Seconde - Chapitre 1

C.1

(a) $x(2x-1)-3(5-x)=2x^2-x-15+3x$

$=2x^2+2x-15$

(b) $(3x+1)x-3(x-2)=3x^2+x-3x+6$

$=3x^2-2x+6$

C.2

(a) $3(x-5)-2x(1-2x)=3x-15-2x+4x^2$

$=4x^2+x-15$

(b) $3(x+2)-4(2-2x)$

$=3x+6-8+8x=11x-2$

C.3

(a) $(2x+1)(3-2x)=6x-4x^2+3-2x$

$=-4x^2+4x+3$

(b) $(x-3)(-x-1)=-x^2-x+3x+3$

$=-x^2+2x+3$

C.4

(a) $(3x+2)(5-2x)=15x-6x^2+10-4x$

$=-6x^2+11x+10$

(b) $(x-1)(3x^2-2)=3x^3-2x-3x^2+2$

$=3x^3-3x^2-2x+2$

C.5

(a) $(3-x)(2x+1)+2(x+2)$

$=(6x+3-2x^2-x)+(2x+4)$

$=6x+3-2x^2-x+2x+4=-2x^2+7x+7$

(b) $(x-1)(2x-1)-3(3+2x)$

$=2x^2-x-2x+1-9-6x=2x^2-9x-8$

C.6

(a) $(5x+1)(1-2x)-2(3x-1)$

$=5x-10x^2+1-2x-6x+2=-10x^2-3x+3$

(b) $(x+2)(2x-1)-(3-x)(5x-1)$

$=(2x^2-x+4x-2)-(15x-3-5x^2+x)$

$=(2x^2+3x-2)-(-5x^2+16x-3)$

$=72x^2+3x-2+5x^2-16x+3=7x^2-13x+1$

(c) $(3x+2)(5x+1)-(5x-1)$

$=15x^2+3x+10x+2-5x+1=15x^2+8x+3$

C.7

(a) $(3x-1)(2x+1)+(5-x)(2x+1)$

$=(2x+1)[(3x-1)+(5-x)]$

$=(2x+1)(3x-1+5-x)=(2x+1)(2x+4)$

(b) $x(2-x)+(3x+1)(2-x)=(2-x)[x+(3x+1)]$

$=(2-x)(4x+1)$

C.8

(a) $(x+3)(x+1)+(3x-1)(x+3)$

$=(x+3)[(x+1)+(3x-1)]=(x+3)(x+1+3x-1)$

$=(x+3)(4x)=4x(x+3)$

(b) $(2x+1)(4x-1)+(2+x)(2x+1)$

$=(2x+1)[(4x-1)+(2+x)]=(2x+1)(4x-1+2+x)$

$=(2x+1)(5x+1)$

C.9

(a) $(4-3x)(x+5)-(4-3x)(x+2)$

$=(4-3x)[(x+5)-(x+2)]$

$=(4-3x)(x+5-x-2)$

$=(4-3x)\times3=3(4-3x)$

(b) $(2x+5)(x+2)-(2x+5)=(2x+5)(x+2)-(2x+5)$

$=(2x+5)(x+2)-(2x+5)\times1$

$=(2x+5)[(x+2)-1]=(2x+5)(x+1)$

C.10

(a) $(5x+2)(3x+4)+(x-2)(3x+4)$

$=(3x+4)[(5x+2)+(x-2)]$

$=(3x+4)(5x+2+x-2)=(3x+4)6x$

$=6x(3x+4)$

(b) $(3-x)(2x+4)-(3-x)(3x-4)$

$=(3-x)[(2x+4)-(3x-4)]$

$=(3-x)(2x+4-3x+4)=(3-x)(-x+8)$

C.11

(a) $(2x+4)(3-3x)+(2x+4)$

$=(2x+4)(3-3x)+(2x+4)\times1$

$=(2x+4)[(3-3x)+1]=(2x+4)(4-3x)$

(b) $(5x+1)(7-3x)-(5x+1)$

$=(5x+1)[(7-3x)-1]=(5x+1)(6-3x)$

C.12

(a) $(3x-1)^2+(3x-1)(5x+4)$

$=(3x-1)[(3x-1)+(5x+4)]$

$=(3x-1)(3x-1+5x+4)=(3x-1)(8x+3)$

(b) $(x+5)(4-x)-(4-x)^2$

$=(4-x)[(x+5)-(4-x)]$

$=(4-x)(x+5-4+x)=(4-x)(2x+1)$

C.13

- **À l'aide d'une identité remarquable:**

(a) $(x+1)^2=x^2+2\times x\times1+1^2$

$=x^2+2x+1$

(b) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2$
$= 4x^2 + 12x + 9$
(c) $(x+6)^2 = x^2 + 2\times x\times 6 + 6^2$
$= x^2 + 12x + 36$
(d) $(5x+1) = (5x)^2 + 2\times 5x\times 1 + 1^2$
$= 25x^2 + 10x + 1$
(e) $(3x+3)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 3 + 3^2$
$= 9x^2 + 9x + 9x + 9 = 9x^2 + 18x + 9$
(f) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- **À l'aide de la double distributivité :**

(a) $(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x\times x + x\times 1 + 1\times x + 1\times 1$
$= x^2 + 2x + 1$
(b) $(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$
$= 2x\times 2x + 2x\times 3 + 3\times 2x + 3\times 3$
$= 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$
(c) $(x+6)^2 = (x+6)(x+6) = x\times x + x\times 6 + 6\times x + 6\times 6$
$= x^2 + 6x + 6x + 36 = x^2 + 12x + 36$
(d) $(5x+1)^2 = (5x+1)(5x+1)$
$= 5x\times 5x + 5x\times 1 + 1\times 5x + 1\times 1$
$= 25x^2 + 5x + 5x + 1 = 25x^2 + 10x + 1$
(e) $(3x+3)^2 = (3x+3)(3x+3)$
$= 3x\times 3x + 3x\times 3 + 3\times 3x + 3\times 3$
$= 9x^2 + 9x + 9x + 9 = 9x^2 + 18x + 9$
(f) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$
$= a^2 + 2ab + b^2$

C.14

- **À l'aide des identités remarquables :**

(a) $(x-2)^2 = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2$
$= x^2 - 4x + 4$
(b) $(x-3)^2 = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2$
$= x^2 - 6x + 9$
(c) $(3x-1)^2 = \big(3x\big)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2$
$= 9x^2 - 6x + 1$
(d) $(5x-1)^2 = \big(5x\big)^2 - 2\times 5x\times 1 + 1^2$
$= 25x^2 - 10x + 1$
(e) $(3x-2)^2 = \big(3x\big)^2 - 2\times 3x\times 2 - 2^2$
$= 9x^2 - 12x + 4$
(f) $(a-b)^2 = a^2 - 2\times a\times b + b^2$

- **À l'aide de la double distributivité :**

(a) $(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$
$= x\times x + x\times(-2) + (-2)\times x + (-2)\times(-2)$
$= x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$
(b) $(x-3)^2 = (x-3)(x-3)$
$= x\times x + x\times(-3) + (-3)\times x + (-3)\times(-3)$
$= x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$
(c) $(3x-1)^2 = (3x-1)(3x-1)$
$= 3x\times 3x + 3x\times(-1) + (-1)\times 3x + (-1)\times(-1)$
$= 9x^2 - 3x - 3x + 1 = 9x^2 - 6x + 1$
(d) $(5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$
$= 5x\times 5x + 5x\times(-1) + (-1)\times 5x + (-1)\times(-1)$
$= 25x^2 - 5x - 5x + 1 = 25x^2 - 10x + 1$
(e) $(3x-2)^2 = (3x-2)(3x-2)$
$= 3x\times 3x + 3x\times(-2) + (-2)\times 3x + (-2)\times(-2)$
$= 9x^2 - 6x - 6x + 4 = 9x^2 - 12x + 4$
(f) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$= a\times a + a\times(-b) + (-b)\times a + (-b)\times(-b)$
$= a^2 - a\times b - b\times a + b^2 = a^2 - 2\times a\times b + b^2$

C.15

(a) $(3x+3)^2 = 9x^2 + 18x + 9$
(b) $\left(3x - \dfrac{3}{2}\right)\left(3x + \dfrac{3}{2}\right) = 9x^2 - \dfrac{9}{4}$
(c) $(x+2)(3x-1) = 3x^2 + 5x - 2$
(d) $(4x-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$

C.16

(a) $(\ 2x\ +\ 4\ )^2 = 4x^2 + 16x + \mathbf{16}$
(b) $(\ 3x\ +\ 1\ )^2 = \mathbf{9}x^2 + 6x + 1$
(c) $(\ x\ -\ 2\ )^2 = \boldsymbol{x}^2 - 4x + 4$
(d) $(\ 4\ +\ 5x\ )^2 = 16 + 40x + \mathbf{2}5x^2$
(e) $(\ x\ -\ 3\ )^2 = x^2 - 6x + \mathbf{9}$

C.17

(a) $(x+1)^2 + (2x-1)^2 = (x^2 + 2x + 1) + (4x^2 - 4x + 1)$
$= 5x^2 - 2x + 2$
(b) $2x + 1 + (4x-3)^2 = 2x + 1 + (16x^2 - 24x + 9)$
$= 16x^2 - 22x + 10$
(c) $3 + (5+x)^2 = 3 + (25 + 10x + x^2)$
$= x^2 + 10x + 28$
(d) $\big[(x+1)(x-1)\big](2x-3) = \big(x^2-1\big)\big(2x-3\big)$
$= 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

C.18

(a) $2(3x-1)(2-x) = (6x-2)(2-x)$
$= 12x - 6x^2 - 4 + 2x$
$= -6x^2 + 14x - 4$
(b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
(c) $(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$
(d) $(5x-6)^2 = (5x)^2 - 2\times 5x\times 6 + 6^2$
$= 25x^2 - 60x + 36$

C.19

(1)

	a	b	$2\cdot ab$
(a)	$9x$	5	$90x$
(b)	$2x$	3	$12x$
(c)	$4x$	$\times$	$\times$
(i)	6	$2x$	$\times$

2. a. L'expression $81x^2+80x+25$ s'identifie à la première identité remarquable et oblige à choisir $a=9x$ et $b=3$.
Or, on a le développement suivant :
$(9x+5)^2 = 81x^2+90x+25$
Le terme du double produit ne coïncide pas avec celui de l'énoncé : on ne peut factoriser cette expression à l'aide des identités remarquables.
b. $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$
c. L'expression $16x^2-32x-16$ ne peut s'identifier avec la première ou la seconde identité remarquable, car le coefficient du terme en "x^2" et le terme numérique n'ont pas le même signe.
d. $36-4x^2=(6-2x)(6+2x)$

C.20

1.

	a	b	$2{\cdot}ab$
a	$5x$	2	$20x$
b	$3x$	3	$18x$
c	$2x$	3	$12x$
d	$5x$	4	$\times$

2. a. $25x^2+20x+4=(5x+2)^2$
b. $9x^2+18x+9=(3x+3)^2$
c. $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$
d. $25x^2-16=(5x-4)(5x+4)$

C.21

a. Cette expression s'identifie avec la troisième identité remarquable avec :
$a=x$; $b=4$
On a la factorisation : $x^2-16=\big(x+4\big)\big(x-4\big)$

b. On a l'égalité suivante :
$x^2-10x+25=x^2-10x+5^2$
Par identification avec la seconde identité remarquable, on choisit :
$a=x$; $b=5$
Ainsi, le terme du double produit doit avoir pour valeur :
$-2{\times}a{\times}b=-2{\times}x{\times}5=-10x$
Ce double produit correspond au terme en "x" de l'expression. On en déduit la factorisation :
$x^2-10x+25=(x-5)^2$

c. L'expression x^2-2x+1 s'identifie à la seconde identité remarquable avec : $a=x$; $b=1$
Vérifions le terme du double produit :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}x{\times}1=2x$
On a la factorisation :
$(x-1)^2=x^2-2{\times}x{\times}1+1^2=x^2-2x+1$

On en déduit la factorisation suivante :
$x^2-2x+1=(x-1)^2$

d. L'expression $x^2+14x+49$ s'identifie à la première identité remarquable avec :
$a=x$; $b=7$
Le terme du double produit a pour valeur :
$2ab=2{\times}x{\times}7=14x$
On en déduit la factorisation :
$x^2+14x+49=\big(x+7\big)^2$

C.22

a. On a l'égalité :
$x^2-20x+100=x^2-20x+10^2$
Par identification avec la seconde identité remarquable, on choisit les valeurs :
$a=x$; $b=10$
Le terme du double produit a pour valeur :
$-2{\times}a{\times}b=-2{\times}x{\times}10=-20x$
Ce terme correspond au terme en "x" de l'expression.
On en déduit la factorisation suivante :
$x^2-20x+100=(x-10)^2$

b. L'expression x^2-4x+4 s'identifie avec la seconde identité remarquable avec :
$a=x$; $b=2$
Le terme du double produit a pour valeur :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}x{\times}2=4x$
On en déduit la factorisation :
$x^2-4x+4=\big(x-2\big)^2$

c. L'expression x^2-9 s'identifie avec la troisième identité remarquable et avec : $a=x$; $b=3$
On a la factorisation :
$x^2-9=x^2-3^2=\big(x+3\big)\big(x-3\big)$

d. L'expression s'identifie avec la première identité remarquable avec :
$a=x$; $b=6$
Le terme du double produit a alors pour valeur :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}x{\times}6=12x$
On en déduit que cette expression est factorisable
$x^2+12x+36=\big(x+6\big)^2$

C.23

a. Cette expression s'identifie avec la seconde identité remarquable avec les valeurs :
$a=3x$; $b=2$
Dans ce cas, le terme du double produit a pour valeur :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}3x{\times}2=12x$
Ce terme correspond au terme en "x" de l'expression.
On en déduit la factorisation suivante :
$9x^2-12x+4=(3x)^2-12x+2^2$

b. Cette expression s'identifie avec la première identité remarquable avec les valeurs :
$a=x$; $b=1$
Avec ces valeurs, le terme du double produit a pour valeur :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}x{\times}1=2$
Ce terme correspond au terme en "x" de l'expression.
On en déduit la factorisation suivante :
$x^2+2x+1=(x+1)^2$

C.24

a. L'expression $25x^2-40x+16$ s'identifie avec la seconde identité remarquable avec :
$a=5x$; $b=4$
Le terme du double produit a pour valeur :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}5x{\times}4=40x$
On en déduit la factorisation :
$25x^2-40x+16=(5x-4)^2$

b. L'expression $81x^2-90x+25$ s'identifie avec la seconde identité remarquable et avec : $a=9x$; $b=5$
Le terme du double produit a pour valeur :
$2{\times}a{\times}b=2{\times}9x{\times}5=90x$

On en déduit la factorisation :
$81x^2 - 90x + 25 = (9x-5)^2$

c L'expression $49x^2+84x+36$ s'identifie avec la première identité remarquable et avec :
$a = 7x \quad ; \quad b = 6$
Le terme du double produit a pour valeur :
$2\times a\times b = 2\times 7x\times 6 = 84x$
On en déduit la factorisation :
$49x^2 + 84x + 36 = (7x+6)^2$

On a la factorisation suivante :
$49x^2 + 84x + 36 = (7x+6)^2$

d L'expression $100x-25$ s'identifie avec la troisième identité remarquable avec : $a=10x \quad ; \quad b=5$
On en déduit la factorisation :
$100x^2 - 25 = (10x+5)(10x-5)$

C.25

a $(x+2)^2 - 9 = (x+2)^2 - 3^2 = \big[(x+2)+3\big]\big[(x+2)-3\big]$
$= (x+2+3)(x+2-3) = (x+5)(x-1)$

b $25x^2 - 9 - (5x+3)(5-x)$
$= (5x)^2 - 3^2 - (5x+3)(5-x)$
$= (5x+3)(5x-3) - (5x+3)(5-x)$
$= (5x+3)\big[(5x-3)-(5-x)\big]$
$= (5x+3)\big(5x-3-5+x\big) = (5x+3)(6x-8)$

Remarque b : il est également possible de continuer la factorisation :
$25x^2 - 9 - (5x+3)(5-x) = (5x+3)(6x-8)$
$= (5x+3)\big[2\cdot(3x-4)\big] = 2(5x+3)(3x-4)$

C.26

a $(3x+1)^2 - (2-2x)^2$
$= \big[(3x+1)+(2-2x)\big]\big[(3x+1)-(2-2x)\big]$
$= \big[3x+1+2-2x\big]\big[3x+1-2+2x\big]$
$= (x+3)(5x-1)$

b $25x^2 - 4 - (5x+2)(5x-4)$
$= (5x)^2 - 2^2 - (5x+2)(5x-4)$
$= (5x+2)(5x-2) - (5x+2)(5x-4)$
$= (5x+2)(5x-2) - (5x+2)(5x-4)$
$= (5x+2)\big[(5x-2)-(5x-4)\big]$
$= (5x+2)(5x-2-5x+4) = 2(5x+2)$

C.27

a $25x^2 - 36 + (2-x)(5x-6)$
$= (5x+6)(5x-6) + (2-x)(5x-6)$
$= (5x-6)\big[(5x+6)+(2-x)\big] = (5x-6)(4x+8)$

En classe de seconde, on vous demandera de continuer la factorisation en remarquant que le nombre 2 peut être mis en facteur dans le second facteur. C'est-à-dire de terminer ainsi la factorisation :

$25x^2 - 36 + (2-x)(5x-6) = (5x-6)(4x+8)$
$= (5x-6)\big[2(2x+4)\big] = 2(5x-6)(2x+4)$

b $(2x+5)^2 - (1-x)^2$
$= \big[(2x+5)-(1-x)\big]\big[(2x+5)+(1-x)\big]$
$= (2x+5-1+x)(2x+5+1-x) = (3x+4)(x+6)$

C.28

a $(2x-8)(7x+1) - 16 + x^2$
$= 2(x-4)(7x+1) + x^2 - 16$
$= 2(x-4)(7x+1) + (x+4)(x-4)$
$= (x-4)\big[2(7x+1)+(x+4)\big]$
$= (x-4)(14x+2+x+4) = (x-4)(15x+6)$
$= 3(x-4)(5x+2)$

b $18x^2 - 24x + 8 + (3x-2)(2-x)$
$= 2\big(9x^2-12x+4\big) + (3x-2)(2-x)$
$= 2(3x-2)^2 + (3x-2)(2-x)$
$= (3x-2)\big[2(3x-2)+(2-x)\big]$
$= (3x-2)(6x-4+2-x) = (3x-2)(5x-2)$

C.29 L'expression proposée admet la factorisation suivante :

$$n^2 - 24n + 144 = n^2 - 2\times 12\times n + 12^2 = (n-12)^2$$

Or, il est évident que pour $n=12$, cette expression s'annule.

C.30 L'aire du rectangle $ABCD$ a pour valeur :
$\mathcal{A} = (5-x)(4x-2)$

Le périmètre du rectangle $ABCD$ a pour valeur :
$\mathcal{P} = 2\times\big[(5-x)+(4x-2)\big] = 2\times(5-x+4x-2)$
$= 2\times(3x+3)$

Pour déterminer la valeur de x demandée, résolvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
(5-x)(4x-2) &= 2\times(3x+3)\\
20x-10-4x^2+2x &= 6x+6\\
-4x^2+22x-10 &= 6x+6\\
-4x^2+22x-10-6x-6 &= 0\\
-4x^2+16x-16 &= 0\\
-\big(4x^2-16x+16\big) &= 0\\
-\big(2x-4\big)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$2x-4=0$	$2x-4=0$
$2x=4$	$2x=4$
$x=\dfrac{4}{2}$	$x=\dfrac{4}{2}$
$x=2$	$x=2$

La valeur recherchée est $x=2$.

C.31

- Le rectangle $ABCD$ a pour dimension x et $2x$. Son aire $\mathcal{A}_1$ a pour valeur :
  $\mathcal{A}_1 = x\times 2x = 2x^2$

- Le rectangle $CIFH$ a pour dimension $4-2x$ et $4-x$. Son aire $\mathcal{A}_2$ a pour valeur :
  $\mathcal{A}_2 = \big(4-2x\big)\big(4-x\big) = 16-4x-8x+2x^2$
  $= 2x^2 - 12x + 16$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisé, s'exprime par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2\\ &= 2x^2 + \big(2x^2 - 12x + 16\big) = 4x^2 - 12x + 16\end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur *(ou les valeurs)* de x réalisant une aire de $7\,cm^2$ pour le domaine grisé, nous posons l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 7\\ 4x^2 - 12x + 16 &= 7\\ 4x^2 - 12x + 16 - 7 &= 0\\ 4x^2 - 12x + 9 &= 0\end{aligned}$$

On identifie le membre de gauche de cette équation avec la première identité remarquable avec :

$a = 2x \quad ; \quad b = 3$

On en déduit les valeurs :

$a^2 = 4x \quad ; \quad 2ab = 12x \quad ; \quad b = 9$

L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 7\\ 4x^2 - 12x + 9 &= 0\\ \big(2x-3\big)^2 &= 0\\ \big(2x-3\big)\big(2x-3\big) &= 0\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} 2x - 3 = 0 & 2x - 3 = 0\\ 2x = 3 & 2x = 3\\ x = \dfrac{3}{2} & x = \dfrac{3}{2}\end{array}$$

On en déduit que le nombre x doit être égal à $\dfrac{3}{2}$ afin que le domaine grisé ait une aire de $7\,cm^2$.

C.32 x étant supérieur à 9, le segment le plus grand du triangle ABC est $[AB]$.

Cherchons la valeur de x afin que :

$$\begin{aligned}AB^2 &= AC^+BC^2\\ (x+1)^2 &= (x-1)^2 + 10^2\\ x^2 + 2x + 1 &= x^2 - 2x + 1 + 100\\ 4x &= 100\\ x &= \frac{100}{4}\\ x &= 25\end{aligned}$$

Ainsi, le triangle ABC est rectangle en C pour la valeur $x = 25$.