Seconde - Chapitre 14

C.1

1 a Voici le tableau complété :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b Voici les probabilités de ces trois événements :

- Il y a 5 événements élémentaires constituant l'événement A. Ainsi, on a la probabilité :
  $\mathcal{P}(A) = \dfrac{5}{36}$
- Il y a 26 événements élémentaires réalisant un score supérieur ou égale à 6 :
  $\mathcal{P}(B) = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$
- Il y a 7 événements élémentaires composant l'événement C :
  $\mathcal{P}(C) = \dfrac{7}{36}$

2 a Il y a 6 événements élémentaires composant l'événement D :
$\mathcal{P}(D) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

b Il y a deux manières sur 36 de réaliser "*on obtient 6 et 4*" :
$\mathcal{P}(E) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

c La probabilité de l'événement F est de :
$\mathcal{P}(F) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

C.2

1 Voici le tableau complété :

Sophie \ Luc	R	T_1	T_2	P_1	P_2
R	N	S	S	S	S
T	L	N	N	S	S
C_1	L	L	L	S	S
C_2	L	L	L	S	S
P	L	L	L	N	N

2 Le tableau permet d'affirmer qu'il existe 25 combinaisons de coups différents dans ce jeu :

a $\mathcal{P}(A) = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$

b $\mathcal{P}(B) = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$

c $\mathcal{P}(C) = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$

3 Le contenu des sacs est différent, mais on voit que Luc et Sophie ont la même chance de gagner : ainsi, aucun joueur n'est avantagé.

C.3

1 L'événement A est composé des quatre événements élémentaires ci-dessous :
$A = \{4\,;\,5\,;\,6\}$

Ainsi, la probabilité de l'événement A est donnée par :
$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}\Big(\{4\}\Big) + \mathcal{P}\Big(\{5\}\Big) + \mathcal{P}\Big(\{6\}\Big)$$
$$= 0{,}17 + 0{,}22 + 0{,}28 = 0{,}67$$

2 L'événement B est composé des trois événements élémentaires suivants :
$B = \{2\,;\,4\,;\,6\}$

La probabilité de l'événement B est donnée ci-dessous :
$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\Big(\{2\}\Big) + \mathcal{P}\Big(\{4\}\Big) + \mathcal{P}\Big(\{6\}\Big)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}17 + 0{,}28 = 0{,}55$$

C.4

1 On a :
$$\mathcal{P}\big(A\big) = \mathcal{P}\big(\{1\}\big) + \mathcal{P}\big(\{2\}\big) + \mathcal{P}\big(\{3\}\big)$$
$$= 0{,}11 + 0{,}14 + 0{,}1 = 0{,}35$$

2 On a :
$$\mathcal{P}\big(B\big) = \mathcal{P}\big(\{1\}\big) + \mathcal{P}\big(\{3\}\big) + \mathcal{P}\big(\{5\}\big)$$
$$= 0{,}11 + 0{,}1 + 0{,}12 = 0{,}33$$

C.5 Les boules de l'urne étant indiscernables au toucher, cette expérience représente une situation d'équiprobabilité.

- Notons n_R le nombre de boules rouges, la probabilité d'obtenir une boule rouge se traduit par le quotient ci-dessous :
  $\dfrac{n_R}{120} = 0{,}3$
  $n_R = 0{,}3\times120$
  $n_R = 36$
- Notons n_V le nombre de boules vertes, on a :
  $\dfrac{n_V}{120} = 0{,}6$
  $n_V = 0{,}6\times120$
  $n_V = 72$
- Notons n_V le nombre de boules bleues, on a :
  $\dfrac{n_B}{120} = 0{,}1$
  $n_B = 0{,}1\times120$
  $n_B = 12$

Ainsi, l'urne contient 36 boules rouges, 72 boules vertes, 12 boules bleues.

C.6 Deux raisonnements vont permettre de compléter le tableau

- On a la probabilité des nombres pairs :

$$\mathcal{P}(F_2)+\mathcal{P}(F_4)+\mathcal{P}(F_6)=0{,}4$$
$$0{,}07+0{,}2+\mathcal{P}(F_6)=0{,}4$$
$$0{,}27+\mathcal{P}(F_6)=0{,}4$$
$$\mathcal{P}(F_6)=0{,}4-0{,}27$$
$$\mathcal{P}(F_6)=0{,}13$$

- La somme des probabilités des événements élémentaires d'une expérience aléatoire vaut 1 :

$$\mathcal{P}(F_1)+\mathcal{P}(F_2)+\mathcal{P}(F_3)+\mathcal{P}(F_4)+\mathcal{P}(F_5)+\mathcal{P}(F_6)=1$$
$$0{,}11+0{,}07+\mathcal{P}(F_3)+0{,}2+0{,}15+0{,}13=1$$
$$\mathcal{P}(F_3)+0{,}66=1$$
$$\mathcal{P}(F_3)=1-0{,}66$$
$$\mathcal{P}(F_3)=0{,}34$$

On obtient la loi de probabilité de cette expérience aléatoire :

X	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
$\mathcal{P}(X)$	0,11	0,07	0,34	0,2	0,15	0,13

C.7 L'urne contient au total 25 boules. Chaque boule étant indiscernable au toucher, cette expérience aléatoire représente une situation d'équiprobabilité.

On a donc les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(A)=\dfrac{12}{25}$
- $\mathcal{P}(B)=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$
- $\mathcal{P}(C)=\dfrac{8}{25}$

X	A	B	C
$\mathcal{P}(X)$	$\dfrac{12}{25}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{8}{25}$

C.8 L'urne étant composée seulement de boules rouges, boules vertes et boules bleues, on en déduit que les boules bleues représentent 30 % des boules de l'urne.

Notons N le nombre total de boules contenues dans l'urne.

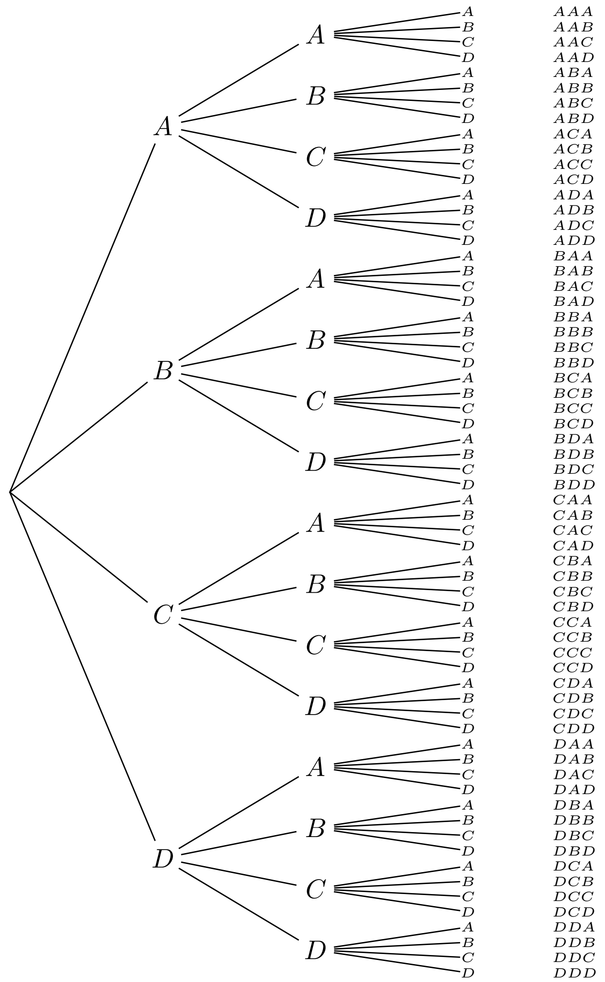
- Notons n_R le nombre de boules rouges contenues dans l'urne. Ainsi, on a l'égalité suivante :
$$\frac{n_R}{N}=\frac{20}{100}$$
On en déduit la probabilité suivante :
$$\mathcal{P}(R)=0{,}2$$
- De même, on a : $\mathcal{P}(V)=\dfrac{50}{100}=0{,}5$
- De même, on a : $\mathcal{P}(B)=\dfrac{30}{100}=0{,}3$

Le tableau ci-dessous résume la loi de probabilité :

X	R	V	B
$\mathcal{P}(X)$	0,2	0,5	0,3

C.9

1 Voici les soixante-quatre mots accessibles au travers de cette expérience aléatoire :



2 a Il y a 27 mots contenant exactement une fois la lettre "B" ; ainsi, la probabilité de l'événement E_1 est de :
$$\mathcal{P}(E_1)=\frac{27}{64}$$

b Il y a 9 mots contenant exactement deux fois la lettre "B" :
$$\mathcal{P}(E_2)=\frac{9}{64}$$

c Il y a 16 mots contenant la même lettre à la première et à la troisième place :
$$\mathcal{P}(E_3)=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$$

3 Il y a quatre mots possédant ses trois lettres identiques. Déterminons les probabilités des deux événements suivants :

- Déterminons la probabilité de $\mathcal{X}=5$.
Il y a quatre mots ayant ses trois lettres identiques :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$
- L'événement $\{\mathcal{X}=2\}$ est composé des événements élémentaires de E_3 auquel on enlève les 4 mots possédant les trois mêmes lettres.
Cet événement est composé de : $16-4=12$ mots.
Ainsi, on a la probabilité :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$$
- Ainsi, la probabilité de ne rien gagner est :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)=1-\frac{3}{16}-\frac{1}{16}=\frac{16-3-1}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

Voici le tableau représentant la loi de probabilité de ce jeu :

k	0	2	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

C.10

1. Cette expérience possède 9 événements élémentaires.

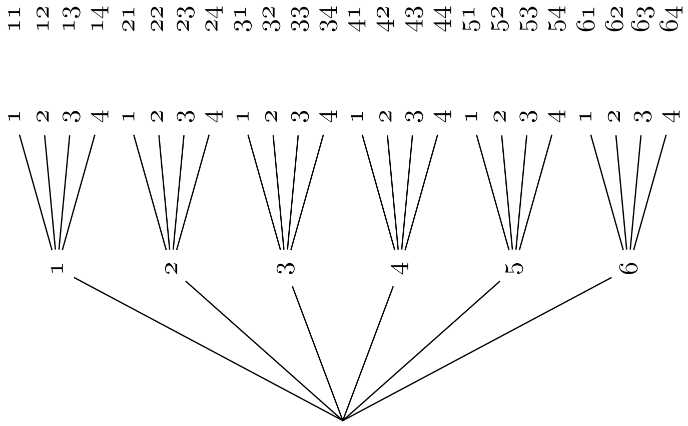
2. a. Il y a 3 événements élémentaires composant l'événement A. On a :
   $\mathcal{P}(A) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

   b. L'événement B est composé de 4 événements élémentaires. On a :
   $\mathcal{P}(B) = \dfrac{4}{9}$

   c. Il y a 6 événements élémentaires réalisant l'événement "*la seconde boule est une boule noire*". Ainsi, on a :
   $\mathcal{P}(C) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

C.11

1. a. Voici l'arbre de choix associé à cette expérience aléatoire :

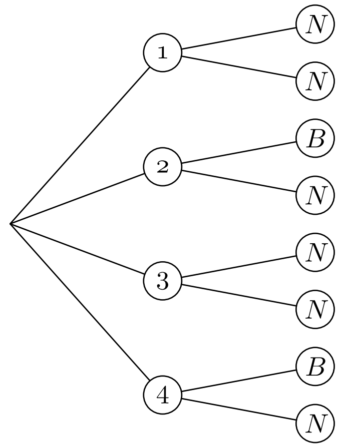


   b. Cet arbre de choix comporte 24 branches.
   - $\mathcal{P}(A) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$
   - $\mathcal{P}(B) = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$

2. Avec ces nouvelles règles, le jeu ne représente plus une situation d'équiprobabilité, car par exemple :
   - L'événement C "*La somme vaut* 2" a pour probabilité :
     $\mathcal{P}(C) = \dfrac{1}{24}$
   - L'événement D "*La somme vaut* 3" a pour probabilité :
     $\mathcal{P}(D) = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$

C.12

1. Voici l'arbre de choix représentant cette situation :

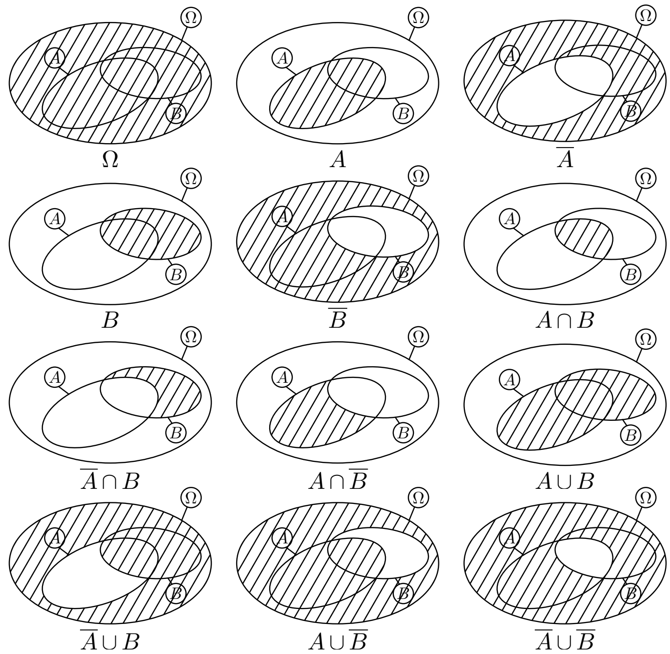


2. D'après les règles de ce jeu, il n'y a que deux couleurs possibles de sorties :
   - soit la couleur de la boule tirée est blanche ;
   - soit la couleur de la boule tirée est noire.

   Ayant 8 sorties possibles, on obtient la loi de probabilité suivante :

X	B	N
$\mathcal{P}(X)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

C.13



C.14

1. Voici le tableau complété :

	Garçons	Filles	Total
Externe	90	123	213
Demi-pension	327	312	639
Total	417	435	852

2. On a les probabilités :

   a. $\mathcal{P}(\overline{G}\cap E) = \dfrac{123}{852}$

   b. $\mathcal{P}(G\cup\overline{E}) = \dfrac{729}{852}$

c $\mathcal{P}\Big(\overline{(G\cup\overline{G})}\Big)=0$

C.15

1 • L'événement A est composé d'un seul événement élémentaire, on en déduit la probabilité de l'événement A:
$\mathcal{P}(A)=\dfrac{1}{6}$

• L'événement B est composé de 3 événements élémentaires. On a la probabilité:
$\mathcal{P}(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

• La moitié des faces du dé représentent un nombre impair:
$\mathcal{P}(C)=\dfrac{1}{2}$

2 a L'événement $A\cup B$ est composé de 3 événements élémentaires:
$\mathcal{P}\big(A\cup B\big)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{6}$

b On a l'égalité: $B\cap C=\{5\}$
On a: $\mathcal{P}\big(B\cap C\big)=\dfrac{1}{6}$

c On a l'égalité: $A\cup\overline{B}=\{1\,;2\,;3\,;5\}$
On en déduit: $\mathcal{P}\big(A\cup\overline{B}\big)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

d On a: $B\cap\overline{C}=\{4\,;6\}$
Ainsi, on en déduit: $\mathcal{P}\big(B\cap\overline{C}\big)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

C.16

1 • Les nombres pairs obtenus par les faces du dé sont:
2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12
Ainsi, on a: $\mathcal{P}(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

• L'événement B est composé des événements élémentaires suivants:
$\big\{9\,;10\,;11\,;12\big\}$
On en déduit la probabilité de l'événement B:
$\mathcal{P}(B)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

• L'événement B est défini par l'ensemble suivant:
$B=\Big\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\Big\}$
On en déduit: $\mathcal{P}(C)=\dfrac{5}{12}$

2 Pour répondre à cette question, il est plus évident de décrire les ensembles demandés pour en donner la probabilité:

a On a:
• $A=\{2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;12\}$ • $B=\{9\,;10\,;11\,;12\}$
On en déduit: $A\cap B=\{10\,;12\}$
On a la probabilité: $\mathcal{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

b On a:
• $\overline{A}=\{1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;11\}$ • $B=\{9\,;10\,;11\,;12\}$
On en déduit: $\overline{A}\cap B=\{9\,;11\}$
On a la probabilité: $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

c On a:
• $B=\{9\,;10\,;11\,;12\}$ • $C=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$
On en déduit: $B\cap C=\{\}=\varnothing$
On a la probabilité: $\mathcal{P}(B\cap C)=0$

d On a:
• $B=\{9\,;10\,;11\,;12\}$ • $C=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$
On en déduit: $B\cup C=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;9\,;10\,;11\,;12\}$
On a la probabilité: $\mathcal{P}(B\cup C)=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$

e On a:
• $B=\{9\,;10\,;11\,;12\}$ • $\overline{C}=\{6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$
On en déduit: $B\cap\overline{C}=\{9\,;10\,;11\,;12\}$
On a la probabilité: $\mathcal{P}(B\cap\overline{C})=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

f On a:
• $A=\{2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;12\}$
• $\overline{C}=\{6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$
On en déduit: $A\cup\overline{C}=\{2\,;4\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$
On a la probabilité: $\mathcal{P}(A\cup\overline{C})=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$

C.17

1 Il y a 6 tirages distincts.

2 a Il y a 2 événements élémentaires vérifiant l'événement A. Ainsi, on a la probabilité suivante:
$\mathcal{P}(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

b Il y a également deux événements élémentaires vérifiant B. On en déduit:
$\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{3}$.

c Il y a 4 événements élémentaires vérifiant l'événement C. On a la probabilité suivante:
$\mathcal{P}(C)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

3 a Il n'est pas possible d'avoir dans ce tirage, qui est sans remise, d'avoir la première et la seconde boule blanche. Ainsi, on a:
$A\cap B=\varnothing \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{P}(A\cap B)=0$

b En remarquant que $A\cap C=A$, on a:
$\mathcal{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{3}$

c Il y a deux événements réalisant l'événement $\overline{C}$:
$\mathcal{P}(\overline{C})=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

C.18

1 a Un jeu de 32 cartes contient 8 cartes de carreaux; on en déduit la probabilité de l'événement A:
$\mathcal{P}(A)=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$

b Il y a quatre as dans le jeu; on en déduit:
$\mathcal{P}(B)=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$

c Il y a 12 figures dans un jeu de 32 cartes. Ainsi, la probabilité de réaliser l'événement C est:
$\mathcal{P}(C)=\dfrac{12}{32}=\dfrac{3}{8}$

d Il y a 16 cartes de couleurs rouges. On a:
$\mathcal{P}(D)=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$

2 a L'événement $A\cap B$ ne contient que la carte "*as de carreau*". On a:
$\mathcal{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{32}$

(b) L'événement $B\cap C$ ne contient aucune carte : c'est l'ensemble vide.
On a : $B\cap C=\varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(B\cap C)=0$

(c) L'événement $B\cup D$ contient les 16 cartes rouges plus les deux as noirs. Donc, au total 18 cartes. La probabilité de cet événement :
$\mathcal{P}(B\cup D)=\dfrac{18}{32}=\dfrac{9}{16}$

C.19 Étant dans une situation d'équiprobabilité, pour déterminer la probabilité d'un événement, il est nécessaire de déterminer le nombre de cartes réalisant chacun des événements demandés.

(1) Déterminons la probabilité des quatre événements demandés.

- Il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes. On en déduit la probabilité de réalisation de l'événement A :
  $\mathcal{P}(A)=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$
- Il y a 16 cartes de couleurs rouges dans ce jeu. On a :
  $\mathcal{P}(B)=\dfrac{16}{32}$
- Il y a 8 cartes de coeurs. On en déduit :
  $\mathcal{P}(C)=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$
- On peut compter dans un jeu de 32 cartes : 12 figures et 20 cartes où figure un nombre *(ici, l'as est considéré comme un 1)* :
  $\mathcal{P}(D)=\dfrac{20}{32}=\dfrac{5}{8}$

(2) Dans cette question, il est conseillé de compter le nombre de cartes *(chaque carte forme un événement élémentaire de ce jeu)* réalisant l'événement recherché ; seules quelques probabilités peuvent être obtenues à l'aide de formules connues par un élève de seconde :

(a) On a :
$\mathcal{P}(\overline{A})=1-\mathcal{P}(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

(b) Il y a 7 cartes qui sont des coeurs et qui ne soient pas un roi :
$\mathcal{P}(\overline{A}\cap C)=\dfrac{7}{32}$

(c) Il y a 1 seule carte qui soit un coeur et qui soit un roi :
$\mathcal{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{32}$

(d) Les cartes qui sont rouges et qui sont des coeurs sont les 8 cartes de coeurs :
$\mathcal{P}(C\cap B)=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$

(e) La réunion des cartes de coeurs et les cartes rouges forment les 16 cartes rouges :
$\mathcal{P}(C\cup B)=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$

(f) La réunion des cartes qui ne sont pas rouges et des cartes qui sont un coeur forment les 24 cartes du jeu :
$\mathcal{P}(\overline{B}\cup C)=\dfrac{24}{32}=\dfrac{3}{4}$

(g) La réunion des cartes qui sont rouges et des cartes qui ne sont pas un coeur forment l'ensemble du jeu :
$\mathcal{P}(B\cup\overline{C})=\dfrac{32}{32}=1$

C.20

(1) (a) Il y a 10 boules portant un nombre pair dans l'urne :
$\mathcal{P}(A)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

(b) Il y a 5 boules rouges :
$\mathcal{P}(B)=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

(c) Il y a 13 boules qui sont rouges ou portant un numéro pair :
$\mathcal{P}(C)=\dfrac{13}{20}$

(d) Il y a seulement 2 boules rouges portant également un numéro pair :
$\mathcal{P}(D)=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$

(2) Deux réponses sont possibles :

- En remarquant l'égalité des événements :
  $A\cup B=C$
  On en déduit :
  $\mathcal{P}\big(A\cup B\big)=\dfrac{13}{20}$ | $\mathcal{P}\big(A\big)+\mathcal{P}\big(B\big)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$
  On a la comparaison : $\mathcal{P}\big(A\cup B\big)\neq\mathcal{P}\big(A\big)+\mathcal{P}\big(B\big)$
- Il existe 2 boules rouges portant un numéro pair :
  $\mathcal{P}\big(D\big)=\dfrac{1}{2}$
  De plus, on a l'égalité des événements : $D=A\cap B$
  On a :
  $$\mathcal{P}\big(A\cap B\big)>0$$
  $$-\mathcal{P}\big(A\cap B\big)<0$$
  $$\mathcal{P}\big(A\big)+\mathcal{P}\big(B\big)-\mathcal{P}\big(A\cap B\big)<\mathcal{P}\big(A\big)+\mathcal{P}\big(B\big)$$
  D'après la formule de la probabilité de l'union :
  $$\mathcal{P}\big(A\cup B\big)<\mathcal{P}\big(A\big)+\mathcal{P}\big(B\big)$$

Cette inégalité est donc fausse.

On a : $\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

Or, en remarquant l'égalité $A\cup B=C$, on a :
$\mathcal{P}\big(A\cup B\big)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)$