C.1

1) L'urne contient :

- cinq boules blanches représentant un gain de 1 €;
- deux boules rayées représentant un gain de 2 €;
- deux carrés blanc représentant un gain de 2 €;
- deux carrés rayés représentant un gain de 3 €.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ associant le gain pour chaque objet de l'urne donne les valeurs 1, 2 et 3. Elle admet pour loi de probabilité :

x	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$

2) L'urne contient :

- trois boules blanches représentant un gain de 1 €;
- une boule rayée représentant un gain de 2 €;
- quatre carrés blanc représentant un gain de 2 €;
- trois carrés rayés représentant un gain de 3 €.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ associant le gain pour chaque objet de l'urne donne les valeurs 1, 2 et 3. Elle admet pour loi de probabilité :

x	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$

C.2

1) L'urne contient un total de 9 boules. On a les probabilités suivantes :

- Il y a 3 boules possédant le numéro 1 :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
- Il y a 3 boules possédant le numéro 2 :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
- Il y a 2 boules possédant le numéro 3 :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \frac{2}{9}$$
- Il y a 1 boule possédant le numéro 4 :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \frac{1}{9}$$

On synthétise ces résultats dans le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2) On a les probabilités suivantes :

- Il n'y a que 2 boules bleues dans l'urne possédant un numéro pair :
$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=2) = \frac{2}{9}$$
- Il n'y a que 2 boules non-bleues dans l'urne possédant un numéro pair :
$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=3) = \frac{2}{9}$$
- Ainsi, il reste 5 boules qui ne gagnent rien :
$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0) = \frac{5}{9}$$

On synthétise ces résultats dans le tableau ci-dessous :

k	0	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=k)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

C.3

Le tableau ci-dessous présente les diviseurs et le nombre de diviseurs pour tous les entiers compris entre 1 et 12 :

k	diviseurs de k	Nombre de diviseurs de k
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\}$.

Il y a :

- 1 face dont le nombre possède un diviseur ;
- 5 faces dont le nombre possède deux diviseurs ;
- 2 faces dont le nombre possède trois diviseurs ;
- 3 faces dont le nombre possède quatre diviseurs ;
- 1 face dont le nombre possède six diviseurs ;

Comme il y a équiprobabilité entre les faces du dé, on en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x	1	2	3	4	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

C.4

1) Pour que ce tableau présente une loi de probabilité, il faut que la somme des probabilités des événements élémentaire vaille 1. Ainsi, le nombre a vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=6) &= 1 \\ 0{,}72 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=6) &= 1 \\ \mathcal{P}(\mathcal{X}=6) &= 1 - 0{,}72 \\ \mathcal{P}(\mathcal{X}=6) &= 0{,}28 \end{aligned}$$

Voici le tableau complété :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	0,28

(2) (a) On a :
$\{\mathcal{X}\leqslant 3\} = \{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=2\}\cup\{\mathcal{X}=3\}$
Ceci étant une réunion d'événements disjoints entre eux :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$
$= 0{,}05+0{,}12+0{,}15$
$= 0{,}32$

(b) On a :
$\{\mathcal{X}>3\} = \{\mathcal{X}=4\}\cup\{\mathcal{X}=5\}\cup\{\mathcal{X}=6\}$
On en déduit la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}>3) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=4)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)$
$= 0{,}23+0{,}17+0{,}28$
$= 0{,}68$

C.5

(1) Ce tableau représente une loi de probabilité, car toutes ces valeurs sont des nombres appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ et car :
$0{,}15+0{,}24+0{,}35+0{,}26 = 1$

(2) (a) On a : $\{\mathcal{X}\geqslant 2\} = \{\mathcal{X}=2\}\cup\{\mathcal{X}=3\}$
où les événements $\{\mathcal{X}=2\}$ et $\{\mathcal{X}=3\}$ sont disjoints.
On en déduit :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2) = 0{,}35+0{,}26 = 0{,}61$

(b) On a : $\{\mathcal{X}<2\} = \{\mathcal{X}=0\}\cup\{\mathcal{X}=1\}$
où les événements $\{\mathcal{X}=0\}$ et $\cup\{\mathcal{X}=1\}$ sont disjoints
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<2) = 0{,}15+0{,}24 = 0{,}39$

(c) Les événements $\{\mathcal{X}=1\}$ et $\{\mathcal{X}=3\}$ sont disjoints :
$\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\}) = 0{,}24+0{,}26 = 0{,}5$

C.6

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}<3) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$
$= 0{,}34+0{,}3+0{,}19 = 0{,}83$

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 3) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=3)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)$
$= 0{,}15+,002 = 0{,}17$

(c) $\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}<5) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=2)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$
$= 0{,}19+0{,}15 = 0{,}34$

C.7

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- la face "1" rapporte 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

(1) Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ■ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

(2) Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ■ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

C.8

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- les faces "1" et "3" rapportent 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- la face "5" ne rapporte rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

(1) Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ■ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

(2) Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ■ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

C.9

(1) (a) Par complémentarité, on a :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}>3) = 1-\mathcal{P}(\overline{\mathcal{X}>3}) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3)$
$= 1-0{,}51 = 0{,}49$

(b) Par complémentarité, on a :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 4) = 1-\mathcal{P}(\overline{\mathcal{X}\geqslant 4}) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<4) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3)$
$= 1-0{,}51 = 0{,}49$

(2) (a) L'événement $\{\mathcal{X}\leqslant 2\}$ admet la décomposition :
$\{\mathcal{X}\leqslant 2\} = \{\mathcal{X}\leqslant 1\}\cup\{\mathcal{X}=2\}$
Les deux événements $\{\mathcal{X}\leqslant 1\}$ et $\{\mathcal{X}=2\}$ étant disjoint, on a :
$\{\mathcal{X}\leqslant 1\}\cap\{\mathcal{X}=2\} = \varnothing \implies \mathcal{P}(\{\mathcal{X}\leqslant 1\}\cap\{\mathcal{X}=2\}) = 0$
La formule de la probabilité de la réunion d'événements permet d'écrire :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)-\mathcal{P}(\{\mathcal{X}\leqslant 1\}\cap\{\mathcal{X}=2\})$
$0{,}34 = 0{,}275+\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)-0$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = 0{,}34-0{,}275$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = 0{,}065$

(b) Par un raisonnement analogue à la question précédente, on a :
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$
$0{,}51 = 0{,}34+\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = 0{,}51-0{,}34$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = 0{,}17$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 6) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)$
$1 = 0{,}84+\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=6) = 1-0{,}84$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=6) = 0{,}16$

(3) (a) On utilisera la relation :
$\{\mathcal{X}\leqslant 5\} = \{\mathcal{X}<2\}\cup\{2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5\}$
où le membre de droite est la réunion de deux ensembles disjoints.
On en déduit l'égalité des probabilités :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5) = \mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}<2) + \mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5) = \mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 1) + \mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1) + \mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$0{,}84 = 0{,}275 + \mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5) = 0{,}84 - 0{,}275$$
$$\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5) = 0{,}565$$

b
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5) = \mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 3) + \mathcal{P}(3<\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3) + \mathcal{P}(3<\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$0{,}84 = 0{,}51 + \mathcal{P}(3<\mathcal{X}\leqslant 5)$$
$$\mathcal{P}(3<\mathcal{X}\leqslant 5) = 0{,}84 - 0{,}51$$
$$\mathcal{P}(3<\mathcal{X}\leqslant 5) = 0{,}33$$

C.10 L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ se détermine par la formule :

$$E(\mathcal{X}) = 0\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 1\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + 2\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) + 3\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) + 6\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)$$
$$= 0\times 0{,}34 + 1\times 0{,}3 + 2\times 0{,}19 + 3\times 0{,}15 + 6\times 0{,}02 = 1{,}25$$

C.11 L'espérance a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 0\times 0{,}4 + 1\times 0{,}38 + 2\times 0{,}15 + 5\times 0{,}05 + 10\times 0{,}02$$
$$= 0 + 0{,}38 + 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}20$$
$$= 1{,}13$$

C.12 L'espérance a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{k=0}^{3} k\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=k) = 0\times 0{,}51 + 1\times 0{,}08 + 2\times 0{,}17 + 3\times 0{,}24$$
$$= 0 + 0{,}08 + 0{,}34 + 0{,}72 = 1{,}14$$

C.13 La variable aléatoire $\mathcal{X}$ peut prendre les valeurs 0, 80 et 280.

On a les égalités d'événements suivants :

- $\{\mathcal{X}=0\} = A$
- $\{\mathcal{X}=80\} = \overline{A}\cap\overline{B}$
- $\{\mathcal{X}=280\} = \overline{A}\cap B$

Ainsi, on a la loi de probabilité suivante :

x	0	80	280
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	0,2	0,72	0,08

L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est donnée par le calcul :

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{3} x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i) = 0\times 0{,}2 + 80\times 0{,}72 + 280\times 0{,}08$$
$$= 0 + 57{,}6 + 22{,}4 = 80$$

C.14

1 a Les valeurs associées à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ sont 0, 1 et 10. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour loi de probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \frac{5}{16} \;;\; \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \frac{10}{16} \;;\; \mathcal{P}(\mathcal{X}=10) = \frac{1}{16}$$

b L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 1\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + 10\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$$
$$= 0\times\frac{5}{16} + 1\times\frac{10}{16} + 10\times\frac{1}{16} = 0 + \frac{10}{16} + \frac{10}{16} = \frac{20}{16} \approx 1{,}25$$

2 a Les valeurs associées à la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ sont 0, 1 et 10. La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ a pour loi de probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0) = \frac{20}{26} \;;\; \mathcal{P}(\mathcal{Y}=1) = \frac{3}{26} \;;\; \mathcal{P}(\mathcal{Y}=10) = \frac{3}{26}$$

b La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ a pour espérance :

$$E(\mathcal{Y}) = 0\times\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0) + 1\times\mathcal{P}(\mathcal{Y}=1) + 10\times\mathcal{P}(\mathcal{Y}=10)$$
$$= 0\times\frac{20}{26} + 1\times\frac{3}{26} + 10\times\frac{3}{26} = 0 + \frac{3}{26} + \frac{30}{26} = \frac{33}{26}$$
$$\approx 1{,}269 \approx 1{,}27$$

3 L'espérance étant à peine plus grande lorsqu'on tire une boule de l'urne B, Paul doit choisir l'urne B.

C.15

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- la face "1" rapporte 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

■ $\frac{9}{6}$ □ $\frac{10}{6}$ □ $\frac{11}{6}$ □ $\frac{12}{6}$

C.16

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- les faces "1" et "3" rapportent 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- la face "5" ne rapporte rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

□ $\frac{9}{6}$ □ $\frac{10}{6}$ ■ $\frac{11}{6}$ □ $\frac{12}{6}$

C.17

- Étudions les différents ensembles mis en jeu dans la définition de ce jeu :
  - L'événement $A\cap C$ contient 3 cartes ;
  - L'événement $\overline{A}\cap B$ contient 9 cartes ;
  - L'événement $A\cap B$ contient 3 cartes.
- On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	4
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{17}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{32}$

- On a l'espérance mathématique suivante :

$$E(\mathcal{X}) = 0\times\frac{17}{32} + 1\times\frac{3}{32} + 2\times\frac{9}{32} + 4\times\frac{3}{32}$$
$$= \frac{3}{32} + \frac{18}{32} + \frac{12}{32} = \frac{33}{32}$$

C.18 On notera x le nombre de points associés à chacune des voyelles :

- Dans le sac, il y a 15 jetons au total dont 6 voyelles et 9 consonnes.
  - la probabilité de tirer une voyelle est $\frac{6}{15}$
  - la probabilité de tirer une consonne est $\frac{9}{15}$

  On résume la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ dans le tableau ci-dessous :

k	x	$2{\cdot}x$
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$

- $$E(\mathcal{X}) = \frac{8}{5}$$
$$x\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=x) + (2{\cdot}x)\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=2{\cdot}x) = \frac{8}{5}$$
$$x\times\frac{6}{15} + 2x\times\frac{9}{15} = \frac{8}{5}$$
$$\frac{6{\cdot}x}{15} + \frac{18{\cdot}x}{15} = \frac{8}{5}$$
$$\frac{24{\cdot}x}{15} = \frac{8}{5}$$

  A l'aide du produit en croix :

$$24{\cdot}x\times5 = 15\times8$$
$$120{\cdot}x = 120$$
$$x = \frac{120}{120}$$
$$x = 1$$

  On en déduit que, dans cette expérience aléatoire, une voyelle rapporte 1 point et une consonne rapporte 2 points.

C.19

(1) $E(\mathcal{X}) = -2{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=-2) + 1{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + 3{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) + 5{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) + 8{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=8)$
$= -2\times0{,}3 + 1\times0{,}1 + 3\times0{,}2 + 5\times0{,}1 + 8\times0{,}3$
$= -0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}5 + 2{,}4$
$= 3$

(2) (a) Voici le tableau complété :

k	-2	1	3	5	8
$k-E(\mathcal{X})$	-5	-2	0	2	5
$\left[k-E(\mathcal{X})\right]^2$	25	4	0	4	25
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

(b) On en déduit la valeur de la variance :

$V(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=-2)\cdot\left[-2-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1)\cdot\left[1-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=3)\cdot\left[3-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=5)\cdot\left[5-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=8)\cdot\left[8-E(\mathcal{X})\right]^2$
$= 25\times0{,}3 + 4\times0{,}1 + 0\times0{,}2 + 4\times0{,}1 + 25\times0{,}3$
$= 7{,}5 + 0{,}4 + 0 + 0{,}4 + 7{,}5 = 15{,}8$

C.20

(1) La somme des gains de cette tombola est égale à :
$2\times50 + 10\times20 + 20\times10 = 100 + 200 + 200 = 500\,€$

(2) Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	10	20	50
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{68}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$

(3) (a) On calcule l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ par la formule :

$E(\mathcal{X}) = 0{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)+10{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)+20{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=20)+50{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=50)$
$= 0\times\frac{68}{100} + 10\times\frac{20}{100} + 20\times\frac{10}{100} + 50\times\frac{2}{100}$
$= 0 + 2 + 2 + 1 = 5$

(b) On calcule la variance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ à travers la formule :

$V(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)\cdot\left[0-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=10)\cdot\left[10-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=20)\cdot\left[20-E(\mathcal{X})\right]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=50)\cdot\left[50-E(\mathcal{X})\right]^2$
$= \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)\cdot(0-5)^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=10)\cdot(10-5)^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=20)\cdot(20-5)^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=50)\cdot(50-5)^2$
$= \frac{68}{100}\times(-5)^2 + \frac{20}{100}\times5^2 + \frac{10}{100}\times15^2 + \frac{2}{100}\times45^2$
$= 85$

On en déduit l'écart-type : $\sigma(\mathcal{X}) \approx 9{,}2195$
$\approx 9{,}2$

C.21

(1) (a) La somme des gains mis en jeu dans cette tombola a pour valeur :
$2\times100 + 15\times10 = 200 + 150 = 350\,€$.

(b) 100 tickets d'une valeur de 10 € sont mis en vente, rapportant ainsi une vente de :
$100\times10 = 1\,000\,€$
Le bénéfice réalisé par les organisateurs de la tombola est de :
$1000 - 350 = 650\,€$.

(2) Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	10	100
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{83}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{2}{100}$

(3) (a) Les gains possibles lors de la tombola sont 0, 10 et 100 :

$E(\mathcal{X}) = 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 10\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=10) + 100\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=100)$
$= 0\times\frac{83}{100} + 10\times\frac{15}{100} + 100\times\frac{2}{100}$
$= 0 + 1{,}5 + 2 = 3{,}5\,€$

(b) Par définition de la variance d'une variable aléatoire, on a :

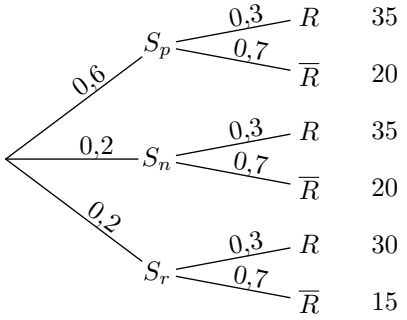
$$V(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)\cdot\big[0-E(\mathcal{X})\big]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=10)\cdot\big[10-E(\mathcal{X})\big]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}=100)\cdot\big[100-E(\mathcal{X})\big]^2$$
$$= \frac{83}{100}\cdot(0-3{,}5)^2 + \frac{15}{100}\cdot(10-3{,}5)^2 + \frac{2}{100}\cdot(100-3{,}5)^2$$
$$= \frac{83}{100}\cdot(-3{,}5)^2 + \frac{15}{100}\times 6{,}5^2 + \frac{2}{100}\times 96{,}5^2$$
$$= 202{,}75$$

On en déduit l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

$$\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V} \approx 14{,}239 \approx 14{,}24$$

C.22

(1) On a l'arbre de probabilité suivante :



Sur la colonne de droite est représentée le prix payé dans chaque cas présenté par cet arbre de choix.

(2) (a) D'après l'arbre de probabilité, on a :

$$\mathcal{P}(S_p \cap \overline{R}) = 0{,}6\times 0{,}7 = 0{,}42$$

(b) Les événements S_P, $S_n \cap \overline{R}$ et $S_r \cap \overline{R}$ sont disjoints entre eux. On a l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(S_p \cup \overline{R}) = \mathcal{P}(S_p) + \mathcal{P}(S_n \cap \overline{R}) + \mathcal{P}(S_r \cap \overline{R})$$
$$= 0{,}6 + 0{,}2\times 0{,}7 + 0{,}2\times 0{,}7$$
$$= 0{,}6 + 0{,}14 + 0{,}14 = 0{,}88$$

(3) (a) D'après l'arbre de probabilité présenté à la question (1), la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend 4 valeurs distinctes :

15 ; 20 ; 30 ; 35

On a les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15) = \mathcal{P}(S_R \cap \overline{R}) = 0{,}2\times 0{,}7 = 0{,}14$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=20) = \mathcal{P}(S_p \cap \overline{R}) + \mathcal{P}(S_n \cap \overline{R})$
  $= 0{,}6\times 0{,}7 + 0{,}2\times 0{,}7 = 0{,}42 + 0{,}14 = 0{,}56$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=30) = \mathcal{P}(S_r \cap R) = 0{,}2\times 0{,}3 = 0{,}06$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=35) = \mathcal{P}(S_p \cap R) + \mathcal{P}(S_n \cap R)$
  $= 0{,}6\times 0{,}3 + 0{,}2\times 0{,}3 = 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}24$

En résumé, on obtient le tableau ci-dessous représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

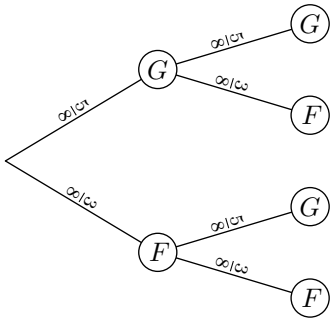
k	15	20	30	35
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,14	0,56	0,06	0,24

(b) La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour espérance :

$$E(\mathcal{X}) = 15\mathcal{P}(\mathcal{X}=15) + 20\mathcal{P}(\mathcal{X}=20) + 30\mathcal{P}(\mathcal{X}=30) + 35\mathcal{P}(\mathcal{X}=35)$$
$$= 15\times 0{,}14 + 20\times 0{,}56 + 30\times 0{,}06 + 35\times 0{,}24$$
$$= 2{,}1 + 11{,}2 + 1{,}8 + 8{,}4 = 23{,}5$$

C.23

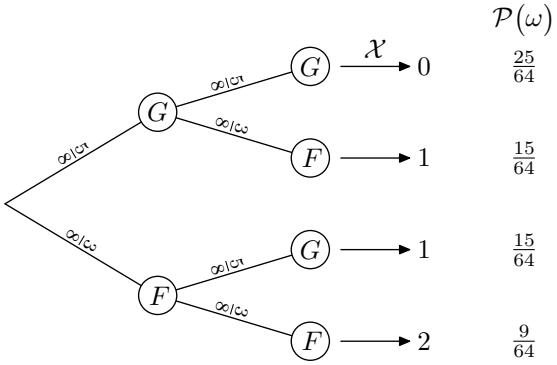
(1) Cette expérience aléatoire donne l'arbre pondéré ci-dessous :



(2) (a) La variable aléatoire $\mathcal{X}$ peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

Pour dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, on complète l'arbre de probabilité avec :

- la valeur associée par la variable aléatoire $\mathcal{X}$ à chacune des branches de l'arbre ;
- la probabilité de chacune des branches.



La loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est présentée dans le tableau ci-dessous :

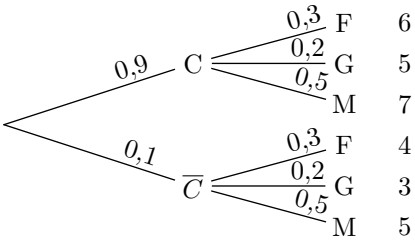
k	0	1	2
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{25}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{9}{64}$

(b) L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 0\times\frac{25}{64} + 1\times\frac{30}{64} + 2\times\frac{9}{64} = \frac{30}{64} + \frac{18}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

C.24

(1) Voici l'arbre de probabilité complété :



On a mis sur la droite les prix relatifs à la question (3).

La colonne de droite présente le montant de la facture en fonction des choix du client : cette colonne sera utilisée lors de la question (3).

(2) On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\overline{C} \cap F) = 0{,}1\times 0{,}3 = 0{,}03$$

(3) (a) La variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend les valeurs suivantes :

3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

(b) La variable aléatoire admet le tableau suivant pour loi de probabilité :

k	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,02	0,03	0,23	0,27	0,45

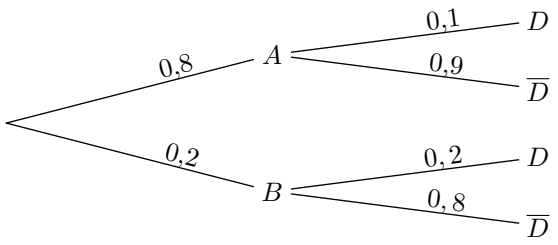
c La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour espérance :

$E(\mathcal{X}) = 0{,}02\times3 + 0{,}03\times4 + 0{,}23\times5 + 0{,}27\times6 + 0{,}45\times7$

$= 0{,}06 + 0{,}12 + 1{,}15 + 1{,}62 + 3{,}15 = 6{,}1$

C.25

1 Voici l'arbre complété :



2 a On a la relation :

$\mathcal{P}(B\cap\overline{D}) = \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}_B(\overline{D}) = 0{,}2\times0{,}8 = 0{,}16$

b Les événements A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a la relation :

$\mathcal{P}(\overline{B}) = \mathcal{P}(A\cap\overline{D}) + \mathcal{P}(B\cap\overline{D})$

$= \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(\overline{D}) + \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}_B(\overline{D})$

$= 0{,}8\times0{,}9 + 0{,}2\times0{,}8 = 0{,}72 + 016 = 0{,}88$

c Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$\mathcal{P}_D(A) = \dfrac{\mathcal{P}(A\cap D)}{\mathcal{P}(D)} = \dfrac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(D)}{\mathcal{P}(D)}$

$= \dfrac{0{,}8\times0{,}1}{1-0{,}88} \approx 0{,}66666 \approx 0{,}667$

3 a On a les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=250) = \mathcal{P}(A\cap\overline{D}) = 0{,}8\times0{,}9 = 0{,}72$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=300) = \mathcal{P}(A\cap D) + \mathcal{P}(B\cap\overline{D})$

  $= 0{,}8\times0{,}1 + 0{,}2\times0{,}8 = 0{,}08 + 0{,}16 = 0{,}24$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=350) = \mathcal{P}(B\cap D) = 0{,}2\times0{,}2 = 0{,}04$

La loi de probabilité de $\mathcal{X}$ est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	250	300	350
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,72	0,24	,04

4 L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

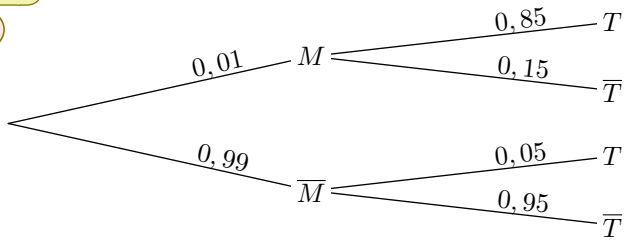
$E(\mathcal{X}) = 250\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=250) + 300\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=300) + 350\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=350)$

$= 250\times0{,}72 + 300\times0{,}24 + 350\times0{,}04$

$= 180 + 72 + 14 = 266$

C.26

1



2 a On recherche la probabilité de l'événement $M\cap T$; en utilisant l'arbre de probabilité, on obtient :

$\mathcal{P}(M\cap T) = \mathcal{P}(M)\cdot\mathcal{P}_M(T)$

$= 0{,}01\times0{,}85 = 0{,}0085$

On a la décomposition suivante de l'événement T :

$T = (M\cap T)\cup(\overline{M}\cap T)$.

Les deux éléments de cette réunion sont disjoints entre eux ; d'après la formule des probabilités totales, on a :

$\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(M\cap T) + \mathcal{P}(\overline{M}\cap T)$

$= \mathcal{P}(M)\cdot\mathcal{P}_M(T) + \mathcal{P}(\overline{M})\cdot\mathcal{P}_{\overline{M}}(T)$

$= 0{,}01\times0{,}85 + 0{,}99\times0{,}05$

$= 0{,}058$

3 On recherche la probabilité $\mathcal{P}_T(M)$:

D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$\mathcal{P}_T(M) = \dfrac{\mathcal{P}(M\cap T)}{\mathcal{P}(T)}$

D'après les résultats de la question 2 :

$= \dfrac{0{,}0085}{0{,}058} \approx 0{,}147$

4 a Notons que $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager ; son espérance a pour valeur :

$E(\mathcal{X}) = 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 100\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=100) + 1\,000\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=1\,000)$

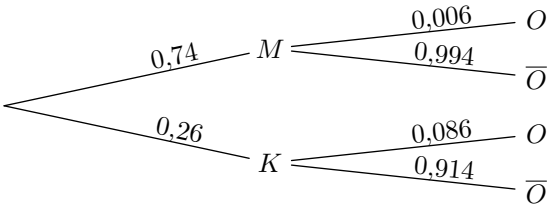
$= 0\times0{,}9405 + 100\times0{,}0580 + 1\,000\times0{,}0015 = 7{,}3$

b L'espérance présente montre qu'en moyenne l'éleveur dépensera 7,3 € par bête ; ainsi, pour 200 bêtes, il pourra espérer dépenser :

$200\times7{,}3 = 1460$ €.

C.27

1 a Voici l'arbre complété :



b D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

- $\mathcal{P}_M(O) = \dfrac{\mathcal{P}(M\cap O)}{\mathcal{P}(M)}$

  $0{,}006 = \dfrac{\mathcal{P}(M\cap O)}{0{,}74}$

  $\mathcal{P}(M\cap O) = 0{,}006\times0{,}74$

  $\mathcal{P}(M\cap O) = 0{,}00444$
- $\mathcal{P}_K(O) = \dfrac{\mathcal{P}(K\cap O)}{\mathcal{P}(K)}$

  $0{,}086 = \dfrac{\mathcal{P}(K\cap O)}{0{,}26}$

  $\mathcal{P}(K\cap O) = 0{,}086\times0{,}26$

  $\mathcal{P}(K\cap O) = 0{,}02236$

L'étude portant sur les médecins et les kinésithérapeutes, les événements M et K forment une partition de l'univers d'étude.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$\mathcal{P}(O) = \mathcal{P}(O\cap M) + \mathcal{P}(O\cap K)$

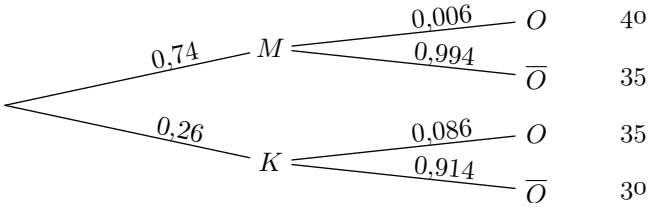
$= 0{,}00444 + 0{,}02236 = 0{,}0268$

c La probabilité demandée est "*Sachant que le praticien*

pratique l'ostéopathie, quelle est la probabilité que ce soit un kinésithérapeute" : c'est la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_O(K)$.
Par la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_O(K) = \frac{\mathcal{P}(O\cap K)}{\mathcal{P}(O)} = \frac{0{,}02236}{0{,}0268} \approx 0{,}8343 \approx 0{,}83$$

2 a Voici l'arbre de probabilité avec indiqué à droite le prix des consultations pour chaque événement :



On en déduit les probabilités associées à la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=30) = \mathcal{P}(K\cap\overline{0}) = 0{,}237\,64$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=35) = \mathcal{P}(M\cap\overline{0}) + \mathcal{P}(K\cap O)$
  $= 0{,}735\,56 + 0.022\,36 = 0{,}757\,92$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=40) = \mathcal{P}(M\cap 0) = 0{,}004\,44$

k	30	35	40
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,237 64	0,757 92	0,004 44

b On en déduit l'espérance :

$$E(\mathcal{X}) = 30\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=30) + 35\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=35) + 40\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=40)$$
$$= 33{,}834$$

C.28

1 Voici les différentes probabilités de choisir une urne plutôt qu'une autre :

$$\mathcal{P}(U_1) = \frac{1}{6} \quad ; \quad \mathcal{P}(U_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathcal{P}(U_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 a Dans l'urne U_1, il y a deux boules noires sur cinq boules au total ; ainsi, la probabilité de tirer une noire sachant qu'on est en train de tirer une boule dans l'urne U_1 est de :

$$\mathcal{P}_{U_1}(N) = \frac{2}{5}$$

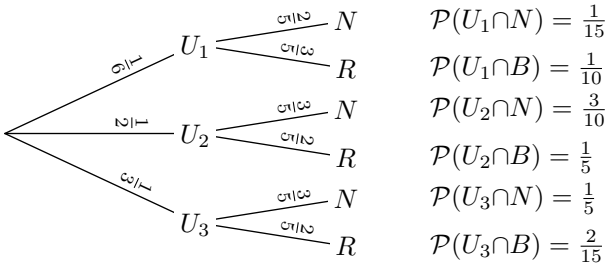
b L'urne U_2 contient trois boules noires sur un total de cinq boules ; ainsi, la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 est de :

$$\mathcal{P}_{U_2}(N) = \frac{3}{5}$$

c Pour les mêmes raisons, on a :

$$\mathcal{P}_{U_3}(N) = \frac{3}{5}$$

3 Ainsi, on a l'arbre de probabilité conditionnelle suivant :



4 Les événements U_1, U_2, U_3 sont disjoints entre eux et forment à eux trois l'ensemble des possibilités, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(U_1\cap N) + \mathcal{P}(U_2\cap N) + \mathcal{P}(U_3\cap N)$$
$$= \frac{1}{15} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{2}{30} + \frac{9}{30} + \frac{6}{30} = \frac{17}{30}$$

5 On considère la variable $\mathcal{X}$ aléatoire qui associe à la boule tirée le gain obtenu. On a :

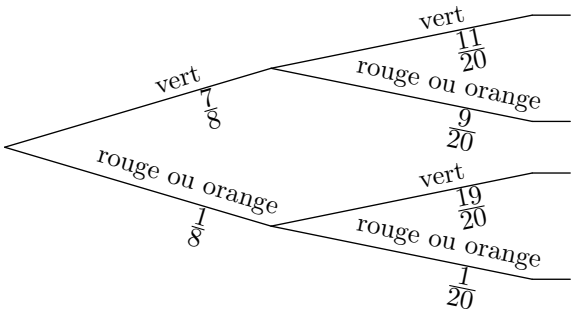
- $\{\mathcal{X}=5\} = N$; on en déduit :
  $$\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) = \mathcal{P}(N) = \frac{17}{30}$$
- $\{\mathcal{X}=0\} = R$; on en déduit :
  $$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0\} = \mathcal{P}(R) = \frac{13}{30}$$

Cette variable aléatoire a pour espérance :

$$E(\mathcal{X}) = 5\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) + 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = 5\times\frac{17}{30} \approx 2{,}8$$

C.29

1



2 L'arbre de probabilité conditionnelle nous permet d'obtenir rapidement les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\overline{E_1}\cap E_2) = \mathcal{P}(\overline{E_1})\times\mathcal{P}_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{7}{8}\times\frac{9}{20} = \frac{63}{160}$
- $\mathcal{P}(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}) = \mathcal{P}(\overline{E_1})\times\mathcal{P}_{\overline{E_1}}(\overline{E_2}) = \frac{7}{8}\times\frac{11}{20} = \frac{77}{160}$
- $\mathcal{P}(E_1\cap E_2) = \mathcal{P}(E_1)\times\mathcal{P}_{E_1}(E_2) = \frac{1}{8}\times\frac{1}{20} = \frac{1}{160}$
- $\mathcal{P}(E_1\cap\overline{E_2}) = \mathcal{P}(E_1)\times\mathcal{P}_{E_1}(\overline{E_2}) = \frac{1}{8}\times\frac{19}{20} = \frac{19}{160}$

La variable aléatoire peut prendre les trois valeurs 0, 1, 2 ; on a :

- $\{\mathcal{X}=0\} = E_1\cap E_2 \implies \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \frac{1}{160}$
- $\{\mathcal{X}=1\} = (E_1\cap\overline{E_2})\cup(\overline{E_1}\cap E_2)$
  $\implies \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \frac{19}{160} + \frac{63}{160} = \frac{82}{160} = \frac{41}{80}$
- $\{\mathcal{X}=2\} = \overline{E_1}\cap\overline{E_2} \implies \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \frac{77}{160}$