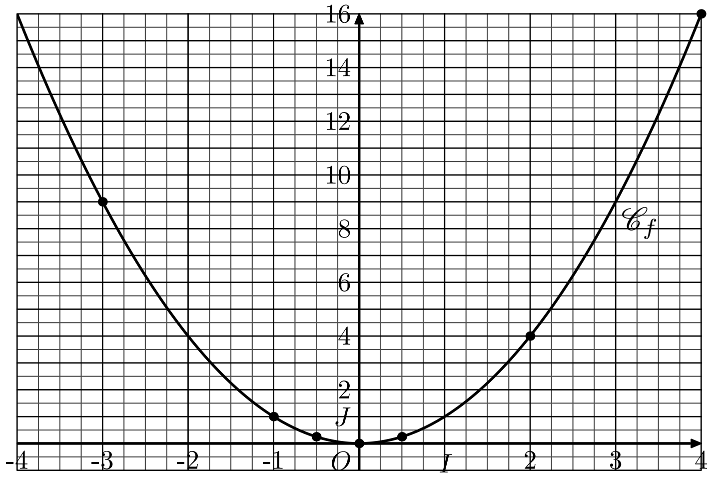
1 L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction carré est l'ensemble des nombres réels :

$$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$$

2 a Voici le tableau complété :

x	-3	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	2	4
$f(x)$	9	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	4	16

b La fonction f a pour représentation la courbe $\mathscr{C}_f$:



3 a Soit a et b deux nombres réels non tous les deux nuls, on a :

$$(b+a)(b-a)=b^2-a\cdot b+b\cdot a-a^2=b^2-a^2=f(b)-f(a)$$

b
- Soit a et b deux nombres réels appartenant à $\mathbb{R}_-$ tels que $a<b$. Étudions le signe de chaque facteur :
  - $b+a<0$, car a et b sont deux nombres négatifs
  - $b-a>0$, car b est plus grand que a

  Par le signe du produit, on en déduit :

  $$(b+a)(b-a)<0$$
  $$b^2-a^2<0$$
  $$b^2<a^2$$
  $$f(b)<f(a)$$

  Sur $\mathbb{R}_-$, deux nombres et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire : la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
- Soit a et b deux nombres réels appartenant à $\mathbb{R}_+$ tels que $a<b$. Étudions le signe de chaque facteur :
  - $b+a>0$, car a et b sont deux nombres positifs
  - $b-a>0$, car b est plus grand que a

  Par le signe du produit, on en déduit :

  $$(b+a)(b-a)>0$$
  $$b^2-a^2>0$$
  $$b^2>a^2$$
  $$f(b)>f(a)$$

  Sur $\mathbb{R}_+$, deux nombres et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même sens : la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4 La courbe représentative de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

C.20

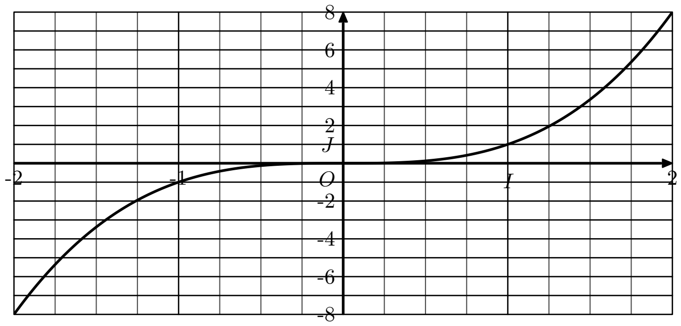
1 La fonction cube est définie pour tout nombre réel :

$$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$$

2 a Voici le tableau complété :

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
$f(x)$	-8	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1	8

b Voici la courbe représentative de la fonction cube :



③ ⓐ On a les transformations algébriques suivantes : $\big(b-a\big)\big(b^2+a{\cdot}b+a^2\big)$

$$= b^3 + a{\cdot}b^2 + a^2{\cdot}b - a{\cdot}b^2 - a^2{\cdot}b + a^3$$
$$= b^3 - a^3 = f(b) - f(a)$$

ⓑ • **Variation sur $\mathbb{R}_-$:**

Soit a et b deux nombres de $\mathbb{R}_-$ tels que $a < b$. On a :

- $b - a > 0$
- $a<0$ et $b<0 \implies a{\cdot}b>0 \implies b^2+a{\cdot}b+a^2>0$

On en déduit :

$$\big(b-a\big)\big(b^2+a{\cdot}b+a^2\big) > 0$$
$$f(b) - f(a) > 0$$
$$f(b) > f(a)$$

Ainsi, deux nombres de $\mathbb{R}_-$ et leurs images par la fonction cube sont comparés dans le même ordre : la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

• **Variation sur $\mathbb{R}_+$:**

Soit a et b deux nombres de $\mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. On a :

- $b - a > 0$
- $a<0$ et $b<0 \implies a{\cdot}b>0 \implies b^2+a{\cdot}b+a^2>0$

On en déduit :

$$\big(b-a\big)\big(b^2+a{\cdot}b+a^2\big) > 0$$
$$f(b) - f(a) > 0$$
$$f(b) > f(a)$$

Ainsi, deux nombres de $\mathbb{R}_+$ et leurs images par la fonction cube sont comparés dans le même ordre : la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

④ La courbe représentative de la fonction cube admet l'origine du repère pour centre de symétrie.