Seconde - Chapitre 4

C.1 Voici le tableau complété :

Entier x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de diviseurs de x	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

C.2

- Les diviseurs de 10 sont :
  1 ; 2 ; 5 ; 10.
- Les diviseurs de 25 sont :
  1 ; 5 ; 25.
- Les diviseurs de 35 sont :
  1 ; 5 ; 7 ; 35.
- Les diviseurs de 81 sont :
  1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81.
- Les diviseurs de 125 sont :
  1 ; 5 ; 25 ; 125.

81 est le seul de ces entiers possédant 5 diviseurs.

C.3

- Les diviseurs de 24 sont :
  1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
- Les diviseurs de 28 sont :
  1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28.
- Les diviseurs de 49 sont :
  1 ; 7 ; 49.
- Les diviseurs de 64 sont :
  1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64.
- Les diviseurs de 343 sont :
  1 ; 7 ; 49 ; 343.

343 est le seul de ces entiers possédant 4 diviseurs.

C.4

1.
   - On a : $32 = 2\times16$
     Ainsi, 32 est divisible par 2 *(mais aussi par 16)* : 32 n'est pas un entier premier.
   - On a : $63 = 3\times21$
     Ainsi, 63 est divisible par 3 *(mais aussi 21)* : 63 n'est pas un entier premier.
2. 17 n'admet pour diviseur que les entiers 1 et 17 : l'entier 17 est un entier premier.

C.5

1.
   - Les diviseurs de 2 sont 1 et lui-même : 2 est un entier premier.
   - Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4 : 4 n'est pas un entier premier.
   - 7 admet $\{1;7\}$: 7 est un entier premier.
   - 12 admet pour diviseur 1, 2, 3, 4, 6, 12 : 12 n'est pas un entier premier.
2. Les entiers premiers compris entre 1 et 25 sont :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23

C.6

1. Les dix entiers premiers inférieurs ou égaux à 30 sont :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.
   17 ; 19 ; 23 ; 29.
2.
   - 3 est un diviseur de l'entier 33 $(33=3\times11)$: l'entier 33 n'est pas un entier premier.
   - L'entier 47 admet pour diviseur les entiers 1 et 47 : l'entier 47 est un entier premier.
   - 3 est un diviseur de l'entier 51 $(51=3\times17)$: 51 n'est pas un entier premier.
   - 2 est un diviseur de l'entier 28 $(28=2\times14)$: 28 n'est pas un entier premier.
   - 3 est un diviseur de l'entier 39 $(39=3\times13)$: 39 n'est pas un entier premier.
   - 7 est un diviseur de l'entier 49 $(49=7\times7)$: 49 n'est pas un entier premier.
   - 5 est un diviseur de l'entier 85 $(85=5\times17)$: 85 n'est pas un entier premier.

C.7

1. Les entiers 3 et 5 sont premiers, mais leur somme 8 n'est pas un nombre premier.
2. Les nombres 5 et 11 sont deux entiers premiers, mais leur différence 6 n'est pas un nombre premier.
3. Les nombres 2 et 3 sont deux entiers premiers, mais leur produit 6 n'est pas un nombre premier.

C.8

a. On a les égalités suivantes :
   $16 = 2^4$; $25 = 5^2$

   On a la simplification suivante du produit :
   $16\times25 = 2^4\times5^2$

b. On a les décompositions suivantes en produit de facteurs premiers :
   $34 = 2\times17$; $12 = 2^2\times3$

   Ce qui nous permet d'obtenir :
   $34\times12 = 2\times17\times2^2\times3 = 2^3\times3\times17$

c. Nous allons nous servir des décompositions suivantes :
   $72 = 2^3\times3^2$; $18 = 2\times3^2$; $10 = 2\times5$

   On obtient :
   $C = 72\times18\times10 = 2^3\times3^2\times2\times3^2\times2\times5 = 2^5\times3^4\times5$

d. Voici deux décompositions utiles :
   $32 = 2^5$; $121 = 11^2$

   On a :
   $32\times121 = 2^5\times11^2$

C.9

1. Ci-dessous est présenté l'algorithme de décomposition en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 5 \\ 45 & 3 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

On en déduit la décomposition en produit de facteurs premiers de ces deux nombres :

$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \quad ; \quad 450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

(2) Simplifions le quotient :

$$\frac{60}{450} = \frac{2^2 \times 3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$$

(3) Effectuons cette somme :

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{450} = \frac{1}{2^2 \times 3 \times 5} + \frac{1}{2 \times 3^2 \times 5^2}$$

$$= \frac{3 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} + \frac{1 \times 2}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{15}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} + \frac{2}{2^2 \times 3^2 \times 5^2}$$

$$= \frac{15+2}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{17}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{17}{900}$$

C.10

(1) Cherchons les décompositions en produit de facteurs premiers de ces deux entiers :

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

On obtient ainsi les décompositions suivantes :

- $108 = 2^2 \times 3^3$
- $30 = 2 \times 3 \times 5$

(2) (a) Grâce aux décompositions de la question (1), nous obtenons la simplification de fractions suivantes :

$$\frac{30}{108} = \frac{2 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3^3} = \frac{5}{2 \times 3^2}$$

(b) La décomposition nous donne facilement le PPCM des entiers 108 et 30 :

$PPCM(108\,;30) = PPCM(2^2 \times 3^3\,; 2 \times 3 \times 5)$

$= 2^2 \times 3^3 \times 5$

Ce sera le plus petit dénominateur commun pour effectuer la soustraction ; ainsi, on obtient :

$$\frac{5}{108} - \frac{7}{30} = \frac{5}{2^2 \times 3^3} - \frac{7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{5 \times 5}{2^2 \times 3^3 \times 5} - \frac{7 \times 2 \times 3^2}{2^2 \times 3^3 \times 5}$$

$$= \frac{25 - 126}{2^2 \times 3^3 \times 5} = \frac{-101}{2^2 \times 3^3 \times 5}$$

Or, 101 est un entier premier.

$$= -\frac{101}{540}$$

C.11

(1) Voici les tableaux de décomposition utilisés pour ces deux entiers :

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

On obtient ainsi les décompositions en produit de facteurs premiers :

- $20 = 2^2 \times 5$
- $135 = 3^3 \times 5$

(2) (a) Les décompositions obtenues à la question précédente vont nous permettre de simplifier cette fraction :

$$\frac{20}{135} = \frac{2^2 \times 5}{3^3 \times 5} = \frac{2^2}{3^3}$$

(b) De même :

$$\frac{7}{20} - \frac{6}{135} = \frac{7}{2^2 \times 5} - \frac{6}{3^3 \times 5} = \frac{7}{2^2 \times 5} - \frac{2}{3^2 \times 5}$$

L'identification des dénominateurs permet d'obtenir leur PPCM

$$= \frac{7 \times 3^2}{2^2 \times 5 \times 3^2} - \frac{2 \times 2^2}{3^2 \times 5 \times 2^2} = \frac{7 \times 3^2 - 2 \times 2^2}{2^2 \times 3^2 \times 5}$$

$$= \frac{63 - 8}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{55}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{11}{2^2 \times 3^2} = \frac{11}{36}$$

C.12

(1) (a)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \underline{-14} & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ \underline{-2} & 14 \\ 08 & \\ \underline{-8} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 131 & 2 \\ \underline{-12} & 65 \\ 11 & \\ \underline{-10} & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 206 & 2 \\ \underline{-2} & 103 \\ 006 & \\ \underline{-6} & \\ 0 & \end{array}$$

(b)
- $15 = 7 \times 2 + 1$
- $28 = 14 \times 2 + 0$
- $131 = 65 \times 2 + 1$
- $206 = 103 \times 2 + 0$

(2)
- Le reste de la division euclidienne d'un nombre pair par 2 vaut 0.
- Le reste de la division euclidienne d'un nombre impair par 2 vaut 1.

C.13

Voici les phrases complétées :

(a) La somme de deux entiers pairs est un entier **pair**

(b) La somme de deux entiers impairs est un entier **pair**

(c) Le produit de deux entiers impairs est un entier **impair**

(d) Le produit d'un entier pair par un entier impair est un entier **pair**

C.14

Toutes ces assertions sont justes, mais bien qu'aucune démonstration ne soit demandée, voici, sur quelques exemples, la "*logique*" se cachant derrière chacune des preuves :

(1) $7 + 11 = (6+1) + (10+1) = 6 + 10 + 2$

(2) $6 \times 5 = 6 \times (4+1) = 6 \times 4 + 6 \times 1 = 6 \times 4 + 6$

(3) idem que précédemment

(4) $8+9+10+11+12$

$= 8 + \big(8+1\big) + \big(8+2\big) + \big(8+3\big) + \big(8+4\big)$

$= 8+8+8+8+8+\big(1+2+3+4\big)$

$= 5\times 8 + 10$

$= 5\times 8 + 5\times 2$

$= 5\times 10$

C.15

+	Pair	Impair
Pair	pair	impair
Impair	impair	pair

×	Pair	Impair
Pair	pair	pair
Impair	pair	impair

C.16 Soit n un entier impair. Il existe un entier k tel que : $n = 2\cdot k + 1$

L'expression peut s'écrire :

$3\cdot n^2 + 2\cdot n + 1 = 3\cdot\big(2\cdot k+1\big)^2 + 2\cdot\big(2\cdot k+1\big) + 1$

$= 3\cdot\big(4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1\big) + 4\cdot k + 2 + 1$

$= 12\cdot k^2 + 12\cdot k + 3 + 4\cdot k + 2 + 1 = 12\cdot k^2 + 16\cdot k + 6$

$= 2\cdot\big(6\cdot k^2 + 8\cdot k + 3\big)$

On en déduit que cette expression est un entier pair.

C.17 Effectuons une disjonction de cas sur la parité de l'entier n :

- Supposons que n est un entier pair. Il existe un entier k tel que : $n=2\cdot k$

  Étudions la parité de l'expression :
  $n^2 + 3\cdot n = \big(2\cdot k\big)^2 + 3\cdot\big(2\cdot k\big) = 4\cdot k^2 + 6\cdot k$

  $= 2\cdot\big(2\cdot k^2 + 3\cdot k\big)$
  Cette expression est paire.

- Supposons que n est un entier impair. Il existe un entier k tel que : $n=2\cdot k+1$

  Étudions la parité de l'expression :
  $n^2 + 3\cdot n = \big(2\cdot k+1\big)^2 + 3\cdot\big(2\cdot k+1\big)$

  $= 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1 + 6\cdot k + 3 = 4\cdot k^2 + 10\cdot k + 4$

  $= 2\cdot\big(2\cdot k^2 + 5\cdot k + 2\big)$
  Cette expression est paire.

On vient d'établir que l'expression $n^2+3\cdot n$ définit un entier pair.

C.18

(1) Soit a et b deux entiers impairs, il existe m et n tel que :
$a = 2\times m + 1 \quad ; \quad b = 2\times n + 1.$

La somme de a et de b s'écrit :
$a + b = 2\times m + 1 + 2\times n + 1$

$= 2\times(m+n) + 2 = 2\times(m+n+1)$
Ce qui montre que la somme $a+b$ est un entier naturel pair.

(2) Soit a un entier pair et b ; de même, il existe deux entiers naturels m et n tels que :
$a = 2\times m \quad ; \quad b = 2\times n + 1.$

Ainsi, le produit s'écrit :
$a\times b = 2m\times(2n+1) = 2\times(2n\times m + m)$

Le produit $a\times b$ est un entier pair.

(3) Pour deux nombres entiers consécutifs, un est nécessairement pair et l'autre est impair.
D'après la question précédente, le produit d'un entier pair et d'un entier impair est pair.

(4) On considère la suite de cinq nombres entiers consécutifs ; notons m le plus petit d'entre eux.

Ainsi, ces cinq entiers peuvent s'écrire :
$m \quad ; \quad m+1 \quad ; \quad m+2 \quad ; \quad m+3 \quad ; \quad m+4$

La somme de ces cinq entiers s'écrit :
$m + (m+1) + (m+2) + (m+3) + (m+4)$

$= 5m + (1+2+3+4) = 5m + 10 = 5(m+2)$

On en déduit que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de cinq.

C.19

- Dans le cas où les deux entiers n et n' sont pairs :
  Il existe deux entiers k et k' deux entiers naturels tels que :
  $n = 2\cdot k \quad ; \quad n' = 2\cdot k'$

  La somme de ces deux entiers s'exprime par :
  $n + n' = 2\cdot k + 2\cdot k' = 2\cdot\big(k + k'\big)$
  On en déduit que cette somme est un entier pair.

- Dans le cas où les deux entiers n et n' sont impairs :
  Il existe deux entiers k et k' deux entiers naturels tels que :
  $n = 2\cdot k + 1 \quad ; \quad n' = 2\cdot k' + 1$

  La somme de ces deux entiers s'exprime par :
  $n + n' = \big(2\cdot k + 1\big) + \big(2\cdot k' + 1\big)$

  $= 2\cdot k + 2\cdot k' + 2 = 2\cdot\big(k + k' + 1\big)$
  On en déduit que cette somme est un entier pair.

Ainsi, la somme de deux entiers de même parité est un entier pair.

C.20 Notons a le premier de ses entiers et b le suivant.
Effectuons une disjonction de cas sur la parité du premier de ces deux entiers consécutifs :

- Si le premier entier est pair, il existe un entier k tel que :
  $a = 2\cdot k \quad ; \quad b = 2\cdot k + 1$

  La différence de ces deux entiers admet pour expression :
  $b^2 - a^2 = \big(2\cdot k+1\big)^2 - \big(2\cdot k\big)^2$

  $= 4\cdot k^2 + 2\cdot 2k\times 1 + 1^2 - 2^2\times k^2$

  $= 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1 - 4\cdot k^2 = 4\cdot k + 1 = 2\cdot\big(2k\big) + 1$

  La différence de ces deux carrés est donc un entier impair.

- Si le premier entier est impair, il existe un entier k tel que :
  $a = 2\cdot k + 1 \quad ; \quad b = 2\cdot k + 2$

  La différence de ces deux entiers admet pour expression :
  $b^2 - a^2 = \big(2\cdot k+2\big)^2 - \big(2\cdot k+1\big)^2$

  $= 4\cdot k^2 + 2\cdot 2k\times 2 + 2^2 - \big(4\cdot k^2 + 2\times 2k\times 1 + 1^2\big)$

  $= 4\cdot k^2 + 8\cdot k + 4 - 4\cdot k^2 - 4\cdot k - 1 = 4\cdot k + 3$

  $= 4\cdot k + 2 + 1 = 2\big(2k+1\big) + 1$

  La différence de ces deux carrés est donc un entier impair.