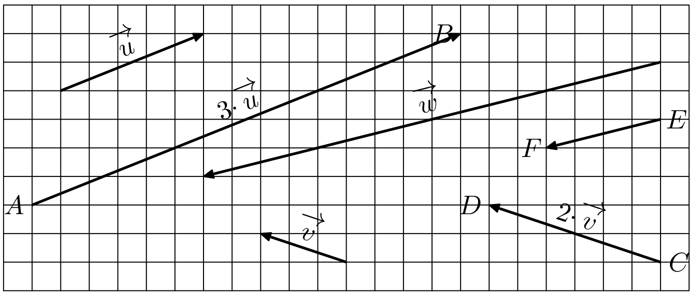
Seconde - Chapitre 5

C.1 Dans le plan, on considère les trois vecteurs et les trois points représentés ci-dessous :



C.2

(a) $\overrightarrow{BC} = 5\times\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{ED} = 3\times\overrightarrow{AC}$

(c) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{ED} = -3\times\overrightarrow{CA}$

(e) $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$ (f) $\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}\times\overrightarrow{BE}$

C.3

(a) $\overrightarrow{DG} = 3\cdot\overrightarrow{DE}$ (b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GI}$

(c) $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DF}$ (d) $\overrightarrow{EI} = 2\cdot\overrightarrow{AC}$

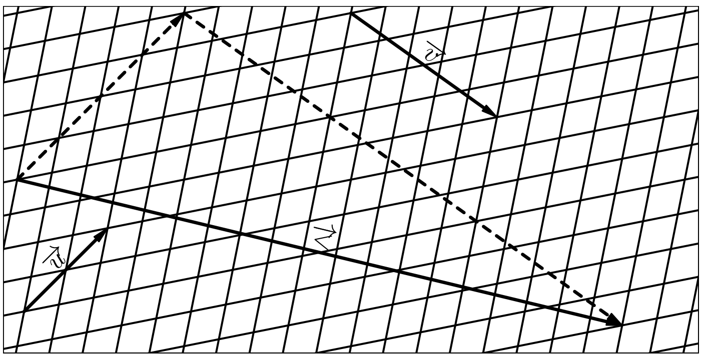
C.4

(a) $\overrightarrow{BC} = 5\cdot\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{ED} = 3\cdot\overrightarrow{AC}$

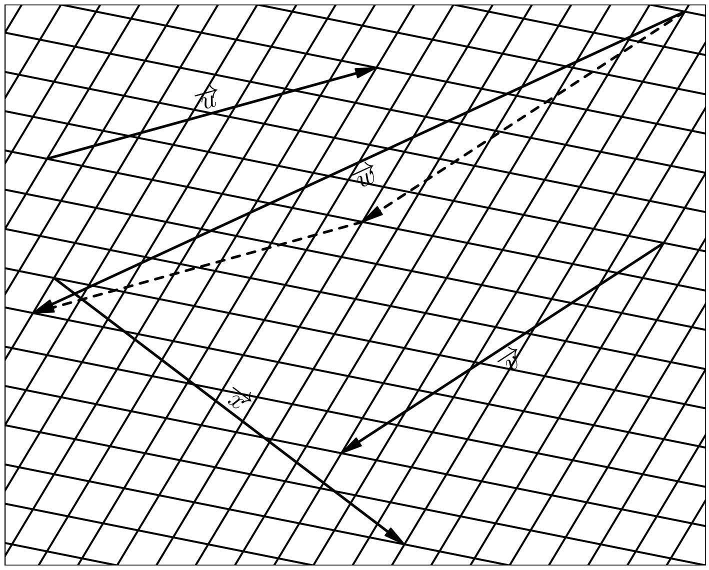
(c) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{ED} = -3\cdot\overrightarrow{CA}$

(e) $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$ (f) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BA}$

C.5



C.6



Une petite remarque :

Pour tracer le vecteur $\vec{w}$, il est possible de tracer des représentants des vecteurs $\vec{v} - \vec{u}$.

Par contre, pour tracer un représentant du vecteur $4\vec{u}+3\vec{v}$, il est nécessaire d'utiliser les "*coordonnées*" des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans ce quadrillage régulier, mais non orthogonal.

C.7

(a) $2\times\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

(b) $3\cdot\overrightarrow{DJ}+2\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DJ}+2\cdot\overrightarrow{DJ}+2\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DJ}+2\cdot\big(\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{IA}\big)$

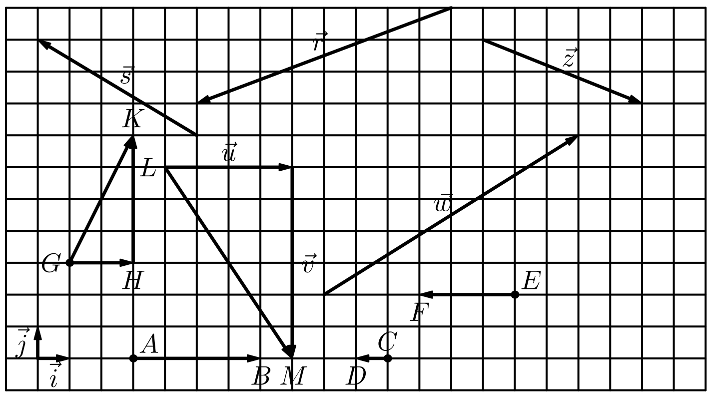
$= \overrightarrow{DJ} + 2\cdot\big(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA}\big) = \overrightarrow{DJ} + 2\cdot\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{DJ}$

(c) $2\cdot\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{BC}=2\cdot\big(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\big)-\overrightarrow{BC}=2\cdot\overrightarrow{AD}+2\cdot\overrightarrow{DJ}-\overrightarrow{BC}$

$= 2\cdot\overrightarrow{BC} + 2\cdot\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{BC} = 2\cdot\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BC} + \big(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}\big)$

$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

C.8



(3) (c) $\overrightarrow{GK} = 2\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j}$

(4) On a les égalités : $\vec{u} = 4\cdot\vec{i}$; $\vec{v} = -6\cdot\vec{j}$.

On en déduit la décomposition de $\overrightarrow{LM}$:

$\overrightarrow{LM} = 4\cdot\vec{i} - 6\cdot\vec{j}$

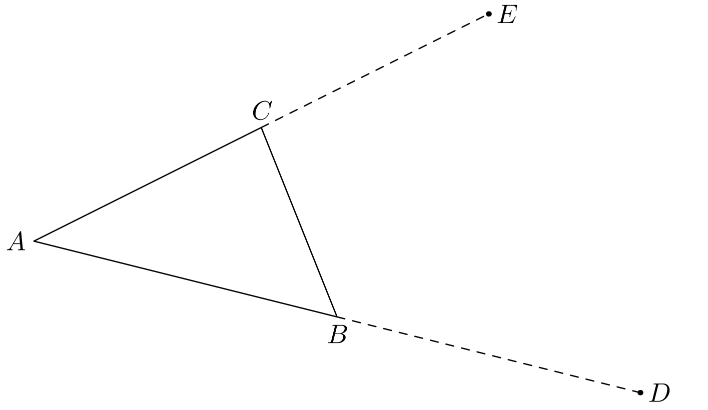
(5) (a) $\vec{w} = 8\cdot\vec{i} + 5\cdot\vec{j}$

(b) $\vec{z} = 5\cdot\vec{i} - 3\cdot\vec{j}$

c $\vec{r} = -8\cdot\vec{i} - 3\cdot\vec{j}$

d $\vec{s} = -5\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j}$

C.9 Voici la représentation de cette figure :



Pour comparer les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$, on pourrait utiliser le théorème des milieux, mais nous allons utiliser l'outil vectoriel pour cette comparaison :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

Par définition des points D et E :

$= -2\cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot\overrightarrow{BA} + 2\cdot\overrightarrow{AC}$

Factorisons par 2 :

$= 2\cdot\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = 2\cdot\overrightarrow{BC}$

C.10

a
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\\
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}\\
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC}\\
\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés : a fortiori, ils sont colinéaires.

C.11

1
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{CB} &= \vec{0}\\
\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{BD} + 2\cdot\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{CD} + 2\cdot\overrightarrow{DB} &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{CD} + \left(2\cdot\overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{DB}\right) &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{CD} &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AB} &= -2\cdot\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

2 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

C.12 Les points A, B, C et D vérifient la relation :

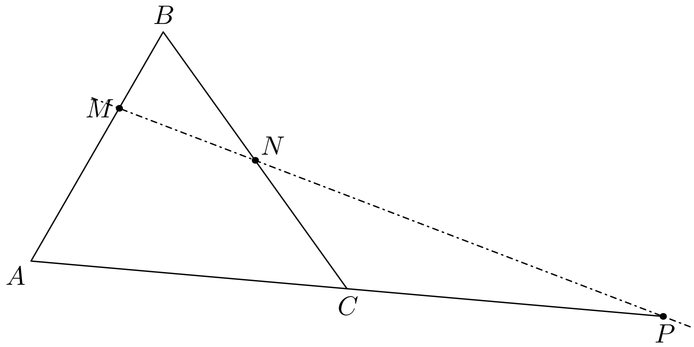
$$\overrightarrow{AC} - 3\cdot\overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} - 3\cdot\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) + 2\cdot\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AC} - 3\cdot\overrightarrow{BA} - 3\cdot\overrightarrow{AC} - 3\cdot\overrightarrow{CD} + 2\cdot\overrightarrow{BA} + 2\cdot\overrightarrow{AC} &= \vec{0}\\
-\overrightarrow{BA} - 3\cdot\overrightarrow{CD} &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AB} &= 3\cdot\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

C.13



On a les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = -\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 2\cdot\overrightarrow{AC}$

  $= \dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + 2\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + 2\cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC}$

  $= \dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BA} - \cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC} = -\dfrac{4}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + 2\cdot\overrightarrow{BC}$

On remarque que :

$4\cdot\overrightarrow{MN} = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{4}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + 2\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MP}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires : les droites (MN) et (MP) sont parallèles.

Les droites (MN) et (MP) étant parallèles et possédant un point commun, ces deux droites sont confondues : les points M, N et P sont alignés.