Seconde - Chapitre 8

C.1

1. L'ensemble des nombres vérifiant l'encadrement $-1 \leqslant x < 4$ forment l'intervalle $[-1\,;4[$.
2. L'ensemble des nombres vérifiant l'inégalité $x > 4$ forment l'intervalle $]4\,;+\infty[$.

C.2

a. Tous les nombres de cet ensemble vérifient l'encadrement :
$-1 < x \leqslant 4$

b. Tous les nombres de cet ensemble vérifient l'encadrement :
$-1 < x < 4$

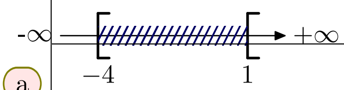
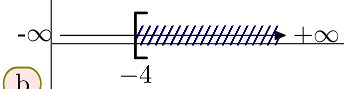
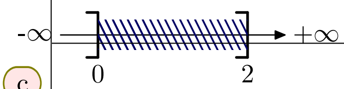
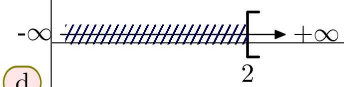
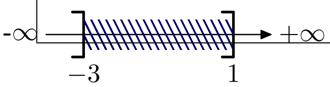
c. Tous les nombres de cet ensemble vérifient l'encadrement :
$-1 \leqslant x < 4$

d. Tous les nombres de cet ensemble vérifient l'encadrement :
$-1 \leqslant x \leqslant 4$

C.3

a. $]-\infty\,;-3[$ b. $]-1\,;4[$ c. $]1\,;+\infty[$

C.4

		$-4 \leqslant x < 1$
a		$x \geqslant -4$
b		$]0\,;\,2]$
c		$x < 2$
d		$-3 < x \leqslant 1$

C.5 Compléter à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$:

a. $3 \notin \left[0;\frac{5}{2}\right[$ b. $0{,}33 \notin \left[\frac{1}{3};1\right]$

c. $-3 \notin [2;4]$ d. $1 \in]-0{,}2\,;3]$

C.6 Notons $A = [-2\,;1]$

$0 \in A,\quad -\sqrt{2} \in A,\quad \sqrt{3} \notin A,\quad \frac{4}{3} \notin A \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} \in A$

C.7

a. $\pi \in]3{,}14;5]$ b. $\sqrt{2} \notin [2;3]$

c. $\pi \notin]0{,}5\,;3{,}1]$ d. $\pi \in]3{,}1\,;4]$

e. $\frac{1}{3} \notin]0\,;0{,}33[$

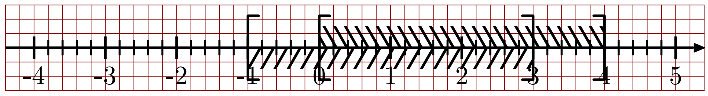
C.8

a. $\sqrt{2} \in]1\,;3[$ b. $\frac{2}{\sqrt{2}} \in [\sqrt{2}\,;5]$

c. $\frac{1-\sqrt{11}}{\sqrt{11}} \in]-\infty\,;0[$ d. $\frac{\sqrt{16}}{4} \in]-4\,;4[$

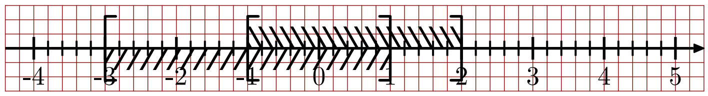
C.9

1. a. Voici la représentation de ces intervalles :



b. La réunion des intervalles $[-1\,;3]$ et $[0\,;4]$ est :
$[-1\,;3] \cup [0\,;4] = [-1\,;4]$

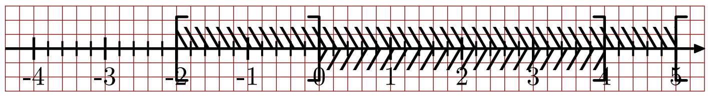
2. a. Voici la représentation de ces intervalles :



b. L'intersection des intervalles $[-3\,;1]$ et $[-1\,;2]$ est :
$[-3\,;1] \cap [-1\,;2] = [-1\,;1]$

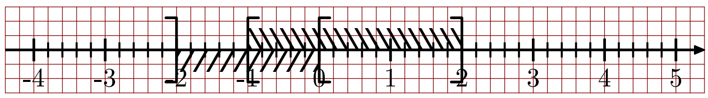
C.10

1. a. Voici la représentation des deux intervalles $]0\,;4]$ et $[-2\,;5[$:



b. La réunion de ces intervalles s'exprime par :
$]0\,;4] \cup [-2\,;5[= [-2\,;5[$.

2. a. Voici la représentation des deux intervalles $]-2\,;0[$ et $[-1\,;2]$:



b. L'intersection de ces intervalles s'exprime par :
$]-2\,;0[\cap [-1\,;2] = [-1\,;0[$.

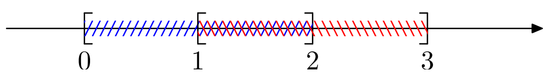
C.11

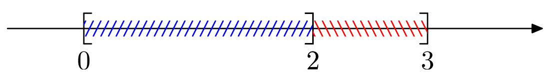
a. $[2;\,5[\cup [0;\,4] = [0;\,5[$

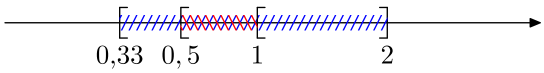
b. $]-1;\,2] \cap [3;\,5] = \varnothing$

c. $[2;\,4[\cap]-1;\,3[= [2;\,3[$

C.12

1. a. 

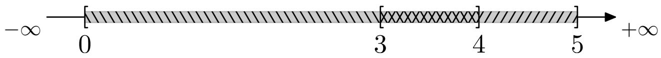
b. 

c 

2 a • $[0\,;\,2]\cup[1\,;\,3]=[0\,;\,3]$
• $[0\,;\,2]\cap[1\,;\,3]=[1\,;\,2]$
b • $[0\,;\,2]\cup\,]2\,;\,3]=[0\,;\,3]$
• $[0\,;\,2]\cap\,]2\,;\,3]=\varnothing$
c • $[0{,}33\,;\,2]\cup[0{,}5\,;\,1]=[0{,}33\,;\,2]$
• $[0{,}33\,;\,2]\cap[0{,}5\,;\,1]=[0{,}5\,;\,1]$

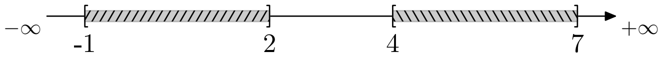
C.13

1 a $[3\,;\,5]\cup[0\,;\,4]=[0\,;\,5]$

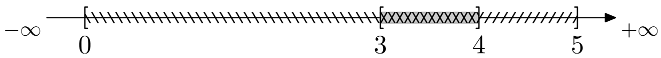


b $[-3\,;\,3]\cup[-2\,;\,2]=[-3\,;\,3]$

c $[-1\,;\,2]\cup[4\,;\,7]=[-1\,;\,2]\cup[4\,;\,7]$

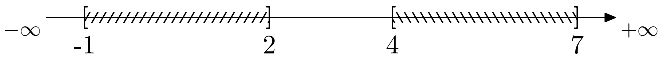


2 a $[3\,;\,5]\cap[0\,;\,4]=[3\,;\,4]$

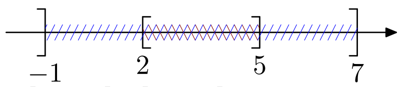


b $[-3\,;\,3]\cap[-2\,;\,2]=[-2\,;\,2]$

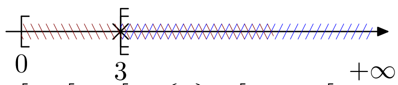
c $[-1\,;2]\cap[4\,;7]=\varnothing$



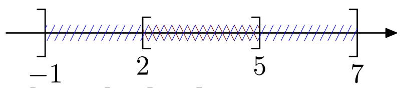
C.14

a 

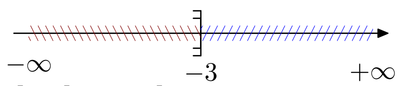
$[2\,;5]\ \cup\ ]-1\,;7]=]-1\,;7]$

b 

$]3\,;+\infty[\ \cup\ [0\,;3[\ \cup\ \{3\}=[0\,;+\infty[$

c 

$[2\,;5]\ \cap\ ]-1\,;7]=[2\,;5]$

d 

$]-\infty\,;3]\ \cap\ ]3\,;+\infty[=\varnothing$

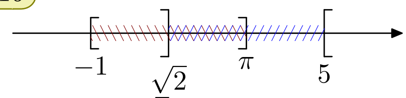
C.15

a $[-1\,;4]$ b $[1\,;4]\cup[-4\,;-1]$

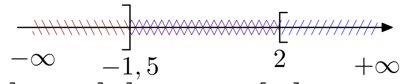
c $[4\,;4]=\{4\}$ d $Voir(**)$

$(**)$ Ici les deux intervalles $[-1\,;1]$ et $[2\,;3]$ n'ont aucun nombre en commun.
Ainsi, l'intersection ne comprend aucun élément : On dit que l'intersection est vide.
Ce qui se note : $[-1\,;1]\cap[2\,;3]=\varnothing$

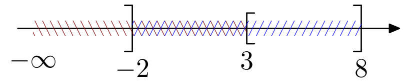
C.16

a 

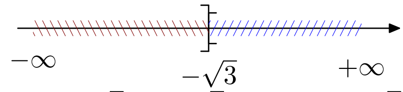
$[-1\,;\pi]\cup]\sqrt{2}\,;5[=[-1\,;5[$

b 

$]-\infty\,;2]\cup]-1{,}5\,;+\infty[=]-\infty\,;+\infty[=\mathbb{R}$

c 

$]-2\,;8]\cap]-\infty\,;3[=]-2\,;3[$

d 

$]\infty\,;-\sqrt{3}]\cap[-\sqrt{3}\,;+\infty[=\{-\sqrt{3}\}$

C.17

a $[1\,;2]$ b $\left[1\,;\dfrac{5}{4}\right]$

$(**)$ Ici les deux intervalles $[-1\,;1]$ et $[2\,;3]$ n'ont aucun nombre en commun.
Ainsi, l'intersection ne comprend aucun élément : On dit que l'intersection est vide.
Ce qui se note : $[-1\,;1]\cap[2\,;3]=\varnothing$

C.18

a $]-\infty\,;3]\cap[-2\,;5[=[-2\,;3]$

b L'utilisation de la calculatrice permet d'écrire :

$$\frac{5}{2}<3<\pi<\sqrt{10}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\left[\frac{5}{2}\,;\sqrt{10}\right[\cap[3\,;\pi[=[3\,;\pi[$$

c On a le classement suivant des bornes de ces deux intervalles :

$$-\frac{12}{5}<-\sqrt{3}<\sqrt{3}<\frac{9}{4}$$

$$\left]-\frac{12}{5}\,;\sqrt{3}\right[\cup\left[-\sqrt{3}\,;\frac{9}{4}\right[=\left]-\frac{12}{5}\,;\frac{9}{4}\right[$$

C.19

a $[1\,;6[\cup[3\,;8]=[1\,;8]$

$[1\,;6[\cap[3\,;8]=[3\,;6[$

b $\left[-\sqrt{2}\,;\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]\dfrac{1}{3}\,;5\right]=[-\sqrt{2}\,;5]-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$\left[-\sqrt{2}\,;\dfrac{1}{3}\right[\cap\left]\dfrac{1}{3}\,;5\right]=\varnothing$

c $]-\infty\,;\pi]\cup]1\,;+\infty[=]-\infty\,;+\infty[=\mathbb{R}$

$]-\infty\,;\pi]\cap]1\,;+\infty[=]1\,;\pi]$

C.20

a $|2-3|=|-1|=1$

b $|5+3|=|8|=8$

c $|2\times(4-5)=|2\times(-1)|=|-2|=2$

d $|4\times2-5\times7|=|8-35|=|-27|=27$

(e) $|7+2|\times|4-6| = |9|\times|-2| = 9\times2 = 18$

(f) $|2-3|\times2| = |-1|\times2 = 1\times2 = 2$

(g) $|5{,}5|+|-5{,}5| = 5{,}5+5{,}5 = 11$

(h) $|-5{,}5|-|4{,}5| = 5{,}5-4{,}5 = 1$

(i) $|2\times3-7| = |-1| = 1$

C.21

(a) $2\times|3\times2-7|-|5-3| = 2\times|6-7|-|2| = 2\times|-1|-2$
$= 2\times1-2 = 0$

(b) $|3\times2-4|\times|3-5| = |6-4|\times|-2| = |2|\times2 = 2\times2 = 4$

(c) $\dfrac{|8-11\times2|}{|+5|+|-5|} = \dfrac{|8-22|}{5+5} = \dfrac{|-14|}{10} = \dfrac{14}{10} = 1{,}4$

(d) $\dfrac{|2\times4-7|}{|3\times3-12|} = \dfrac{|8-7|}{|9-12|} = \dfrac{1}{|-3|} = \dfrac{1}{3}$

C.22

(a) $2\times\left|3\times\dfrac{1}{4}-2\right|+1 = 2\times\left|\dfrac{3}{4}-2\right|+1 = 2\times\left|-\dfrac{5}{4}\right|+1$
$= 2\times\dfrac{5}{4}+1 = \dfrac{10}{4}+1 = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

(b) $\dfrac{|3|+|-3|}{\left|2-\dfrac{1}{3}\right|} = \dfrac{3+3}{\left|\dfrac{5}{3}\right|} = \dfrac{6}{\dfrac{5}{3}} = 6\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{5}$

(c) $\Big|2\times|2\times5-12|-7\Big| = \Big|2\times|-2|-7\Big| = \big|2\times2-7\big|$
$= \big|-3\big| = 3$

C.23

(a) $\Big||5-4|+|4-5|\Big| = \Big||1|+|-1|\Big| = |1+1| = |2| = 2$

(b) $\Big|2\times|3-5|+2\Big|-5 = \Big|2\times|-2|+2\Big|-5 = \big|2\times2+2\big|-5$
$= \big|6\big|-5 = 6-5 = 1$

C.24

(a) Nous savons que $\sqrt{2}<\sqrt{3}$. Ainsi, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ est un nombre négatif. On en déduit :
$$|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

(b) Sachant que $\pi>3$, le nombre $3-\pi$ est négatif. On en déduit :
$|3-\pi| = \pi-3$

(c) Sachant que $\pi<4$: $|\pi-4| = -(\pi-4) = 4-\pi$

C.25

(1) (a) $d(5\,;2) = 3$ (b) $d(1\,;7) = 6$

(c) $d(0\,;5) = 5$ (e) $d(-2{,}5\,;0) = 2{,}5$

(f) $d(-1\,;5) = 6$ (g) $d(-3\,;-4) = 1$

(h) $d(-1\,;-5) = 4$ (i) $d(4\,;-2) = 6$

(j) $d(-2{,}5\,;-1{,}5) = 1$

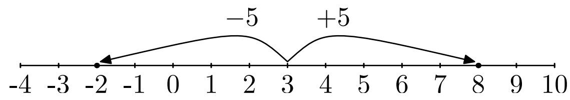
(2) (a)

x	y	$x-y$	$d(x\,;y)$
5	2	3	3
3	7	-4	4
-2	5	-7	7
1	-3	4	4
-1	-6	5	5

(b) Suivant les valeurs de x et de y, les deux nombres $x-y$ et $d(x\,;y)$ sont soit égaux, soit opposés.

C.26

(1) Représentons sur une droite graduée le nombre 3 et les deux nombres ayant une distance de 5 du point précédant :



Les nombres étant à une distance de 5 du nombre 3 sont -2 et 8.

(2) $|x-3| = 5$

$d(x\,;3) = 5$
Les solutions de l'équation sont : $\mathcal{S} = \{-2\,;8\}$

C.27

(a) $|x| = 3$

$|x-0| = 3$
La distance de x à 0 doit être égale à 3.
Les solutions sont -3 et 3.

(b) $|x-2| = 3$

$d(x\,;2) = 3$
Les solutions sont -1 et 5.

(c) $|x-4| = 7$

$d(x\,;4) = 7$
Les solutions sont -3 et 11.

(d) $|x+2| = 3$

$|x-(-2)| = 3$

$d(x\,;-2) = 3$
Les solutions sont -5 et 1.

(e) $|x-4| = 0$

$d(x\,;4) = 0$
La solution est 4.

(f) $|x-2| = -1$

$d(x\,;2) = -1$
Cette question n'a pas de solution puisque qu'une distance est toujours positive.

C.28

(a) $|x-4| = d(x\,;4) = 3$
Les nombres à une distance de 3 du nombre 4 sont : 1 et 7.
$S=\{1\,;7\}$

(b) $|x+2|=|x-(-2)|=d(x\,;-2)=1{,}5$
Les nombres à une distance de 1,5 du nombre -2 sont : -3,5 et -0,5.
$S=\{-3{,}5\,;-0{,}5\}$

(c) $|x-5| = d(x\,;5) = \pi$
Les nombres à une distance de π du nombre 5 sont : $5-\pi$ et $5+\pi$.
$S=\{5-\pi\,;5+\pi\}$

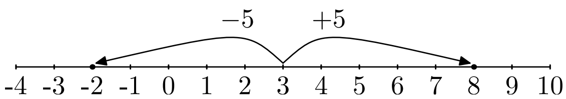
(d) $|x+\sqrt{5}| = |x-(-\sqrt{5})| = d\big(x\,;-\sqrt{5}\big) = \sqrt{2}$
Les nombres à une distance de $\sqrt{2}$ du nombre $-\sqrt{5}$ sont : $-\sqrt{5}-\sqrt{2}$ et $-\sqrt{5}+\sqrt{2}$.
Ainsi, on a :
$S=\{-\sqrt{5}-\sqrt{2}\,;-\sqrt{5}+\sqrt{2}\}$

(e) Le nombre x vérifiant l'égalité $|x-5|=|x-1|$ doit vérifier également l'équation suivante :
$d(x\,;5) = d(x\,;1)$
Ainsi, les nombres x doivent être à la même distance du nombre 5 que du nombre 1.
Ce nombre est nécessairement le milieu des points d'abscisses 5 et 1, c'est-à-dire 3 .
$S=\{3\}$

(f) Le nombre x vérifiant l'égalité $|x+2|=|x-2|$ doit vérifier également l'équation suivante :
$d(x\,;-2) = d(x\,;2)$
Ainsi, les nombres x doivent être à la même distance du nombre -2 que du nombre 2.
Ce nombre est nécessairement le milieu des points d'abscisses -2 et 2, c'est-à-dire 0 .
$S=\{0\}$

C.29

(1) Représentons sur une droite graduée le nombre 3 et les deux nombres ayant une distance de 5 du point précédant :



Les nombres étant à une distance de 5 du nombre 3 sont -2 et 8.

(2) (a) L'ensemble des nombres x vérifiant la relation $d\big(x\,;3\big)\leqslant 5$ forment l'intervalle $\big[-2\,;8\big]$.

(b) Le nombre 3 est le centre de l'intervalle $\big[-2\,;8\big]$.

C.30

(1) (a) Le centre de l'intervalle $\big[5\,;\,9\big]$ est 7.

(b) Le centre de l'intervalle $\big[-2\,;6\big]$ est 2.

(c) Le centre de l'intervalle $\big[0\,;\,4\big]$ est 2.

(2) (a) $x\in\big[5\,;9\big] \quad\Longrightarrow\quad d(x{,}7)\leqslant 2$

(b) $x\in\big[-2\,;6\big] \quad\Longrightarrow\quad d(x{,}2)\leqslant 4$

(c) $x\in\big[0\,;4\big] \quad\Longrightarrow\quad d(x{,}2)\leqslant 2$

C.31

(1) $|2-x|\leqslant 1$ équivaut à $x\in[1\,;3]$

(2) $|x+(-3)|\leqslant 1$ équivaut à $x\in[2\,;4]$

(3) L'inéquation :

$$3\times|x+2|\leqslant 1$$

$$|x-(-2)|\leqslant \frac{1}{3}$$

Equivaut à :

$$x\in\Big[-2-\frac{1}{3}\,;-2+\frac{1}{3}\Big]$$

$$x\in\Big[-\frac{7}{3}\,;-\frac{5}{3}\Big]$$

(4) $|x+5|\geqslant 2$ équivaut à $|x-(-5)|\geqslant 2$.
Qui a pour solution la réunion des intervalles suivants :
$x\in\big]-\infty\,;-7\big]\cup\big[-3\,;+\infty\big[$

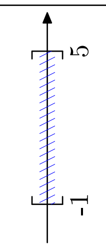
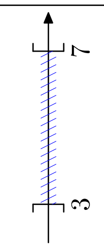
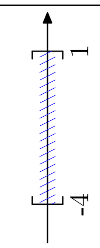
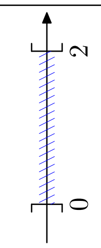
C.32

(a) $\big|x-3\big|\leqslant 2 \quad\Longrightarrow\quad x\in\big[1\,;\,5\big]$

(b) $\big|x-5\big|\leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad x\in\big[4\,;\,6\big]$

(c) $\big|x+1\big|\leqslant 2 \quad\Longrightarrow\quad x\in\big[-3\,;\,1\big]$

C.33

Droite graduée	Intervalle	Valeur absolue	Encadrement	En terme de distance
 -1 ; 5	$x\in\big[-1\,;5\big]$	$\lvert x-2\rvert\leqslant 3$	$-1\leqslant x\leqslant 5$	La distance de x à 2 est inférieure ou égale à 3
 3 ; 7	$x\in\big]3\,;7\big[$	$\lvert x-5\rvert\leqslant 2$	$3<x<7$	La distance de x à 5 est strictement inférieure à 2
 -4 ; 1	$x\in\big[-4\,;1\big]$	$\lvert x+1{,}5\rvert\leqslant 2{,}5$	$-4\leqslant x\leqslant 1$	La distance de x à $-1{,}5$ est inférieure ou égale à 2,5
 0 ; 2	$x\in\big]-2\,;0\big[$	$\lvert x+1\rvert<1$	$-2<x<0$	La distance de x à -1 est strictement inférieure à 1