C.1

(1) On a le tableau :

x	-10	-3	-2	$-0{,}5$	$0{,}2$	$0{,}75$	2
$f(x)$	$-0{,}1$	$-0{,}33$	$-0{,}5$	-2	5	$1{,}33$	$0{,}5$

(2) (a) Deux nombres négatifs et de leurs inverses sont comparés dans le sens contraire.

(b) Deux nombres positifs et de leurs inverses sont comparés dans le sens contraire.

C.2

(a) $f([1\,;2])=[0{,}5\,;1]$

(b) $f(]-3\,;-0{,}5[)=\left]-2\,;-\frac{1}{3}\right[$

(c) $f([0{,}25\,;4[)=]0{,}25\,;4]$

C.3 Soit f la fonction inverse :

(a) $f\Big(]-4\,;-1[\Big)=\left]-1\,;-\frac{1}{4}\right[$

(b) $f\left(\left[2\,;\frac{5}{2}\right]\right)=\left[\frac{2}{5}\,;\frac{1}{2}\right]$

(c) $f\Big(]0{,}000\,1\,;1{,}5]\Big)=\left[\frac{2}{3}\,;10\,000\right[$

C.4 Notons g la fonction inverse. On a les images d'intervalles suivantes :

(a) $g\Big([1\,;2[\Big)=\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$

(b) $g\Big(]0\,;5[\Big)=\left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$

(c) $g\Big([3\,;+\infty[\Big)=\left]0\,;\frac{1}{3}\right]$

C.5

(a) L'équation $\frac{1}{x}=2$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(b) L'équation $\frac{1}{x}=0$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\varnothing$

(c) L'équation $\frac{1}{x}=-4$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

C.6

(a) L'inéquation $\frac{1}{x}\geqslant 1$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=]0\,;1]$

(b) L'inéquation $\frac{1}{x}<-3$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{3}\,;0\right[$

(c) L'inéquation $\frac{1}{x}>7$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\left]0\,;\frac{1}{7}\right[$

C.7 Pour chacune des questions, une résolution "*graphique*" et une résolution algébrique :

(a)
- ***Résolution graphique :***

Par disjonctions de cas :

⇨ sur $\mathbb{R}_-^*$:
L'inéquation $\frac{1}{x}>-1$ a pour ensemble de solution $]-\infty\,;-1[$

⇨ sur $\mathbb{R}_+^*$:
L'inéquation $\frac{1}{x}>-1$ a pour ensemble de solution $]0\,;+\infty[$

Sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{1}{x}>-1$ a pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$

- ***Résolution algébrique :***

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x}>-1$$
$$\frac{1}{x}+1>0$$
$$\frac{1+x}{x}>0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{1+x}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$

(b)
- ***Résolution graphique :***

Par disjonctions de cas :

⇨ sur $\mathbb{R}_-^*$:
L'inéquation $\frac{1}{x}<2$ a pour ensemble de solution $]-\infty\,;0[$

⇨ sur $\mathbb{R}_+^*$:
L'inéquation $\frac{1}{x}<2$ a pour ensemble de solution $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$

Sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{1}{x}<2$ a pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=]-\infty\,;0[\cup\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$

- ***Résolution algébrique :***

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x}<2$$
$$\frac{1}{x}-2<0$$
$$\frac{1-2x}{x}<0$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4-3x}{4x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.

C.8

(a) $f\big([1\,;;4]\big) = [1\,;2]$

(b) $f\big([0{,}81\,;2{,}25[\big) = [0{,}9\,;1{,}5[$

(c) $f\big(]5\,;9[\big) =]\sqrt{5}\,;3[$

C.9

(a) L'inégalité :
$\sqrt{x} > 4$
est équivalente à :
$\sqrt{x} > \sqrt{16}$
La fonction racine carrée étant strictement croissante, on en déduit que deux nombres et leurs images sont ordonnées dans le même sens :
$\mathcal{S} =]16\,;+\infty[$

(b) L'inégalité suivante :
$\sqrt{x} < 9$
qui est équivalente à :
$\sqrt{x} < \sqrt{81}$
La fonction racine carrée est strictement positive, on en déduit :
$x < 81$

En utilisant l'ensemble de définition de la fonction racine carrée, on en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$\mathcal{S} = [0\,;81[$.

C.10

(1) On a le tableau :

x	-10	$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\sqrt{2}$
$f(x)$	100	5	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$3+2\sqrt{2}$

(2) (a) Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire.

(b) Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même sens.

C.11 En notant f la fonction carrée :

(a) $f\big([2\,;5]\big) = [4\,;25]$

(b) $f\big([-3\,;-1]\big) = [1\,;9]$

(c) $f\big([2{,}1\,;3[\big) = [4{,}41\,;9[$

(d) $f\big(]-4\,;-1{,}5]\big) = [2{,}25\,;16[$

C.12 On a les images suivantes des intervalles par la fonction carrée notée f :

(a) $f\Big(]2\,;3]\Big) =]4\,;9]$

(b) $f\Big(]-5\,;-1)\Big) = [1\,;25[$

(c) $f\Big(]-2\,;4]\Big) = [0\,;16]$

C.13

(a) L'équation $x^2 = 2$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}$

(b) L'équation $x^2 = 0$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \{0\}$

(c) L'équation $x^2 = -1$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \varnothing$

C.14

(a) $\mathcal{S} = [-1\,;1]$

(b) $\mathcal{S} =]-\infty\,;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;+\infty[$

(c) $\mathcal{S} =]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$

(d) $\mathcal{S} =]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$

C.15

(a) De l'égalité :
$\sqrt{10^{16}} = \sqrt{10^{8\times2}} = \sqrt{\left(10^8\right)^2} = 10^8$
Les antécédents du nombre 10^{16} par la fonction carré sont :
$-10^8 \quad ; \quad 10^8$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$\mathcal{S} = \left[-10^8\,;10^8\right]$

(b) Des calculs :
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$
Les antécédents du nombre $\frac{9}{4}$ par la fonction carré sont :
$-\frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{3}{2}$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

(c) Les antécédents du nombre π par la fonction carré sont :
$-\sqrt{\pi} \quad ; \quad \sqrt{\pi}$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$\mathcal{S} =]-\infty\,;-\sqrt{\pi}[\cup]\sqrt{\pi}\,;+\infty[$

C.16

(a) L'ensemble de nombres x vérifiant l'inégalité $x^2 < 3$ est :
$\mathcal{S} =]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$

(b) L'ensemble de nombres x vérifiant l'inégalité $x^2 \geqslant 1$ est :
$\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$

(c) L'ensemble de nombres x vérifiant l'encadrement :
$2 \leqslant x^2 \leqslant 4$
est :
$\mathcal{S} = [-2\,;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;2]$

C.17 La fonction cube étant strictement croissante :

(a) $f\big([1\,;4]\big) = [1^3\,;4^3] = [1\,;64]$

b) $f\left(\left[-3\,;-1\right[\right)=\left[(-3)^3\,;(-1)^3\right[=\left[-27\,;-1\right[$

c) $f\left(\left[-\sqrt[3]{4}\,;-\sqrt[3]{2}\right[\right)=\left[\left(-\sqrt[3]{4}\right)^3\,;\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3\right[=\left[-4\,;-2\right[$

C.18

1) L'inéquation :
$x^3 > 8$
qui est équivalent à :
$x^3 > 2^3$
La fonction cube étant strictement croissante, deux nombres et leurs images sont comparés dans le même sens. On en déduit :
$x > 2$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S}=\left]2\,;+\infty\right[$

2) L'inéquation :
$x^3 \leqslant 27$
qui est équivalent à :
$x^3 \leqslant 3^3$
La fonction cube étant strictement croissante, on en déduit :
$x \leqslant 3$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;3\right]$