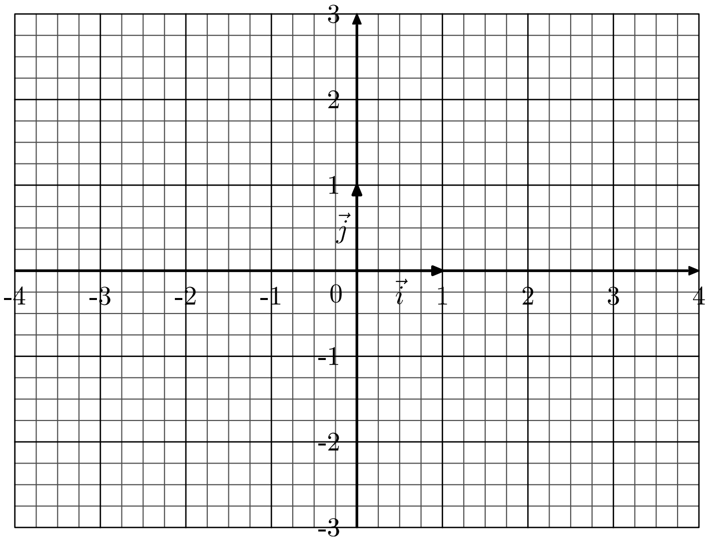
Première Spécialité - Chapitre 13

E.1 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on considère les quatre droites ci-dessous définies par leur équation cartésienne :

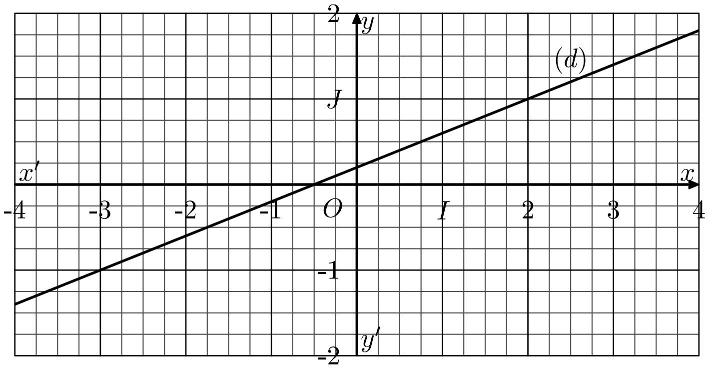
(d_1) : $2x-3y+3=0$; (d_2) : $-2x-y+1=0$

(d_3) : $4x+8y-10=0$; (d_4) : $-3x+y+4=0$

1. Pour chacune des droites, donner un point et un vecteur directeur de cette droite.
2. Tracer chacune de ces droites dans le repère ci-dessous :



E.2 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère la droite (d) représentée ci-dessous :



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation cartésienne :
   (Δ) : $5x+6y-6=0$
   a. Donner les coordonnées de deux points appartenant à la droite (Δ).
   b. Effectuer le tracé dans le repère ci-dessous de la droite (Δ).
3. Algébriquement, déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

E.3 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a. $\begin{cases} x-3y=8 \\ 4x+y=-7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 5x+10y=20 \end{cases}$

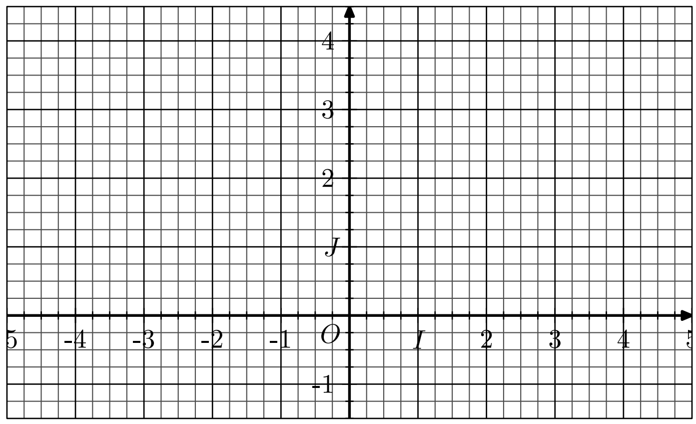
E.4

Définition : on appelle **vecteur normal** d'une droite, tout vecteur orthogonal aux vecteurs directeurs de cette droite.

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère une droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(a\,;b)$ pour vecteur normal. Alors la droite (d) admet pour équation cartésienne :
$(d) : a{\cdot}x + b{\cdot}y + c = 0 \quad$ où $c \in \mathbb{R}$

On considère le plan munit d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal :
   a. $\overrightarrow{u} = (2\,;3) \quad$ et $\quad A(1\,;0)$
   b. $\overrightarrow{u} = (-1\,;1) \quad$ et $\quad A(-2\,;1)$
2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ au point A correspondant :



E.5

Proposition : dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(a\,;b)$ pour vecteur normal alors l'équation cartésienne de la droite (d) est de la forme : $\quad (d) : \quad a{\cdot}x + b{\cdot}y + c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,,I\,;J\big)$ orthonormé. Pour chaque question, déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal et passant par le point A où :

a. $\overrightarrow{u}\,(\,5\,;2\,)\ ;\ A(\,1\,;1\,)$ $\qquad$ b. $\overrightarrow{u}\,(\,-1\,;1\,)\ ;\ A(\,4\,;-1\,)$

E.6 On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,,I\,;J\big)$ orthonormé. Pour chaque question, déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal et passant par le point A où :

a. $\overrightarrow{u}\,(\,1\,;-2\,)\ ;\ A(\,-5\,;2\,)$ $\qquad$ b. $\overrightarrow{u}\,(\,-2\,;-4\,)\ ;\ A(\,-1\,;3\,)$

E.7 On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé.

1. On considère la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{n}(-2\,;1)$ pour vecteur normal et passant par le point $A(4\,;1)$.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
2. On considère la droite (d') admettant l'équation cartésienne : $\quad x - 4{\cdot}y + 3 = 0$
   Donner un vecteur $\overrightarrow{v'}$ normal de (d'), un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de (d') et un point B appartenant à (d').

E.8

Proposition : on considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé. Si une droite (d) admet pour équation cartésienne :
$(d) : a{\cdot}x + b{\cdot}y + c = 0 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$
alors la droite (d) admet le vecteur $\overrightarrow{u}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

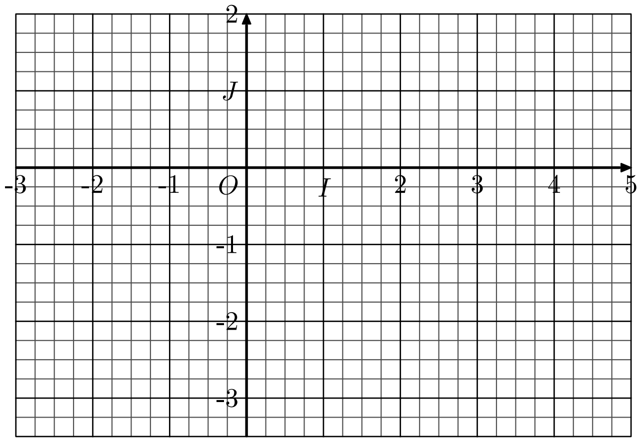
Soit $\big(O\,;I\,;J\big)$ un repère orthonormé.

1. On considère la droite (d) ayant pour équation cartésienne : $\quad 2{\cdot}x + 3{\cdot}y + 5 = 0$
   Donner un vecteur normal à la droite (d) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses.
2. On considère la droite (d') ayant pour équation cartésienne : $\quad -x + 2{\cdot}y - 2 = 0$
   Donner un vecteur normal à la droite (d') et déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d') avec l'axe

des ordonnées.

E.9 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère les points $A(-2;-3)$ et $B(4;1)$. On note (d) la médiatrice du segment $[AB]$.

1. Déterminer les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
4. Tracer dans le repère ci-dessous la droite (d).



E.10

Définition : dans le plan muni d'un repère, on appelle **déterminant** des deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';v')$ le nombre, noté $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, définie par :
$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = x{\cdot}y' - x'{\cdot}y$

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls. On a :
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonaux $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé :

1. On considère les deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour équation cartésienne :
   $(d_1) :\ x+2{\cdot}y-1=0 \quad ; \quad (d_2) :\ 4{\cdot}x+8{\cdot}y+2=0$
   a. Donner deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ normaux respectivement aux droites (d_1) et (d_2).
   b. Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
2. On considère les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettant pour équation cartésienne :
   $(\Delta_1) :\ 4{\cdot}x+3{\cdot}y-1=0 \quad ; \quad (\Delta_2) :\ -6{\cdot}x+8{\cdot}y+5=0$
   a. Donner deux vecteurs $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ normaux respectivement aux droites (Δ_1) et (Δ_2).
   b. Justifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

E.11 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la droite (d) admettant pour équation cartésienne :
$(d) :\ 2x-y+1=0$

1. La droite (d') est parallèle à la droite (d) et son équation cartésienne est : $(d') :\ 5x+b{\cdot}y+4=0$ où $b\in\mathbb{R}$
   Déterminer la valeur de b.
2. La droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (d) et son équation cartésienne est :
   $(\Delta) :\ a{\cdot}x+3{\cdot}y-2=0$ où $a\in\mathbb{R}$
   Déterminer la valeur de a.

E.12 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la droite (d) *(resp.* (d')*)* passe par le point $A(-2;1)$ *(resp.* $B(3;2)$*)* et admet le vecteur $\overrightarrow{u}(3;-1)$ *(resp.* $\overrightarrow{v}(1;1)$*)* pour vecteur normal.

1. Déterminer les équations cartésiennes des droites (d) et (d').
2. a. Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.

(b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

E.13 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$.

(1) On note (d) la droite admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(2\,;1)$ pour vecteur directeur et passant par le point $B(1\,;1)$.
Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d).

(2) On note (d') la droite admettant le vecteur $\overrightarrow{v}(4\,;-3)$ pour vecteur normal et passant par le point $C(2\,;2)$.
Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d').

(3) (a) Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.

(b) Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites (d) et (d').

E.14 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère la droite (d) ayant pour équation cartésienne :
$(d):\quad 3{\cdot}x+4{\cdot}y-5=0$

(1) On considère la droite (Δ) admettant $\overrightarrow{u}(2\,;-1)$ pour vecteur normal et passant par le point $A\left(-\dfrac{1}{3}\,;1\right)$

(a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ).

(b) Justifier que les droites (d) et (Δ) sont sécantes.

(2) (a) Résoudre le système d'équations :
$$\begin{cases} 3x+4y-5=0 \\ 6x-3y+5=0 \end{cases}$$

(b) En déduire les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

E.15

Définition : le **cercle de centre A et de rayon r** est l'ensemble des points M tels que : $OM=r$

On dit aussi qu'un cercle est l'ensemble des points équidistants au centre du cercle.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Pour chaque question, déterminer l'équation du cercle :

(a) $I(1\,;2)$ et $r{=}3\,cm$ (b) $I(-3\,;1)$ et $r{=}5\,cm$

E.16 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(2\,;1)$ et de rayon 4.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

E.17 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(3\,;-1)$ et de rayon 5.

(1) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

(2) Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
$M(-1\,;2)$; $N\left(\dfrac{8}{5}\,;-\dfrac{29}{5}\right)$; $P\left(\dfrac{9}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right)$

E.18

Proposition : Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés forme un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Conséquence : Pour un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et pour tout point M de ce cercle : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

(a) $A(-2\,;0)$ et $B(4\,;0)$ (b) $A(2\,;-3)$ et $B(-1\,;2)$

E.19 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé et le cercle $\mathscr{C}$ dont les points $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;0)$ sont diamétralement opposés.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

E.20 On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé.

1 a Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ admettant pour diamètre le segment $[AB]$ où :
$A(-1;2)$; $B(7;-4)$

b Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$ admettant pour diamètre le segment $[CD]$ où :
$C\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\right)$; $D\left(\dfrac{39}{5};-\dfrac{12}{5}\right)$

2 Que peut-on dire des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

E.21

Proposition : Dans le plan, considérons l'équation cartésienne $x^2+y^2+a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0$, On note $\rho=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points définis par cette équation cartésienne est :

- vide si $\rho<0$
- un point si $\rho=0$
- un cercle si $\rho>0$ dont le rayon est $\sqrt{\rho}$ et le centre $\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{-b}{2}\right)$

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère l'équation cartésienne :
(E) : $x^2+y^2-4{\cdot}x-3{\cdot}y-31=0$

1 Montrer que les points $A(-3;5)$ et $B\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{13}{2}\right)$ appartiennent à l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de (E).

2 En déduire la nature de l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E)

E.22 On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

a $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

b $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

c $x^2+y^2+4x-4y+9=0$

1 Écrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :
$(x-a)^2+(y-b)^2=c$
où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2 Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation et en préciser les éléments caractéristiques

E.23 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

1 a Soit (d) la droite ayant pour vecteur directeur $(1;2)$ et passant par le point $A(0;-1)$.
Déterminer l'équation cartésienne de cette droite.

b Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 3.
Déterminer l'équation cartésienne de ce cercle.

2 Dans cette question, on s'intéresse au point d'intersection de (d) et de $\mathscr{C}$.

a Justifier que si $M(x;y)$ est un point d'intersection de la droite et du cercle alors ses coordonnées vérifient le système d'équation :
$$\begin{cases} x^2+y^2-2{\cdot}x-2{\cdot}y-7=0 \\ -2{\cdot}x+y+1=0 \end{cases}$$

b Par substitution, résoudre ce système d'équation.

E.24 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ et l'ensemble des points $\mathcal{E}$ défini par l'équation cartésienne :
(E) : $x^2+y^2-4{\cdot}x+6{\cdot}y+3=0$

1 a Écrire l'équation (E) sous la forme :
$(x-a)^2+(y-b)^2=c$

b Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera les caractéristiques.

2 a Montrer que le point $A(3;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (d) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A.

(3) Après avoir montré que le point $B(-1\,;-2)$ est un point du cercle, donner une équation cartésienne de la droite (d') tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

(4) Déterminer les coordonnées du point M, intersection des droites (d) et (d').

(5) Tracer dans le repère ci-dessous le cercle $\mathscr{C}$ *(ou une partie)* et ses deux tangentes.