Seconde - Chapitre 10

C.1

(a) Déterminons la valeur des deux membres de l'équation pour $x=2$:
- $3x+1 = 3\times2+1 = 6+1 = 7$
- $2x-1 = 2\times2-1 = 4-1 = 3$

Les deux membres ont des valeurs différentes lorsqu'on les évalue en 2. On en déduit que 2 n'est pas solution de l'équation.

(b) On a les deux valeurs suivantes :
- $3(x+1)-3(2-x) = 3(2+1)-3(2-2) = 3\times3-0 = 9$
- $x+1 = 2+1 = 3$

On en déduit que 2 n'est pas solution de cette équation.

(c) Le membre de gauche prend la valeur pour $x=2$:
$$\frac{2x+1}{3x+4} = \frac{2\times2+1}{3\times2+4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
2 est solution de l'équation.

(d) Le membre de gauche a pour valeur :
$$\sqrt{3x^2+4} = \sqrt{3\times2^2+4} = \sqrt{3\times4+4}$$
$$= \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$
2 est solution de l'équation.

C.2

(a) Pour $x=2$, on a :
- $3x+1 = 3\times2+1 = 6+1 = 7$
- $4x = 4\times2 = 8$

(b) Pour $x=1$, on a :
- $(x+1)^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$
- $x^2+1 = 1^2+1 = 1+1 = 2$

(c) Prenons $x=1$ et $y=1$:
- $(x+y)^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$
- $x^2+y^2 = 1^2+1^2 = 1+1 = 2$

(d) Pour $x=1$ et $y=1$, on a :
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{1}+\frac{1}{1} = 1+1 = 2$
- $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

(e) Pour $x=1$ et $y=1$, on a :
- $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $x+y = 1+1 = 2$

C.3

(a) On a l'égalité suivante :
$$\begin{aligned}
3x+5 &= 5x+8\\
3x+5-5 &= 5x+8-5\\
3x &= 5x+3\\
3x-5x &= 5x+3-5x\\
-2x &= 3\\
\frac{-2x}{-2} &= \frac{3}{-2}\\
x &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$
La solution de l'équation est $-\frac{3}{2}$.

(b) On a l'égalité suivante :
$$\begin{aligned}
5-3x &= 2x+13\\
5-3x-5 &= 2x+13-5\\
-3x &= 2x+8\\
-3x-2x &= 2x+8-2x\\
-5x &= 8\\
\frac{-5x}{-5} &= \frac{8}{-5}\\
x &= -\frac{8}{5}
\end{aligned}$$
La solution de l'équation est $-\frac{8}{5}$.

(c) On a l'égalité suivante :
$$\begin{aligned}
6x-2 &= x-6\\
6x-2+2 &= x-6+2\\
6x &= x-4\\
6x-x &= x-4-x\\
5x &= -4\\
\frac{5x}{5} &= \frac{-4}{5}\\
x &= -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$
La solution de l'équation est $-\frac{4}{5}$.

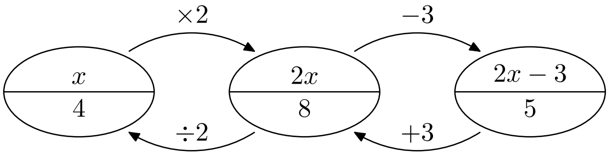
(d) On a l'égalité suivante :
$$\begin{aligned}
-8x-3 &= -3x-6\\
-8x-3+3 &= -3x-6+3\\
-8x &= -3x-3\\
-8x+3x &= -3x-3+3x\\
-5x &= -3\\
\frac{-5x}{-5} &= \frac{-3}{-5}\\
x &= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$
La solution de l'équation est $\frac{3}{5}$.

C.4

(1) Voici un tableau présentant le programme de calcul pour les trois nombres demandés :

Nombre de départ	5	0	-2
Multiplier par 2	10	0	-4
Soustraire 3 Nombre final	7	-3	-7

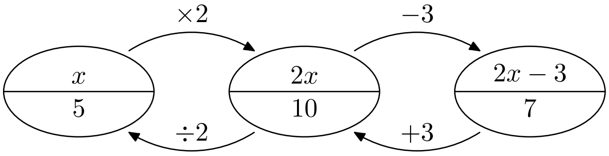
2 a En complétant le diagramme proposé, on obtient :



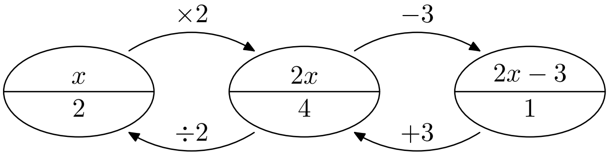
Ainsi, pour obtenir 5, le nombre de départ était 4

b Recherchons le nombre départ :

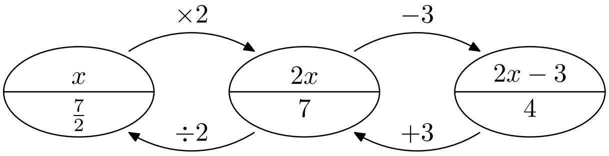
- Si 7 est le nombre d'arrivée, alors le nombre de départ est 5 :



- Si 1 est le nombre d'arrivé, alors le nombre de départ est 2 :

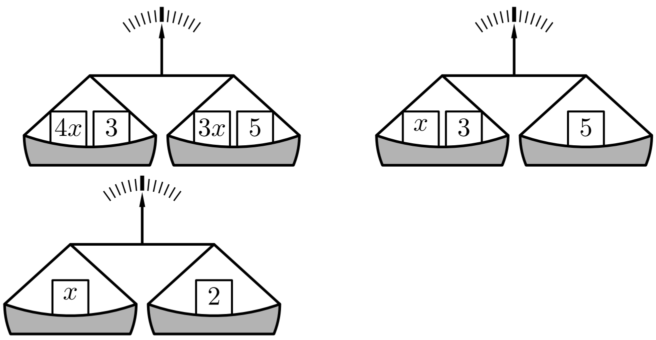


- Si 4 est le nombre d'arrivée, alors le nombre de départ est $\dfrac{7}{2}$:

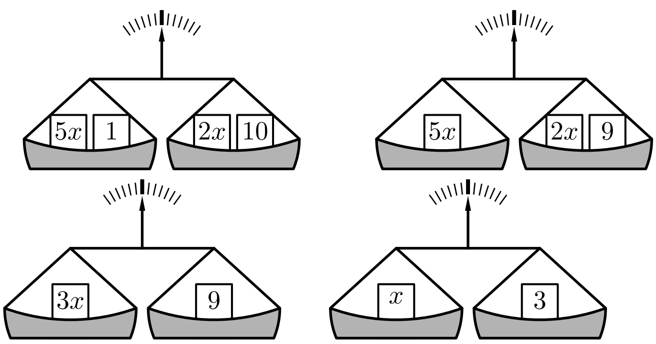


C.5 Voici les résolutions de ces équations :

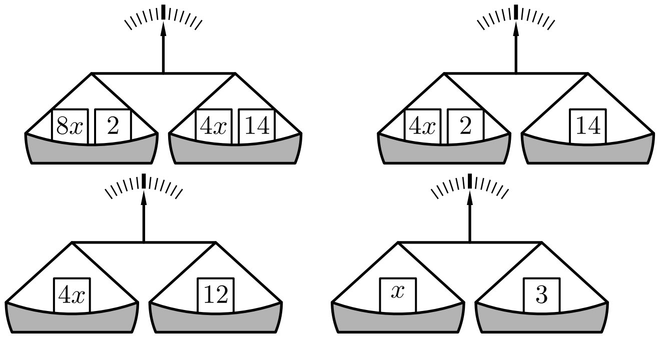
a La découverte de la valeur de x peut s'effectuer en trois manipulations :



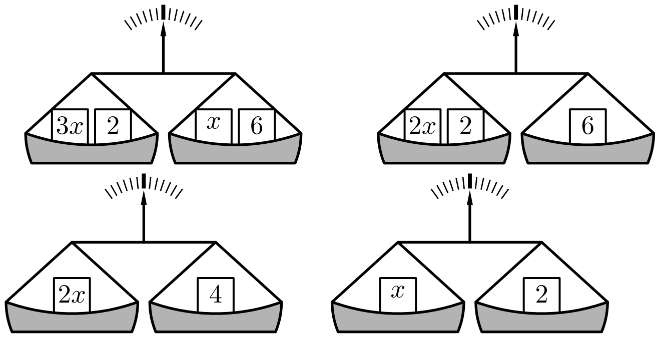
b La découverte de la valeur de x peut s'effectuer en trois manipulations :



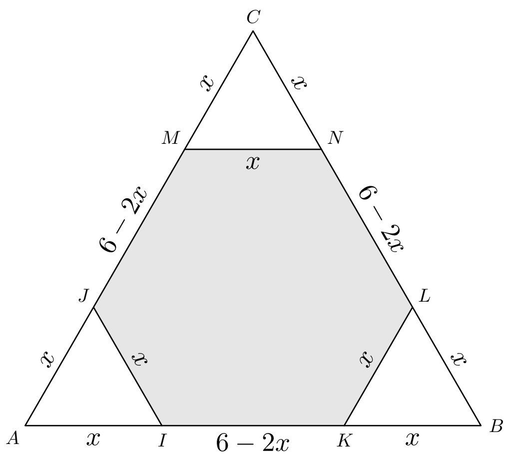
c La découverte de la valeur de x peut s'effectuer en trois manipulations :



d La découverte de la valeur de x peut s'effectuer en trois manipulations :



C.6



- Les trois triangles équilatéraux AIJ, BKL et CMN ont un périmètre total égal à :
  $(x+x+x)+(x+x+x)+(x+x+x)=9x$
- L'hexagone $IJMNLK$ a pour périmètre :
  $x+(6-2x)+x+(6-2x)+x+(6-2x)=18-3x$

Pour que la somme des périmètres des trois petits triangles soit égale au périmètre de l'hexagone gris restant, il faut que la longueur x vérifie l'égalité :

$$\begin{aligned}
9x &= 18-3x\\
9x+3x &= 18\\
12x &= 18\\
x &= \frac{18}{12}\\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, la mesure du côté des petits triangles est 1,5 cm.

C.7

a L'équation $x^2=2$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\}$

(b) L'équation $x^2=0$ admet pour ensemble de solutions : $\mathcal{S}=\{0\}$

(c) L'équation $x^2=-1$ admet pour ensemble de solutions : $\mathcal{S}=\varnothing$

C.8

(1) (a) $$\begin{aligned}&(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)\\&=(3x+2)(2x-1)+\big[2(2x-1)\big](3-5x)\\&=(3x+2)(2x-1)+2(2x-1)(3-5x)\\&=(2x-1)\big[(3x+2)+2(3-5x)\big]\\&=(2x-1)(3x+2+6-10x)\\&=(2x-1)(-7x+8)\end{aligned}$$

(b) L'équation devient :
$$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)=0$$
$$(2x-1)(-7x+8)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} 2x-1=0 & -7x+8=0\\ 2x=1 & -7x=-8\\ x=\dfrac{1}{2} & x=\dfrac{-8}{-7}\\ & x=\dfrac{8}{7}\end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{8}{7}\right\}$

(2) (a) $$\begin{aligned}&(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)\\&=(2x+1)\big[-(2x-3)\big]-(3x-2)(2x-3)\\&=(2x-3)\big[-(2x+1)-(3x-2)\big]\\&=(2x-3)(-2x-1-3x+2)\\&=(2x-3)(-5x+1)\end{aligned}$$

(b) Cette équation peut s'écrire :
$$(2x+1)(3-2x)=(3x-2)(2x-3)$$
$$(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)=0$$
$$(2x-3)(-5x+1)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} 2x-3=0 & -5x+1=0\\ 2x=3 & -5x=-1\\ x=\dfrac{3}{2} & x=\dfrac{-1}{-5}\\ & x=\dfrac{1}{5}\end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{5}\,;\,\dfrac{3}{2}\right\}$

C.9

(1) $$\begin{aligned}(x+2)(3-x)+2(x-3)(2x-5)&=0\\(x+2)\big[-(x-3)\big]+2(x-3)(2x-5)&=0\\-(x+2)(x-3)+2(x-3)(2x-5)&=0\\(x-3)\big[-(x+2)+2(2x-5)\big]&=0\\(x-3)(-x-2+4x-10)&=0\\(x-3)(3x-12)&=0\end{aligned}$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} x-3=0 & 3x-12=0\\ x=3 & 3x=12\\ & x=\dfrac{12}{3}\\ & x=4\end{array}$$

Cette équation a pour ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\{3\,;\,4\}$

(2) $$\begin{aligned}(6-2x)(3x+2)&=(3x-9)(x+2)\\(6-2x)(3x+2)-(3x-9)(x+2)&=0\\\big[-2(x-3)\big](3x+2)-\big[3(x-3)\big](x+2)&=0\\-2(x-3)(3x+2)-3(x-3)(x+2)&=0\\(x-3)\big[-2(3x+2)-3(x+2)\big]&=0\\(x-3)(-6x-4-3x-6)&=0\\(x-3)(-9x-10)&=0\end{aligned}$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} x-3=0 & -9x-10=0\\ x=3 & -9x=10\\ & x=-\dfrac{10}{9}\end{array}$$

Cette équation a pour ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{10}{9}\,;\,3\right\}$

C.10

(a) $$\begin{aligned}(3x-1)(2x+2)+3(5-2x)(x+1)&=0\\(3x-1)\big[2(x+1)\big]+3(5-2x)(x+1)&=0\\2(3x-1)(x+1)+3(5-2x)(x+1)&=0\\(x+1)\big[2(3x-1)+3(5-2x)\big]&=0\\(x+1)(6x-2+15-6x)&=0\\(x+1)13&=0\\13(x+1)&=0\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de cette équation est $\{-1\}$.

(b) $$\begin{aligned}3(5x+1)(2-3x)+(6x-4)(x-1)&=0\\3(5x+1)(2-3x)+\big[-2(2-3x)\big](x-1)&=0\\3(5x+1)(2-3x)-2(2-3x)(x-1)&=0\\(2-3x)\big[3(5x+1)-2(x-1)\big]&=0\\(2-3x)(15x+3-2x+2)&=0\\(2-3x)(13x+5)&=0\end{aligned}$$
Un produit est nul, si et seulement si, au moins un des facteurs est nul. On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{5}{13}\,;\,\dfrac{2}{3}\right\}$

(c) $$\begin{aligned}(4x+6)(1-2x)&=5(2x+3)^2\\(4x+6)(1-2x)-5(2x+3)^2&=0\\\big[2(2x+3)\big](1-2x)-5(2x+3)^2&=0\\2(2x+3)(1-2x)-5(2x+3)^2&=0\\(2x+3)\big[2(1-2x)-5(2x+3)\big]&=0\\(2x+3)(2-4x-10x-15)&=0\\(2x+3)(-14x-13)&=0\end{aligned}$$

Un produit est nul, si et seulement si, au moins un des facteurs est nul. On en déduit que l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{13}{14}\right\}$

C.11

1. La valeur de la variable x doit appartenir à l'intervalle $]0\,;6[$.

Car une longueur ne peut être négative et si la valeur de x dépassait 6 alors il n'y aurait plus d'aire de jeu.

2. a. L'aire de jeu a pour longueur $16-2x$ et pour largeur $12-2x$; ainsi, l'aire de jeu a pour aire :
$(16-2x)(12-2x) = 192-32x-24x+4x^2$
$= 4x^2-56x+192$

b. L'aire totale de ce terrain vaut : $16\times12 = 192\,m^2$
L'aire de l'allée se calcule via :
$192-\big(4x^2-56x+192\big) = 192-4x^2+56x-192$
$= -4x^2+56x$

3. a. On a les manipulations algébriques suivantes :
$8(x-12)(x-2) = (8x-96)(x-2)$
$= 8x^2-16x-96x+192 = 8x^2-112x+192$

b. Chercher les valeurs de x pour lesquelles l'aire de l'allée sera égale à celle de l'aire de jeu revient à résoudre l'équation suivante :
$$4x^2-56x+192 = 56x-4x^2$$
$$4x^2-56x+192-56x+4x^2 = 0$$
$$8x^2-112x+192 = 0$$
$$8(x-12)(x-2) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x-12=0$	$x-2=0$
$x=12$	$x=2$

Les solutions de cette équation sont : $\mathscr{S} = \big\{2\big\}$

C.12

1. On a les transformations algébriques :

- $\big(x+5\big)\big(4x-1\big)-10x-8 = 4x^2-x+20x-5-10x-8 = 4x^2+9x-13$
- $\big(x-1\big)\big(4x+13\big) = 4x^2+13x-4x-13 = 4x^2+9x-13$

Nous venons d'établir la factorisation :
$\big(x+5\big)\big(4x-1\big)-10x-8 = (x-1)(4x+13)$

2. a. Pour que les nombres $x+5$ et $4x-1$ représentent les dimensions du rectangle, il faut que :
$x+5\geqslant0$; $4x-1\geqslant0$
On en déduit que $x\geqslant\dfrac{1}{4}$.

b.
- Le périmètre a pour expression :
$2\times\big(x+5\big)+2\times\big(4x-1\big) = 2x+10+8x-2 = 10x+8$
- L'aire a pour expression :
$\big(x+5\big)\big(4x-1\big) = 4x^2-x+20x-5$

Pour déterminer les valeurs de x réalisant l'égalité du périmètre et de l'aire du rectangle $ABCD$, nous allons résoudre l'équation :
$$\mathcal{A} = \mathcal{P}$$
$$\big(x+5\big)\big(4x-1\big) = 10x+8$$
$$\big(x+5\big)\big(4x-1\big)-10x-8 = 0$$
$$\big(x-1\big)\big(4x+13\big) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x-1=0$	$4x+13=0$
$x=1$	$4x=-13$
	$x=-\dfrac{13}{4}$

C.13

1. La variable x représente une longueur : elle est donc positive.
Elle ne peut être nulle, car sinon l'allée n'existerait pas.

La valeur de x ne peut pas dépasser la largeur du jardin, car elle représente la largeur de l'allée construite dans le jardin.
Elle ne peut valoir 15 sinon il n'y aura plus de jardin.

Ainsi, la variable x appartient à l'intervalle $]0\,;15[$

2. a. L'allée horizontale a pour aire : $20\times x$
L'allée verticale a pour aire : $15\times x$
En faisant la somme de ces deux aires, on compte deux fois le carré intersection des deux allées.
Ainsi, les allées ont une aire totale de :
$20x+15x-x^2 = 35x-x^2$

b. Pour déterminer l'aire du gazon, soustrayons à l'aire totale du jardin celle des allées :
$15\times20-(35x-x^2) = 300-35x+x^2$
$= x^2-35x+300$

3. a. En développons le membre de droite de cette égalité, on a :
- le terme du second degré sera : $a{\cdot}x^2$
- le terme numérique s'obtiendra par : $-30b$

En identifiant ces termes avec ceux du membre de gauche, on choisit les valeurs suivantes :
$a=2$; $b=-10$
Développons le membre de droite :
$(x-30)(2x-10) = 2x^2-10x-60x+300$
$= 2x^2-70x+300$
On vient d'établir la factorisation recherchée.

b. Pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du gazon sera celle des allées, nous allons résoudre l'équation suivante :
$$x^2-35x+300 = 35x-x^2$$
$$x^2-35x+300-35x+x^2 = 0$$
$$2x^2-70x+300 = 0$$
D'après la question précédente, on a la factorisation :
$$(x-30)(2x-10) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x-30=0$	$2x-10=0$
$x=30$	$2x=10$
	$x=\dfrac{10}{2}$
	$x=5$

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathscr{S} = \big\{5\,;\,30\big\}$
Mais, puisque la variable x est comprise dans l'intervalle $]0\,;\,15[$, l'architecte ne possède comme unique solution que de choisir $5\,m$ comme largeur d'allées.

4. a. Pour établir l'égalité procédons par le développe-

ment suivant :
$(x-4)(23x-665) = 23x^2 - 665x - 92x + 2660$
$= 23x^2 - 757x + 2660$

b La longueur de la clôture est :
$4\times\left(\frac{20-x}{2} + \frac{15-x}{2}\right) = 40x - 2x + 30 - 2x$
$= 70 - 4x$

Le prix de l'aménagement de ce jardin se calcule par :
$\mathcal{P} = 30\times(35x - x^2) + 7\times(x^2 - 35x + 300) + 12\times(70-4x)$
$= 1050x - 30x^2 + 7x^2 - 245x + 2100 + 840 - 48x$
$= -23x^2 + 757x + 2940$

Le prix total de l'aménagement du jardin étant de 5600 €, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= 5\,600\\ -23x^2 + 757x + 2\,940 &= 5\,600\\ -23x^2 + 757x + 2\,940 - 5\,600 &= 0\\ -23x^2 + 757x - 2\,660 &= 0\\ -\left(23x^2 - 757x + 2\,660\right) &= 0\end{aligned}$$

D'après la factorisation de la question précédente

$$-(x-4)(23x-665) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$$\begin{array}{r|r} x-4=0 & 23x-665=0\\ x=4 & 23x=665\\ & x=\dfrac{665}{23}\end{array}$$

Cette équation possède pour solution : 4 et $\frac{665}{23}$.

La valeur de $\frac{665}{23}$ n'appartient à l'intervalle $]0\,;15[$: ainsi, l'architecte, pour respecter le prix d'aménagement du jardin, doit prendre une largeur d'allée de $4\,m$.

C.14

a

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} - \frac{3}{2x-1} &= 0\\ \frac{2(2x-1)}{(x+1)(2x-1)} - \frac{3(x+1)}{(2x-1)(x+1)} &= 0\\ \frac{(4x-2)-(3x+3)}{(x+1)(2x-1)} &= 0\\ \frac{4x-2-3x-3}{(x+1)(2x-1)} &= 0\\ \frac{x-5}{(x+1)(2x-1)} &= 0\end{aligned}$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :
$x-5=0$
$x=5$

On a l'ensemble des solutions de cette équation :
$\mathcal{S} = \{5\}$.

Remarque : l'ensemble de résolution de cette équation est : $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{-1\,;\,\frac{1}{2}\right\}$

b

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{4x+1} - \frac{3x}{6x-1} &= 0\\ \frac{(2x-1)(6x-1)}{(4x+1)(6x-1)} - \frac{3x(4x+1)}{(6x-1)(4x+1)} &= 0\\ \frac{(12x^2-2x-6x+1)-(12x^2+3x)}{(4x+1)(6x-1)} &= 0\\ \frac{12x^2-8x+1-12x^2-3x}{(4x+1)(6x-1)} &= 0\\ \frac{-11x+1}{(4x+1)(6x-1)} &= 0\end{aligned}$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :
$-11x+1=0$
$-11x=-1$
$x=\frac{-1}{-11}$
$x=\frac{1}{11}$

On a l'ensemble des solutions de cette équation :
$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{11}\right\}$.

Remarque : l'ensemble de résolution de cette équation est : $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{6}\right\}$

C.15 On a les transformations algébriques :

$$\begin{aligned}\frac{4x}{2x+1} - \frac{2x-3}{x+1} &= 0\\ \frac{4x\cdot(x+1)}{(2x+1)(x+1)} - \frac{(2x-3)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)} &= 0\\ \frac{4x^2+4x}{(x+1)(2x+1)} - \frac{4x^2+2x-6x-3}{(x+1)(2x+1)} &= 0\\ \frac{(4x^2+4x)-(4x^2+2x-6x-3)}{(x+1)(2x+1)} &= 0\\ \frac{4x^2+4x-4x^2-2x+6x+3}{(x+1)(2x+1)} &= 0\\ \frac{8x+3}{(x+1)(2x+1)} &= 0\end{aligned}$$

Si un produit est nul alors son numérateur est nul :
$8x+3=0$
$8x=-3$
$x=\frac{-3}{8}$
$x=-\frac{3}{8}$

Cette équation a une unique solution : $-\frac{3}{8}$

C.16

(a)
$$\frac{2x}{4x+1} = \frac{x+1}{2x-1}$$
$$\frac{2x}{4x+1} - \frac{x+1}{2x-1} = 0$$
$$\frac{2x(2x-1)}{(4x+1)(2x-1)} - \frac{(x+1)(4x+1)}{(2x-1)(4x+1)} = 0$$
$$\frac{(4x^2-2x)-(4x^2+x+4x+1)}{(4x+1)(2x-1)} = 0$$
$$\frac{4x^2-2x-4x^2-5x-1}{(4x+1)(2x-1)} = 0$$
$$\frac{-7x-1}{(4x+1)(2x-1)} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul.
$$-7x-1=0$$
$$-7x=1$$
$$x=\frac{1}{-7}$$
$$x=-\frac{1}{7}$$

On a l'ensemble des solutions de cette équation :
$\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{7}\right\}$.

Remarque : l'ensemble de résolution de cette équation est : $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right\}$

(b)
$$\frac{1-x}{2-x} = \frac{x+3}{x-1}$$
$$\frac{(1-x)(x-1)}{(2-x)(x-1)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(2-x)(x-1)} = 0$$
$$\frac{(x-1-x^2+x)-(2x-x^2+6-3x)}{(2-x)(x-1)} = 0$$
$$\frac{-x^2+2x-1+x^2+x-6}{(2-x)(x-1)} = 0$$
$$\frac{3x-7}{(2-x)(x-1)} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :
$$3x-7=0$$
$$3x=7$$
$$x=\frac{7}{3}$$

On a l'ensemble des solutions de cette équation :
$\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{3}\right\}$.

Remarque : l'ensemble de résolution de cette équation est : $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\,;\,2\}$

C.17

(1) La fonction f admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

(2) La fonction g admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

C.18

(1) (a) Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	

(b) Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

(2) (a) "*$h(-5)$ est positif*" est fausse, car $f(-5)$ et $h(-5)$ sont de signes contraires.

(b) "*$h(-1)$ est positif*" est fausse, car $f(-1)$ et $h(-1)$ sont de signes contraires.

(c) "*$h(1)$ est positif*" est vraie, car $f(1)$ et $h(1)$ sont de même signe.

(d) "*$h(3{,}2)$ est positif*" est vraie, car $f(3{,}2)$ et $h(3{,}2)$ sont de signes contraires

C.19 Résolvons l'inéquation suivante :

$$g(x)\geqslant 0$$
$$-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\geqslant 0$$
$$-\frac{1}{2}x\geqslant -\frac{2}{3}$$
$$x\leqslant\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}}$$
$$x\leqslant\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}$$
$$x\leqslant\frac{4}{3}$$

Voici le tableau de signes de la fonction g :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

C.20

(a) 9 n'est pas solution de l'inéquation $-3x+2\geqslant 0$ car :
$-3\times 9+2=-27+2=-25$

(b) 9 est solution de l'inéquation $5\cdot(x+9)>0$ car :
$5\cdot(9+9)=5\times 18=90$

(c) 9 est solution de l'équation car :
- $\frac{9+1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
- $-3\times\frac{9-2}{3}=-7$

(d) 9 n'est pas solution de l'inéquation de $2>x$.

C.21

(a)
$$-3x+7\leqslant x+2$$
$$-4x\leqslant -5$$
$$x\geqslant\frac{-5}{-4}$$
$$x\geqslant\frac{5}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

(b) $-6x+1>0$

$-6x>-1$

$x<\dfrac{-1}{-6}$

$x<\dfrac{1}{6}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{6}\right[$.

(c) $-\dfrac{x}{4}<5$

$(-4)\times\left(-\dfrac{x}{4}\right)>(-4)\times5$

$x>-20$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-20\,;+\infty[$.

(d) $-3(x+5)<x+5$

$-3x-15<x+5$

$-4x<20$

$x>\dfrac{20}{-4}$

$x>-5$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-5\,;+\infty[$.

(e) $-3x+7\leqslant 9-x$

$-2x+7\leqslant 9$

$-2x\leqslant 2$

$x\geqslant\dfrac{2}{-2}$

$x\geqslant -1$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

C.22

(1) Résolvons l'inéquation :

$3x+3\geqslant 1$

$3x\geqslant 1-3$

$3x\geqslant -2$

$x\geqslant -\dfrac{2}{3}$

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

(2) Résolvons l'inéquation :

$\dfrac{3x-1}{4}\leqslant -1$

$4\times\dfrac{3x-1}{4}\leqslant 4\times(-1)$

$3x-1\leqslant -4$

$3x\leqslant -4+1$

$3x\leqslant -3$

$x\leqslant -1$

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;-1\right]$

C.23

(a) $\dfrac{x+1}{2}+x<0$

$2\cdot\left(\dfrac{x+1}{2}+x\right)<2\times0$

$x+1+2\cdot x<0$

$3x+1<0$

$3x<-1$

$x<-\dfrac{1}{3}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[$

(b) $\dfrac{x-2}{-4}<x+1$

$-4\cdot\left(\dfrac{x-2}{-4}\right)>-4\cdot(x+1)$

$x-2>-4x-4$

$x+4x>-4+2$

$5x>-2$

$x>-\dfrac{2}{5}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$

C.24

(1)

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x+1)(3+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(2)

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)(4x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

C.25

(1)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(2)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

C.26

(1) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(2) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(2x+4)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(3) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	

C.27

(1)

x	$-\infty$		-5		-4		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x-8$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+5}{-2x-8}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

(2)

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{(x-1)(4-x)}{-x-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

C.28

(1)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

(2)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		1		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

C.29

(a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+4)(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'inéquation $(x+4)(1-2x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left[-4\,;\frac{1}{2}\right]$

(b) L'expression du membre de gauche est donnée sous la forme d'un produit. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3+x)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-3\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$

C.30

(a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-2x)(5x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi l'inéquation $(3-2x)(5x+2) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left[-\frac{2}{5}\,;\frac{3}{2}\right]$

(b) Pour résoudre cette inéquation, on construit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+1)(4-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'inéquation $(3x+1)(4-2x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}\,;2\right]$

C.31

(1) $(2x+1)(x-1) = 2x^2-2x+x-1 = 2x^2-x-1$

(2) À l'aide du développement précédent, on a les équivalences :

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2+1} \leqslant 0$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2+1} \leqslant 0$$

Le dénominateur du membre de gauche est strictement positif car :

$x^2 \geqslant 0$

$x^2+1 \geqslant 1 > 0$

Ainsi, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x^2+1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'inéquation $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+1} \leqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}\,;1\right]$

C.32 On a la factorisation suivante :

$$\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x+2}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'équation $\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$ admet pour solution d'après le tableau de signes l'ensemble suivant :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-1\,;1\right[$

C.33

1. a. On a : $D \in [BA]$; $E \in [BC]$; $(DE)/\!\!/(AC)$

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes de quotients de longueurs :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

Utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{x}{9} = \frac{DE}{4}$$

D'après le produit en croix, on a :

$x \times 4 = 9 \times DE$

$DE = \dfrac{4x}{9}$

$DEFA$ est un rectangle.

Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés sont de même longueur.

On en déduit : $AF = DE = \dfrac{4}{9}\cdot x$

b. x représente une distance : c'est un nombre strictement positif.

D est un point de $[AB]$, ainsi la longueur BD est inférieure à BA.

2. L'aire du rectangle $DEFA$ admet pour expression en fonction de x :

$\mathcal{A}(x) = L \times \ell = (9-x) \times \dfrac{4}{9}\cdot x = 4\cdot x - \dfrac{4}{9}\cdot x^2$

3. a. Ainsi, l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x est un polynôme du second degré. Il admet les valeurs particulières suivantes :

- $f(0) = 4\times 0 - \dfrac{4}{9}\times 0^2 = 0$
- $f(9) = 4\times 9 - \dfrac{4}{9}\times 9^2 = 36-36 = 0$
- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times\dfrac{4}{9}} = \dfrac{4}{\dfrac{8}{9}} = 4\times\dfrac{9}{8} = \dfrac{9}{2}$
- $f\left(\dfrac{9}{2}\right) = 4\times\dfrac{9}{2} - \dfrac{4}{9}\times\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 = 18-9 = 9$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant strictement négatif, la fonction $\mathcal{A}$ admet le tableau de variations suivant sur l'intervalle $[0\,;9]$.

x	0		$\frac{9}{2}$		9
Variation de f	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	0

b. x appartenant à l'intervalle $[0\,;9]$, on en déduit d'après le tableau de variations précédent que l'aire est maximale pour $x = \dfrac{9}{2}$.

4. a. On a le développement suivant :

$(2x-15)(3-2x) = 6x - 4x^2 - 45 + 30x$

$= -4x^2 + 36x - 45$

b. Résolvons l'équation suivante :

$$\mathcal{A}(x) \geqslant 5$$

$$4\cdot x - \frac{4}{9}\cdot x^2 \geqslant 5$$

$$-\frac{4}{9}\cdot x^2 + 4\cdot x - 5 \geqslant 0$$

$$\frac{1}{9}\cdot\left(-4\cdot x^2 + 36\cdot x - 45\right) \geqslant 0$$

$$-4\cdot x^2 + 36\cdot x - 45 \geqslant 0$$

La question précédente permet d'effectuer la factorisation suivante :

$$(2x-15)(3-2x) \geqslant 0$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$\frac{15}{2}$		9		$+\infty$
$2x-15$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\mathcal{A}-5$				$-$	0	$+$	0	$-$			

C.34

1. a. La largeur du carton est de $41\,cm$. Ainsi, on a la relation :

$$\begin{aligned} 1+x+y+x+1 &= 41 \\ y+2x+2 &= 41 \\ y &= 41-2x-2 \\ y &= 39-2x \end{aligned}$$

(b) x représentant une longueur, on en déduit que x représente un nombre positif.
Pour que le patron représente un parallélépipède rectangle, il faut également que x soit un nombre non nul.

Le nombre y représente également une longueur de cette boîte, il est également nécessaire que ce nombre soit strictement positif :

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ 39-2x &> 0 \\ -2x &> -39 \\ x &< \frac{-39}{-2} \\ x &< 19{,}5 \end{aligned}$$

On en déduit que la variable x appartient à l'intervalle :
$x \in \left]0\,;19{,}5\right[$

(2) Ce pavé droit a pour dimensions : y pour longueur, x pour largeur et x pour hauteur. Ainsi, le volume d'une de ses boites a pour volume :
$\mathcal{V} = L\times\ell\times h = y\times x\times x = (39-2x)\cdot x^2 = 39\cdot x^2 - 2\cdot x^3$

(3) (a) Pour que l'égalité soit vérifiée, il faut que le polynôme P soit de degré 1 afin que le membre de gauche soit, comme celui de droite, de degré 3.

Ainsi, le polynôme P admet une expression de la forme $a{\cdot}x{+}b$. Développons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (x-18)(x-6)\times P &= \left(x^2-6{\cdot}x-18{\cdot}x+108\right)\left(a{\cdot}x+b\right) \\ &= \left(x^2-6{\cdot}x-18{\cdot}x+108\right)\left(a{\cdot}x+b\right) \\ &= \left(x^2-24{\cdot}x+108\right)\left(a{\cdot}x+b\right) \\ &= a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2-24a{\cdot}x^2-24b{\cdot}x+108a{\cdot}x+108b \\ &= a{\cdot}x^3+(b-24a){\cdot}x^2+(108a-24b){\cdot}x+108b \end{aligned}$$

Par identification des coefficients des termes de même degré, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned} a &= -2 \\ b-24a &= 39 \\ 108a-24b &= 0 \\ 108b &= -972 \end{aligned}\right.$$

On montre facilement que ce système admet pour unique solution, le couple de valeurs suivant :
$a=-2 \quad ; \quad b=-9.$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante :
$39x^2-2x^3-972 = (x-18)(x-6)(-2x-9)$

(b) Pour savoir les valeurs de x pour lesquelles la boîte a un volume supérieur ou égal à $392\,cm^3$, il faut résoudre l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x) &\geqslant 972 \\ 39x^2-2x^3-972 &\geqslant 0 \\ (x-18)(x-6)(-2x-9) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		6		18		$+\infty$
$x-18$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x-9$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$39x^2-2x^3-972$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dans ce problème, la variable x appartient à l'intervalle $\left]0\,;19{,}5\right[$. Ainsi, d'après le tableau de signes précédent, le volume de la boîte est supérieur ou égal à $972\,cm^3$ sur l'intervalle :
$\mathcal{S} = \left[6\,;18\right]$.

(4) (a) On a l'expression : $\mathcal{V}(x)-2197 = 39x^2-2x^3-2197$

Ainsi, le polynôme Q doit être un polynôme du second degré. Utilisons la notation :
$Q = a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c \quad$ où a, b, $c\in\mathbb{R}$

On a le développement suivant :

$$\begin{aligned} (-2x-13)\times Q &= (-2x-13)\times\left(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\right) \\ &= -2a{\cdot}x^3-2b{\cdot}x^2-2c{\cdot}x-13a{\cdot}x^2-13b{\cdot}x-13c \\ &= -2a{\cdot}x^3+(-2b-13a){\cdot}x^2+(-2c-13b){\cdot}x-13c \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned} -2a &= -2 \\ -2b-13a &= 39 \\ -2c-13b &= 0 \\ -13c &= -2197 \end{aligned}\right.$$

Ce système admet le triplet de solutions suivant :
$a=1 \quad ; \quad b=-26 \quad ; \quad c=169$

On obtient l'égalité suivante :
$\mathcal{V}-2197 = (-2x-13)(x^2-26x+169)$

(b) On a les manipulations algébriques suivantes :
$\mathcal{V}-2197 = (-2x-13)(x^2-26x+169)$

On remarque la factorisation suivante :
$= (-2x-13)(x-13)^2$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{13}{2}$		13		$+\infty$
$-2x-13$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-13)^2$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$(-2x-13)(x-13)^2$		$+$	0	$-$	0	$-$	

La variable x appartient à l'intervalle $\left]0\,;19{,}5\right[$. Ainsi, on a le tableau de signes suivant :

x	0		13		$19{,}5$
$\mathcal{V}(x)-2197$		$-$	0	$-$	

(c) Ainsi, l'expression $\mathcal{V}(x){-}2197$ prend pour valeur maximale 0 pour $x{=}13$.

Des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}-2197 &\leqslant 0 \\ \mathcal{V} &\leqslant 2197 \end{aligned}$$

On en déduit que le volume est maximal pour $x{=}13$; alors ces boites ont alors pour volume $2\,197\,cm^3$.