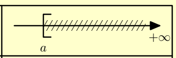
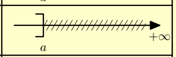
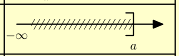
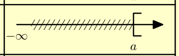
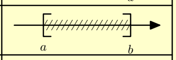
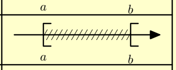
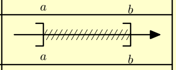
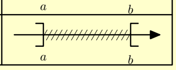
Seconde - Chapitre 8

E.1

Définition : On appelle **intervalle** tout sous-ensemble de nombres qui peut être définie par la délimitation d'un ou de deux nombres appelés ses **bornes**.

Voici les différents types d'intervalles et leurs notations :

$[a\,;+\infty[$	$x \geqslant a$	l'ensemble des nombres supérieur ou égal à a	
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	l'ensemble des nombres strictement supérieur à a	
$]-\infty\,;a]$	$x \leqslant a$	l'ensemble des nombres inférieur ou égal à a	
$]-\infty\,;a[$	$x < a$	l'ensemble des nombres strictement inférieure à a	
$[a\,;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	l'ensemble des nombres supérieurs ou égal à a et inférieur ou égal à b	
$[a\,;b[$	$a \leqslant x < b$	l'ensemble des nombres supérieurs ou égal à a et strictement inférieur à b	
$]a\,;b]$	$a < x \leqslant b$	l'ensemble des nombres strictement supérieurs à a et inférieur ou égal à b	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	l'ensemble des nombres strictement supérieurs à a et strictement inférieur à b	

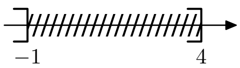
1. Parmi les intervalles ci-dessous, lequel représente l'ensemble des nombres x vérifiant l'encadrement : $-1 \leqslant x < 4$:

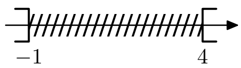
   a) $[-1\,;4]$ b) $]-1\,;4]$ c) $[-1\,;4[$ d) $]-1\,;4[$

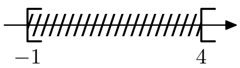
2. Parmi les intervalles donnés ci-dessous, lequel représente l'ensemble des nombres x réalisant l'inégalité $x > 4$:

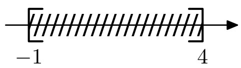
   a) $]-\infty\,;4[$ b) $]-\infty\,;4]$ c) $[4\,;+\infty[$ d) $]4\,;+\infty[$

E.2 Quatre ensembles de nombres sont représentés ci-dessous sur une droite graduée :

a) 

b) 

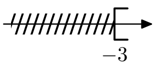
c) 

d) 

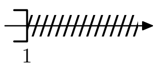
Associer à chacun de ces ensembles de nombres, l'encadrement qui est vérifié par tous les nombres de cet ensemble :

1. $-1 \leqslant x \leqslant 4$
2. $-1 < x < 4$
3. $-1 \leqslant x < 4$
4. $-1 < x \leqslant 4$

E.3 Sur chaque droite ci-dessous, est représenté un ensemble de nombres :

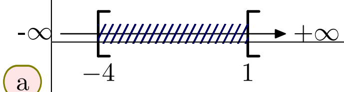
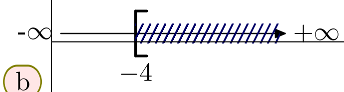
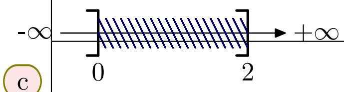
a) 

b) 

c) 

Utiliser un intervalle pour décrire chacun de ces ensembles.

E.4 Recopier les informations manquantes sur votre copie :

		$-4 \leqslant x < 1$
a		
b		
c		$x < 2$
d		$-3 < x \leqslant 1$

E.5 Compléter à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$:

a $3 \ldots \left[0\,;\, \frac{5}{2}\right[$ b $0{,}33 \ldots \left[\frac{1}{3}\,;\, 1\right]$

c $-3 \ldots [2\,;\, 4]$ d $1 \ldots]-0{,}2\,;\, 3]$

E.6 À l'aide des symboles d'appartenance *($\in$)* et de non-appartenance *($\notin$)*, indiquer les nombres appartenant à l'intervalle $[-2; 1]$:

$0 \quad ; \quad -\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{3} \quad ; \quad \frac{4}{3} \quad ; \quad \frac{\pi}{4}$

E.7 Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$:

a $\pi \ldots]3{,}14; 5]$ c $\sqrt{2} \ldots [2; 3]$

b $\pi \ldots]0{,}5\,;\, 3{,}1]$ d $\pi \ldots]3{,}1\,;\, 4]$

e $\frac{1}{3} \ldots]0\,;\, 0{,}33[$

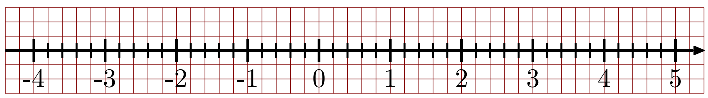
E.8 Recopier et compléter à l'aide du symbole d'appartenance ($\in$) et de non-appartenance les lignes suivantes :

a $\sqrt{2}$ ... $]1\,;3[$ b $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ... $[\sqrt{2}\,;5]$

c $\frac{1-\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$ ... $]-\infty\,;0[$ d $\frac{\sqrt{16}}{4} \ \ldots\ ]-4;\, 4[$

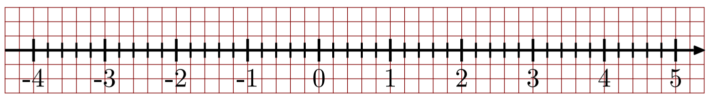
E.9

1 a Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-1\,;3]$ et $[0\,;4]$:



b Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $[-1\,;3]$ et $[0\,;4]$.

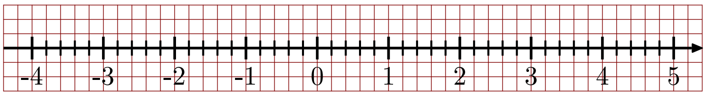
2 a Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-3\,;1]$ et $[-1\,;2]$:



b Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $[-3\,;1]$ et $[-1\,;2]$.

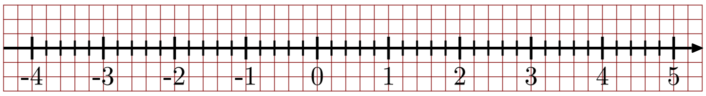
E.10

1 a Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $]0\,;4]$ et $[-2\,;5[$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $]0\,;4]$ et $[-2\,;5[$.

(2) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $]-2\,;0[$ et $[-1\,;2]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $]-2\,;0[$ et $[-1\,;2]$.

E.11 Donner l'expression simplifiée de chacun des ensembles ci-dessous :

(a) $[2\,;5[\cup[0\,;4]$ (b) $]-1\,;2]\cap[3\,;5]$ (c) $[2\,;4[\cap]-1\,;3[$

E.12 Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée les deux intervalles. Puis, déterminer leurs intersections et leurs réunions :

(a) $[0\,;2]$; $[1\,;3]$ (b) $[0\,;2]$; $]2\,;3]$

(c) $[0{,}33\,;2]$; $[0{,}5\,;1[$

E.13

(1) Donner, si possible, une expression simplifiée des unions d'intervalles suivants :

(a) $[3\,;5]\cup[0\,;4]$ (b) $[-3\,;3]\cup[-2\,;2]$ (c) $[-1\,;2]\cup[4\,;7]$

(2) Donner l'expression des intersections d'intervalles :

(a) $[3\,;5]\cap[0\,;4]$ (b) $[-3\,;3]\cap[-2\,;2]$ (c) $[-1\,;2]\cap[4\,;7]$

E.14 Avant d'effectuer l'opération sur les intervalles demandés, représenter chacun des deux intervalles sur une droite graduée, puis donner l'ensemble résultant.

(a) $[2\,;\,5]\,\cup\,]-1\,;\,7]$ (b) $]3\,;\,+\infty[\,\cup\,[0\,;\,3[\,\cup\,\{3\}$

(c) $[2\,;\,5]\,\cap\,]-1\,;\,7]$ (d) $]-\infty\,;\,3]\,\cap\,]3\,;\,+\infty[$

E.15 Pour chaque question, représenter l'ensemble obtenu sur une droite graduée, puis donner, si possible, une écriture simplifiée de cet ensemble.

(a) $[-1\,;1]\cup[1\,;4]$ (b) $[1\,;4]\cup[-4\,;-1]$

(c) $[4\,;5]\cap[-1\,;4]$ (d) $[-1\,;1]\cap[2\,;3]$

E.16 Représenter sur une droite graduée chacun des ensembles ci-dessous et donner leur écriture algébrique :

(a) $[-1\,;\,\pi]\cup]\sqrt{2}\,;\,5[$ (b) $]-\infty\,;\,2]\cup]-1{,}5\,;\,+\infty[$

(c) $]-2\,;\,8]\cap]-\infty\,;\,3[$ (d) $]-\infty\,;\,-\sqrt{3}]\cap[-\sqrt{3}\,;\,+\infty[$

E.17 Pour chaque question, représenter l'ensemble obtenu sur une droite graduée, puis donner, si possible, une écriture simplifiée de cet ensemble.

(a) $[1\,;2]\cup\left[\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{14}{8}\right]$ (b) $\left[-2\,;\dfrac{5}{4}\right]\cap[1\,;100]$

E.18 Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

(a) $]-\infty\,;3]\cap[-2\,;5[$ (b) $\left[\dfrac{5}{2}\,;\sqrt{10}\right[\cap[3\,;\pi[$

(c) $\left]-\dfrac{12}{5}\,;\sqrt{3}\right[\cup\left[-\sqrt{3}\,;\dfrac{9}{4}\right[$

E.19 Pour chaque couple d'intervalle, donner l'ensemble résultat de leur intersection et de leur réunion :

(a) $[1\,;6[$ et $[3\,;8]$ (b) $\left[-\sqrt{2}\,;\dfrac{1}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{3}\,;5\right]$

(c) $]-\infty\,;\pi]$ et $]1\,;+\infty[$

E.20 De manière algébrique, calculer les expressions suivantes :

(a) $|2-3|$ (b) $|5+3|$ (c) $|2\times(4-5)|$

(d) $|4\times2-5\times7|$ (e) $|7+2|\times|4-6|$ (f) $|2-3|\times2$

(g) $|5{,}5|+|-5{,}5|$ (h) $|-5{,}5|-|4{,}5|$ (i) $|2\times3-7|$

E.21 Effectuer les calculs suivants :

(a) $2\times|3\times2-7|-|5-3|$ (b) $|3\times2-4|\times|3-5|$

(c) $\dfrac{|8-11\times2|}{|+5|+|-5|}$ (d) $\dfrac{|2\times4-7|}{|3\times3-12|}$

E.22 Effectuer les calculs suivants :

(a) $2\times\left|3\times\dfrac{1}{4}-2\right|+1$ (b) $\dfrac{|3|+|-3|}{\left|2-\dfrac{1}{3}\right|}$ (c) $\Big|2\times|2\times5-12|-7\Big|$

E.23 Effectuer les calculs suivants :

(a) $\Big||5-4|+|4-5|\Big|$ (b) $\Big|2\times|3-5|+2\Big|-5$

E.24 Effectuer les calculs suivants :

(a) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ (b) $|3-\pi|$ (c) $|\pi-4|$

E.25

On notera $d(x\,;y)$ la distance, sur une droite graduée, entre les points d'abscisses respectives x et y.

On remarque qu'on a immédiatement la formule , pour tout nombre x et y :
$d(x\,;y)=d(y\,;x)$

(1) Calculer les distances indiquées ci-dessous :

(a) $d(5\,;2)=\ldots\ldots$ (b) $d(1\,;7)=\ldots\ldots$

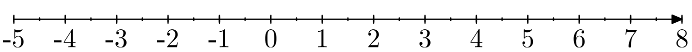
(c) $d(0\,;5)=\ldots\ldots$ (e) $d(-2{,}5\,;0)=\ldots\ldots$

(f) $d(-1\,;5)=\ldots\ldots$ (g) $d(-3\,;-4)=\ldots\ldots$

(h) $d(-1\,;-5)=\ldots\ldots$ (i) $d(4\,;-2)=\ldots\ldots$

(j) $d(-2{,}5\,;-1{,}5)=\ldots\ldots$

On pourra utiliser de la droite graduée ci-dessous :



(2) (a) Compléter le tableau suivant :

x	y	$x-y$	$d(x\,;y)$
5	2		
3	7		
-2	5		
1	-3		
-1	-6		

(b) Comparer $x-y$ et $d(x\,;y)$?

E.26

(1) Quels sont les points qui sont à une distance de 5 du nombre 3?

(2) Résoudre l'équation : $\lvert x-3\rvert = 5$

E.27 Résoudre les équations suivantes :

(a) $|x| = 3$ (b) $|x-2| = 3$ (c) $|x-4| = 7$

(d) $|x+2| = 3$ (e) $|x-4| = 0$ (f) $|x-2| = -1$

E.28 En traduisant les équations suivantes en un problème sur les distances, donner l'ensemble des solutions des équations.

`Exemple :`

$|x+2| = 3$ `se traduit en` $d(x\,;-2) = 3$

(a) $|x-4| = 3$ (b) $|x+2| = 1{,}5$

(c) $|x-5| = \pi$ (d) $|x+\sqrt{5}| = \sqrt{2}$

(e) $|x-5| = |x-1|$ (f) $|x+2| = |x-2|$

E.29

(1) Résoudre l'équation : $\lvert x-3\rvert = 5$

(2) (a) Exprimer, sous forme d'intervalle, l'ensemble des nombres x vérifiant la relation : $\lvert x-3\rvert \leqslant 5$

(b) Quelle relation peut-on établir entre le nombre 3 et les extrémités de l'intervalle solution obtenu à la question (a)?

E.30

(1) Donner le centre de chacun des intervalles :

(a) $[5\,;9]$ (b) $[-2\,;6]$ (c) $[0\,;4]$

(2) Compléter les pointillées :

(a) $x \in [5\,;9] \implies d(x,7) \leqslant \ldots$

(b) $x \in [-2\,;6] \implies d(x,\ldots) \leqslant 4$

(c) $x \in [0\,;4] \implies d(x,\ldots) \leqslant \ldots$

E.31 Compléter les pointillés :

(1) $|2-x| \leqslant 1$ équivaut à $x \in \ldots\ldots\ldots$

(2) $|x+\ldots|\ldots 1$ équivaut à $x \in [2\,;4]$

(3) $3\times|x+2| \leqslant 1$ équivaut à $x \in \ldots\ldots\ldots$

(4) $|x+5| \geqslant 2$ équivaut à $x \in \ldots\ldots\ldots \cup \ldots\ldots\ldots$

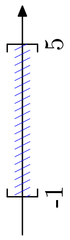
E.32 Compléter les pointillés ci-dessous :

(a) $|x-3| \leqslant 2 \quad \Longrightarrow \quad x \in [1\,;\ldots]$

(b) $|x-5| \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in [\ldots\,;\ldots]$

(c) $|x+1| \leqslant 2 \quad \Longrightarrow \quad x \in [\ldots\,;\ldots]$

E.33 Compléter le tableau suivant ligne par ligne.

En terme de distance	Encadrement	Valeur absolue	Intervalle	Droite graduée
La distance de x à 2 est inférieure ou égale à 3	$-1 \leqslant x \leqslant 5$	$\lvert x-2\rvert \leqslant 3$	$x \in [-1\,;5]$	
	$3 < x < 7$			
			$x \in [-4\,;1]$	
		$\lvert x+1\rvert < 1$		