Seconde - Chapitre 10

E.1 Dire si les équations suivantes acceptent pour solution $x=2$:

(a) $3x+1=2x-1$ (b) $3(x+1)-3(2-x)=x+1$

(c) $\dfrac{2x+1}{3x+4}=\dfrac{1}{2}$ (d) $\sqrt{3x^2+4}=4$

E.2 Au travers de contre-exemple, montrer que les égalités suivantes sont fausses :

(a) $3x+1=4x$ (b) $(x+1)^2=x^2+1$

(c) $(x+y)^2=x^2+y^2$ (d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$

(e) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

E.3 Résoudre les équations suivantes :

(a) $3x+5=5x+8$ (b) $5-3x=2x+13$

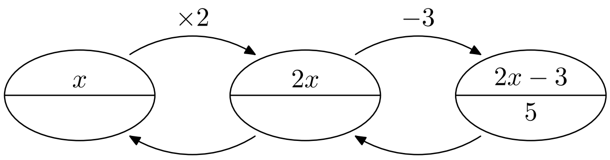
(c) $6x-2=x-6$ (d) $-8x-3=-3x-6$

E.4 On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre de départ ;
- Multiplier le nombre par 2 ;
- Soustraire 3 ;
- Écrire le résultat final.

(1) Donner le nombre retourné lorsque le nombre de départ a pour valeur : 5 ; 0 ; -2

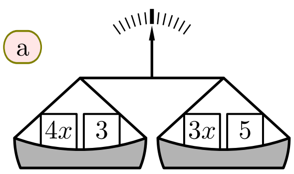
(2) (a) On suppose que le nombre obtenu est 5. Cette situation est illustrée par le diagramme ci-dessous :

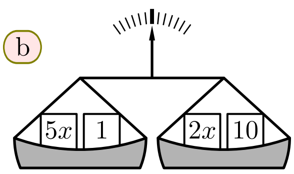


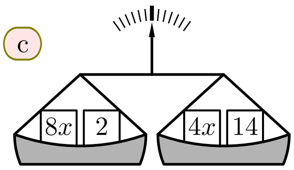
Déterminer le nombre de départ utilisé dans ce cas.

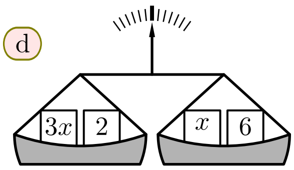
(b) Déterminer la valeur du départ dans le cas où le résultat final est : 7 ; 1 ; 4

E.5 Déterminer, pour chaque question, la valeur de x réalisant l'équilibre de la balance :

(a)


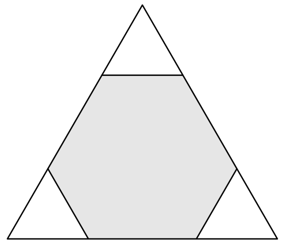
(b)


(c)


(d)


E.6

Trois triangles équilatéraux identiques sont découpés dans les coins d'un triangle équilatéral de côté $6\,cm$. La somme des périmètres des trois petits triangles est égale au périmètre de l'hexagone gris restant. Quelle est la mesure du côté des petits triangles?



Toute trace de recherche, même non aboutie, figurera sur la copie et sera prise en compte dans la notation.

E.7 Résoudre les équations :

a $x^2 = 2$ b $x^2 = 0$ c $x^2 = -1$

E.8

1 a Factoriser l'expression algébrique suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)$

b Résoudre l'équation suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)=0$

2 a Factoriser l'expression suivante :
$(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)$

b Résoudre l'équation suivante :
$(2x+1)(3-2x)=(3x-2)(2x-3)$

E.9 Résoudre les équations suivantes :

a $(x+2)(3-x)+2(x-3)(2x-5)=0$

b $(6-2x)(3x+2)=(3x-9)(x+2)$

E.10 En se ramenant à une équation produit, résoudre les équations suivantes :

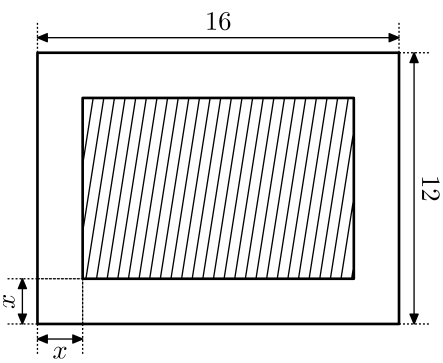
a $\big(3x-1\big)\big(2x+2\big)+3\big(5-2x\big)\big(x+1\big)=0$

b $3\big(5x+1\big)\big(2-3x\big)+\big(6x-4\big)\big(x-1\big)=0$

c $\big(4x+6\big)\big(1-2x\big)=5\big(2x+3\big)^2$

E.11 Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur $16\,m$ et $12\,m$, la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée faisant le tour l'aire de jeu :

L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :



1 Sans justification, préciser les valeurs possibles de la variable x pour ce problème.

2 a Justifier que l'aire de jeu mesure, en fonction de x :
$4x^2-56x+192$

b Justifier que l'aire de l'allée mesure, en fonction de x :
$56x-4x^2$

3 a Établir l'égalité suivante :

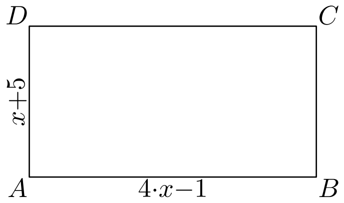
$8x^2 - 112x + 192 = 8(x-12)(x-2)$

(b) Déterminer les possibilités de largeur de l'allée afin que l'aire de jeu ait la même aire que l'allée.

E.12

(1) Établir la factorisation suivante :
$\big(x+5\big)\big(4x-1\big) - 10x - 8 = (x-1)(4x+13)$

(2) On considère le rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont fonction d'un nombre réel x et sont données en centimètre :
$AB = 4x-1 \quad ; \quad AD = x+5$



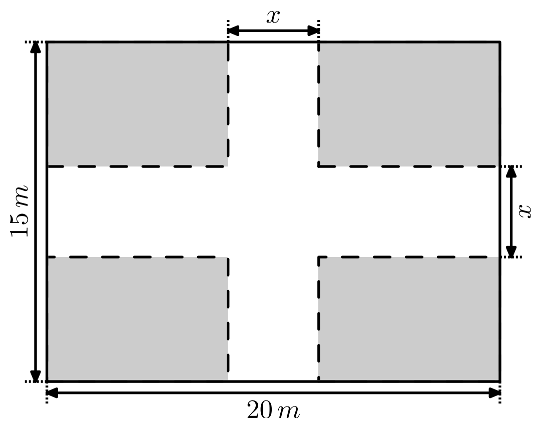
(a) Quelles sont les valeurs possibles du paramètre x?

(b) Déterminer la ou les valeurs de x afin que le périmètre, exprimé en cm, du rectangle $ABCD$ est égal à l'aire, exprimé en cm^2, du rectangle $ABCD$.

E.13 Un jardin a une forme rectangulaire ayant pour dimension $20\,m$ de longueur et $15\,m$ de largeur.

Deux allées de largeur $x\,m$ partagent transversalement ce jardin ; du gazon sera planté sur le reste du jardin.

Une clôture doit être posée autour du gazon : elle est représentée en pointillées sur la représentation.



(1) Indiquer quelles valeurs peut prendre la variable x.

(2) (a) Déterminer en fonction de x l'aire totale des deux allées.

(b) Déterminer en fonction de x l'aire du gazon de ce jardin.

(3) (a) Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :
$2{\cdot}x^2 - 70{\cdot}x + 300 = (x-30)(a{\cdot}x+b)$

(b) L'architecte chargé de la réalisation de ce jardin décide de choisir la largeur de l'allée afin que les aires des allées et du gazon soient égales.

(4) Le propriétaire du jardin décide d'investir 5 600 euros dans l'aménagement du jardin.
Le m^2 de gazon coûte 7 € ; Le m^2 du parquet composant l'allée coûte 30 € ; Le m de la clôture coûte 12 €.

(a) Établir l'égalité suivante :
$23x^2 - 757x + 2660 = (x-4)(23x-665)$

(b) En déduire la largeur des allées réalisant les dessins du propriétaire.

E.14 Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{2x-1} = 0$ (b) $\dfrac{2x-1}{4x+1} - \dfrac{3x}{6x-1} = 0$

E.15 Résoudre l'équation :
$\dfrac{4x}{2x+1} - \dfrac{2x-3}{x+1} = 0$

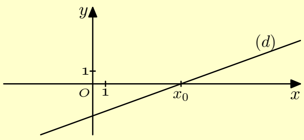
E.16 Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{2x}{4x+1} = \dfrac{x+1}{2x-1}$ (b) $\dfrac{1-x}{2-x} = \dfrac{x+3}{x-1}$

E.17

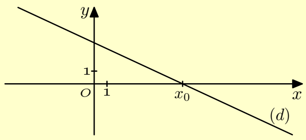
Proposition :

Coefficient directeur positif ($m>0$)



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Coefficient directeur négatif ($m<0$)



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

(1) On considère la fonction affine f définie par :
$f(x) = 2x+3$

Déterminer le tableau de signes de la fonction f.

(2) On considère la fonction affine g définie par :
$g(x) = -x+1$

Déterminer le tableau de signes de la fonction g.

E.18

(1) (a) On considère la fonction f affine définie par :
$f(x) = 3x-4$
Compléter le tableau de signe de la fonction f :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

(b) On considère la fonction g affine définie par :
$g(x) = -2x+1$
Compléter le tableau de signe de la fonction g :

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	

(2) Soit h la fonction obtenue par le produit des fonctions f et g. C'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$h(x) = f(x)\times g(x)$

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $h(-5)$ est positif (b) $h(-1)$ est positif

(c) $h(1)$ est positif (d) $h(3{,}2)$ est positif

E.19 On considère la fonction affine g dont l'image de x est définie par : $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}$

Dresser le tableau de signes de la fonction g.

E.20 Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution :

(a) $-3x+2 \geqslant 0$ (b) $5(x+9) > 0$

(c) $\dfrac{x+1}{4} \geqslant -3\times\dfrac{x-2}{3}$ (d) $2 > x$

E.21 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $-3x+7 \leqslant x+2$ (b) $-6x+1>0$

(c) $-\dfrac{x}{4}<5$ (d) $-3(x+5)<x+5$

(e) $-3x+7 \leqslant 9-x$

E.22 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $3x+3 \geqslant 1$ (b) $\dfrac{3x-1}{4} \leqslant -1$

E.23 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $\dfrac{x+1}{2}+x<0$ (b) $\dfrac{x-2}{-4}<x+1$

E.24 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

(1)

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x+1$	
$3+x$	
$(2x+1)(3+x)$	

(2)

x	$-\infty$ $+\infty$
$2-x$	
$4x-3$	
$(2-x)(4x-3)$	

E.25 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

(1)

x	$-\infty$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

(2)

x	$-\infty$ $+\infty$
$x-3$	
$-2x+4$	
$(x-3)(-2x+4)$	

E.26 Établir le tableau de signes des expressions algébriques :

(a) $(x+1)(2-x)$ (b) $-(2x+4)(x-2)$ (c) $(x+1)^2$

E.27 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

(1)

x	$-\infty$ $+\infty$
$x+5$	
$-2x-8$	
$\dfrac{x+5}{-2x-8}$	

(2)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$x-1$	
$4-x$	
$-x-1$	
$\frac{(x-1)(4-x)}{-x-1}$	

E.28 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

(1)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$2+x$	
$2-x$	
$\frac{2+x}{2-x}$	

(2)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$4x+1$	
$x-1$	
x	
$\frac{(4x+1)(x-1)}{x}$	

E.29 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $(x+4)(1-2x) \geqslant 0$ (b) $\big(3+x\big)\big(2-x\big) \leqslant 0$

E.30 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $(3-2x)(5x+2) \geqslant 0$ (b) $(3x+1)(4-2x) \geqslant 0$

E.31

(1) Développer : $(2x+1)(x-1)$

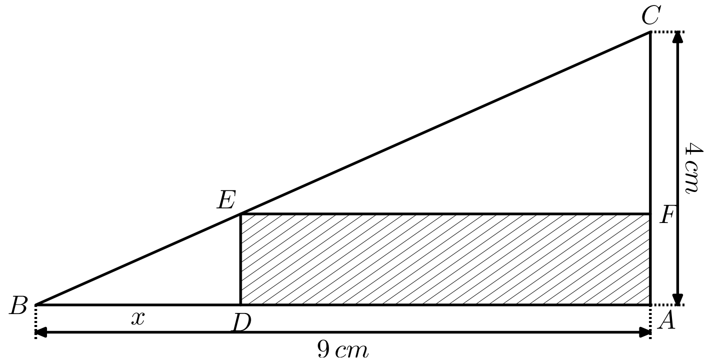
(2) Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+1} \leqslant 0$.

E.32 Résoudre l'inéquation :

$\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$

E.33 On considère le triangle ABC rectangle en A tel que :

$AB = 9\,cm$; $AC = 4\,cm$



On considère un point D appartenant au segment $[AB]$ et on note x la longueur du segment $[BD]$. On construit à partir du point D un rectangle $DEFA$ tel que :

$E \in [BC]$; $F \in [AC]$

On note $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $DEFA$.

1 a Déterminer l'expression de la longueur FA en fonction de x.

b Justifier, brièvement, que le nombre réel x appartient à l'intervalle $\big[0\,;9\big]$.

2 Établir que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime en fonction de x par :

$\mathcal{A}(x) = 4x - \dfrac{4}{9}\cdot x^2$

3 a Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\big[0\,;9\big]$.

b Quelle est l'aire maximale atteint par l'aire $\mathcal{A}$?

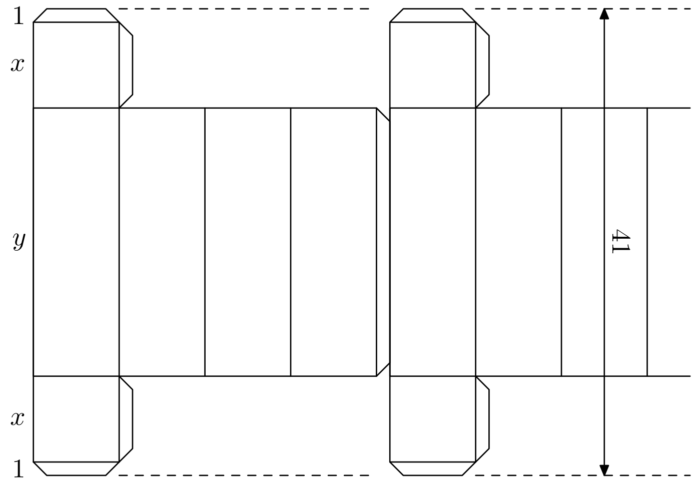
4 On souhaite connaître les valeurs de x pour lesquelles l'aire $\mathcal{A}$ ait supérieure ou égale à $5\,cm^2$:

a Établir la factorisation suivante :

$-4x^2 + 36x - 45 = (2x - 15)(3 - 2x)$

b Résoudre l'inéquation : $\mathcal{A}(x) \geqslant 5$.

E.34 Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de $41\,cm$ de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessin ci-dessous :



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\,cm$ de côté, munies de deux languettes de $1\,cm$ de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1 a Donner une expression de y en fonction de x.

b Justifier que la valeur de x appartient à l'intervalle $\big]0\,;19{,}5\big[$.

2 Démontrer que le volume $\mathcal{V}$, de la boîte en fonction de x en cm^3, est donné, par la formule :

$\mathcal{V} = 39x^2 - 2x^3$

3 a Déterminer l'expression du polynôme P vérifiant l'égalité :

$39x^2 - 2x^3 - 972 = (x - 18)(x - 6)\times P$

b En déduire les valeurs de x pour lesquelles le volume $\mathcal{V}$ est supérieure à $972\,cm^3$.

4 a Déterminer l'expression du polynôme Q vérifiant l'égalité : $\mathcal{V}(x) - 2197 = (-2x - 13)\times Q$

b En déduire le tableau de signes de l'expression :

$\mathcal{V}(x) - 2197$.

c Donner le volume maximal que le fabricant peut obtenir avec ce type de boite ; pour quelle valeur de x, ce maximum est-il atteint?