Cahier de vacances 2024

Entrée en math sup TSI
Exercices de préparation

La maîtrise de certains chapitres de terminales est essentielle pour commencer l'année efficacement. L'objectif de ce livret d'exercices est donc de s'entraîner aux calculs rencontrés lors des années précédentes.

Pour information, dans certains concours la calculatrice **n'est pas autorisée en mathématiques**. II convient donc de maîtriser les règles élémentaires de calculs (nombres relatifs, fractionnaires, opérations classiques...)

Essayez de faire le maximum des questions proposées. Pas d'inquiétude si vous n'arrivez pas à tout faire, beaucoup de choses seront reprises cette année. Prenez le temps de noter pour la rentrée les questions qui vous ont le plus posé de problème.

1 Rappels élémentaires de pratique calculatoire

☐ **Exercice 1 (fractions)**

Q 1 Simplifier les expressions :

$$A=\frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{6}+6}\ ;\quad B=3\times\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}\quad ;\quad C=2\times\frac{\frac{7}{2}+1}{\frac{3}{4}-5}-\frac{5}{3}\quad ;\quad D(x)=3+\frac{6}{x+2}\quad ;\quad E=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{15}{9}}{\frac{9}{15}\times\frac{5}{2}}$$

$$F(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\quad ;\quad G(x)=\frac{7}{x^2+3}-1\quad ;\quad H(x)=-2-\frac{3x-1}{x-2}\quad ;\quad I(x)=\frac{\frac{3x}{2}-5}{\frac{x}{3}+3}$$

$$J(x)=\frac{\frac{a^2}{3b}}{\frac{ac}{6b}}\ ;\quad K(x)=2x-1+\frac{3x}{2x-1}\quad ;\quad L(x)=-x+2-\frac{1}{3}\times\frac{2x}{x+2}$$

$$M(x)=\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2;\quad N=\left(3\sqrt{2}\right)^2-(\sqrt{2}-1)^2\quad ;\quad O=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2\quad ;$$

$$P=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2-\sqrt{3}}\quad ;Q=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}};\quad R=3-\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\quad S=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+5}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\quad ;\quad T=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

☐ **Exercice 2 (images/fractions)**

Q 2 On pose $f(x)=x\dfrac{x^2+1}{x-1}$. Présenter sous la forme la plus simple :

$$f(2), f(3), f\left(\frac{1}{x}\right), f(-x), f\left(\frac{3}{2}\right)$$

☐ **Exercice 3 (puissances)**

Q 3 Soient a et b deux réels non nuls. Simplifier au maximum les expressions ci-dessous :

$$A=\left(\left(a^2b^3\right)^4\right)^5\ ;\quad B=\left(a^3b^{-4}\right)^2\times\left(-2a^{-5}b^6\right)^3\quad ;\quad C=\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2\times\left(\frac{a}{4b}\right)^3\times\left(\frac{b^2}{a}\right)^2$$

Q 4 Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$$A=(-40)^{60}\times(-0,125)^{41}\ ;\quad B=40^{71}\times(1,25)^{48}\times 10^{-119}$$

Q 5 Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$$A=\frac{8^{73}\times 3^{-31}}{9^{-15}\times 2^{220}}\ ;\quad B=\frac{(5^2\times 10^{-5})^3}{(5\times 10^{-3})^5}\times\left(\frac{10^2}{5}\right)^2\ ;\quad C=\frac{(5^2\times 11^{-5})^{-3}}{(11^5\times 5^{-3})^2}\times\left(\frac{(11\times 5)^2}{5^2\times 11^4}\right)^3\ ;$$

☐ **Exercice 4 (avec des ln)**

Q 6 Exprimer en fonction de ln(2) et ln(5) les valeurs de :

$$\ln(10);\quad \ln(25);\quad \ln(16);\quad \ln(400);\quad \ln\left(\frac{2}{25}\right);\quad \ln\left(\frac{5}{8}\right);\quad \ln(0,4);\quad \ln(\sqrt{5});\quad \ln(2\sqrt{5});\quad \ln(5\sqrt{10})$$

☐ **Exercice 5 (avec des exp)**

Q 7 Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathrm{e}^{\ln(2)}\ ;\quad \mathrm{e}^{-\ln(3)}\ ;\quad \mathrm{e}^{2\ln(5)}\ ;\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(16)}\ ;\quad \ln\left(\mathrm{e}^3\right)\ ;\quad \ln\left(\mathrm{e}^{-4}\right)\ ;\quad \ln(\sqrt{e})\ ;\quad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\mathrm{e}^3\mathrm{e}^5\ ;\quad \mathrm{e}^{-5}\mathrm{e}^3\mathrm{e}^2\ ;\quad \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^2\ ;\quad \frac{1}{\mathrm{e}^7}\ ;\quad \frac{1}{\mathrm{e}^{-x+2}}\ ;\quad \mathrm{e}^{-x+3}\mathrm{e}^{2x+2}\ ;\quad \frac{\mathrm{e}^{3x+2}}{\mathrm{e}^{2x+3}}\ ;\quad \left(\mathrm{e}^{-2x+3}\right)^2$$

☐ **Exercice 6**

Q 8 Exprimer sous la forme de quotient de deux entiers les nombres suivants :

$$A=e^{2\ln(3)}-\frac{1}{3}\ ;\quad B=\frac{\ln\left(10^n\right)-n\ln(2)}{n\ln(5)}\text{ pour } n \text{ entier naturel non nul;}$$

$$C=e^{-2\ln(4)}-e^{-4\ln(2)}\ ;\quad D=e^{-n\ln(3)}+\frac{1}{3}\text{ pour } n\in\mathbb{N}$$

☐ **Exercice 7 (Développer / Factoriser)**

Q 9 Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A=(3x-2)^2-(2x-1)^2\ ;\quad B=(-2x+1)^2-2(x-3)^2\ ;\quad C=e^{2x}-\left(e^{-x}-e^x\right)^2$$

$$D=\left(2e^{2x}-1\right)^2-\left(e^{4x}-1\right)$$

Q 10 Factoriser les expressions suivantes :

$$E=(x+1)^2+3(x+1)\ ;\quad F=(x+1)^2-x-1\ ;\quad G=(x+1)(x+2)-(x+1)(2x-1)$$

2 Équations / inéquations

☐ **Exercice 8**

Q 11 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $3x+2>5x-1$ **b.** $\dfrac{3x-5}{2-x}\leqslant 0$ **c.** $4x^2+2x-1>0$

☐ **Exercice 9**

Résoudre les équations suivantes :

Q 12 $\ln\left(x^2-4\right)=\ln(5)+2\ln(3)$

Q 13 $\ln(x+2)=2\ln(x)$

Q 14 $\ln(x)+\ln(x+2)=\ln(9x-12)$

☐ **Exercice 10**

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

Q 15 $1,032^n\geqslant 4$

Q 16 $1,25^n\geqslant 12$

Q 17 $0,92^n\leqslant 0,5$

Q 18 $0,5^n\leqslant 0,1$

☐ **Exercice 11**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

Q 19 $\mathrm{e}^x=3$

Q 20 $\mathrm{e}^x+1=0$

Q 21 $\mathrm{e}^{x+3}=1$

Q 22 $\mathrm{e}^{2x+1}=\mathrm{e}^{-x-1}$

Q 23 $\mathrm{e}^{x^2+5\mathrm{x}-5}=e$

Q 24 $\mathrm{e}^{6x-1}=5$

Q 25 $\dfrac{\mathrm{e}^{3x-2}}{\mathrm{e}^{2x+5}}=1$

3 Les Fonctions

☐ **Exercice 12 (dérivée avec ln)**

Calculer (là où elle existe) la fonction dérivée des fonctions suivantes :

Q 26 $f(x)=x-2-\ln(x)$

Q 27 $f(x)=x\ln(x)$

Q 28 $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

Q 29 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$

Q 30 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$

Q 31 $f(x)=(\ln(x))^5$

Q 32 $f(x)=\dfrac{3\ln(x)+1}{\ln(x)}$

☐ **Exercice 13 (dérivée avec exp)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

Q 33 $f(x) = 3\mathrm{e}^x + x$

Q 34 $f(x) = x\mathrm{e}^x$

Q 35 $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 3}$

Q 36 $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 2}$

Q 37 $f(x) = \left(3x^2 + x\right)\mathrm{e}^x$

Q 38 $f(x) = \left(\mathrm{e}^x + x^2\right)^2$

Q 39 $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(2x)$

Q 40 $f(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{3x}$

Q 41 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{2\mathrm{e}^{-x} - 1}$

☐ **Exercice 14 (signe d'une fonction)**

Point méthode : pour déterminer le signe d'une fonction

- Connaître les signes des fonctions de références : fonctions affines, trinôme, exp et ln, factoriser ou mettre au même dénominateur.
- Résoudre directement une inéquation si les deux premiers points ne donnent rien faire une étude de fonctions.
- Si les deux premiers points ne donnent rien, essayer de faire une étude de fonction.

Application : dresser le tableau de signes des fonctions suivantes sur le domaine I :

Q 42 $f(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 - 4x + 3}$ sur $I = \mathbb{R}$,

Q 43 $g(x) = 3 - e^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$,

Q 44 $h(x) = \dfrac{x}{x - 2} - x$ sur $I = \mathbb{R} - \{2\}$,

Q 45 $i(x) = 3 - \ln(2x + 1)$ sur $I = \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

☐ **Exercice 15 (domaine de définition)**

Déterminer le domaine de définition (c'est à dire là où elles existent) des fonctions suivantes :

Q 46 $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

Q 47 $g(x) = \ln(\ln(x) + 2)$

Q 48 $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$

Q 49 $i(x) = \sqrt{3x - xe^x}$

☐ **Exercice 16 (tableau de variations)**

Dresser le tableau de variations complet des fonctions suivantes sur leur domaine de définition (à préciser en général). Justifier précisément les limites des fonctions aux bornes de leurs domaines :

Q 50 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x + 1)^2}$

Q 51 $g(x) = x - \ln\left(\dfrac{x}{2x + 1}\right)$ sur $]0\,;+\infty[$

Q 52 $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Q 53 $i(x) = xe^x - e^x + 1$ sur $[0\,;+\infty[$

Q 54 $k(x) = x\ln(x)$

Tourner la page SVP...

4 Étude de fonction

☐ **Exercice 17**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 - \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$

Q 55 Déterminer les valeurs exactes de $g(1)$ et de $g(2)$

Q 56 On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Interpréter graphiquement cette limite.

Q 57 On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

Q 58 **a.** Montrer que $g'(x) = \dfrac{x-2}{\mathrm{e}^x}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de g

d. Grâce au tableau de variation, en déduire que $g(x)$ est positif sur $[1\,;+\infty[$

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} + \ln(x-1)$
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O ; I ; J) d'unité graphique 1 cm.

Q 59 On admet que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe C_f dont on précisera une équation.

Q 60 On note f' la fonction dérivée de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{x-1}$

b. En déduire que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$

c. En déduire le sens de variation de f sur $]1\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f

Q 61 **a.** Calculer $f(2)$ et $f'(2)$

b. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Partie C : Représentation graphique

Dans le repère défini précédemment, tracer les droites Δ et T puis la courbe C_f.