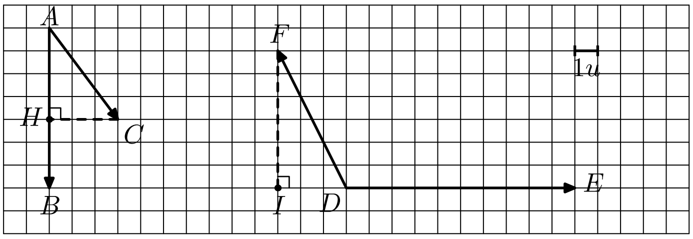
Première Spécialité - Chapitre 12

C.1 On considère les deux points H et I représentés ci-dessous et projetés respectifs des points C et F sur les droites (AB) et (DE) :

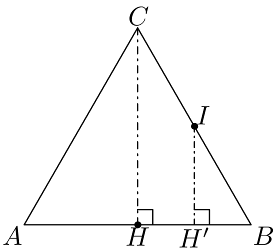


On en déduit la valeur des produits scalaires :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH = 7\times 4 = 28$

b. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = -DI\times DE = -3\times 10 = -30$

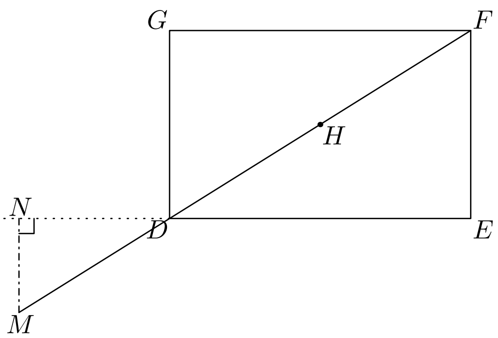
C.2 Considérons la configuration ci-dessous :



a. Le projeté du point C sur la droite (AB) est le milieu H du segment $[AB]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ayant le même sens, on a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 3\times 1{,}5 = 4{,}5$$

b. Notons H' le projeté orthogonal du point I sur la droite (AB).
Les droites (CH) et (JH') étant perpendiculaires à une même droite : elles sont parallèles.
Du rapport $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{1}{2}$ et à l'aide du théorème de Thalès, on a :
$$\frac{BH'}{BH} = \frac{1}{2} \implies BH' = 0{,}75\,cm$$
On en déduit la valeur du produit scalaire :
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI} = BA\times BH' = 3\times 0{,}75 = 2{,}25$$

C.3 Considérons la configuration ci-dessous :



1. Le projeté du point F sur la droite (DE) est le point E.
Le calcul du produit scalaire donne :
$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$$
Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE}$ ayant même sens :
$$= DE\times DE = 5\times 5 = 25$$

2. Le projeté du point D sur la droite (DE) est le point D.
On en déduit :
$$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DD}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$$

3. Dans le triangle DEF rectangle en E, le théorème de Pythagore donne la relation :
$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$
$$DF^2 = 5^2 + 2{,}5^2$$
$$DF = \sqrt{25 + 6{,}25}$$
$$DF = \sqrt{31{,}25}$$
On place le point M tel que : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DM}$
Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DM}$ étant de sens opposés, on en déduit :
$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DM} = -DF\times DM$$
$$= -\sqrt{31{,}25}\times\frac{\sqrt{31{,}25}}{2} = -\frac{31{,}25}{2} = -15{,}625$$

C.4

a. Le projeté du point C sur la droite (AI) est le point B.
De plus, comme les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens, on a :
$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = AI\times AB = 3\times 6 = 18$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ étant colinéaires et de sens opposés, on en déduit le produit scalaire de ces deux vecteurs :
$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -IA\times IB = -3\times 3 = -9$$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BI}$ étant égaux, on en déduit :
$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA}$$
Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ étant colinéaire et de même sens avec lui-même, on en déduit :
$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI} = IA\times IA = 3\times 3 = 9$$

d. Le projeté du point O sur la droite (DA) est le point O.
De plus, le vecteur $\overrightarrow{DL}$ étant colinéaire et de même sens avec lui-même, on en déduit :
$$\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{DO} = DL\times DL = 1{,}25\times 1{,}25 = 1.5625$$

e. Les vecteurs $\overrightarrow{KO}$ et $\overrightarrow{DL}$ étant égaux, on a :
$$\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{DB}$$
Le projeté du point B sur la droite (DL) est le point A.
De plus, les vecteurs $\overrightarrow{DL}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires et de même sens.
On en déduit l'égalité :
$$\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB} = DL\times DA = 1{,}25\times 2{,}5 = 1{,}875$$

f. Les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AO}$ étant égaux, on en déduit :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$$
Le projeté du point O sur la droite (AB) est le point I. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens. On en déduit :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO} = AB\times AI = 6\times 3 = 18$$

C.5 On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(-3-(-5)\,;\,-5-1)$
  $=(-3+5\,;-6)=(2\,;-6)$
- $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)=(-2-(-5)\,;2-1)$
  $=(-2+5\,;1)=(3\,;1)$

On a le produit scalaire :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+(-6)\times1=6-6=0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Le triangle ABC est rectangle en A.

C.6 On a les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(1-2\,;-2-1)=(-1\,;-3)$
- $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)=(-1-2\,;2-1)=(-3\,;1)$

Déterminons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x\cdot x'+y\cdot y'=(-1)\times(-3)+(-3)\times1$$
$$=3-3=0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit et donc le triangle ABC est rectangle en A.

C.7

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(1\,;-4)$
   - $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A)=(4\,;1)$

   Ainsi, on a la valeur du produit scalaire suivant :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}}+y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}}$
   $=1\times4+(-4)\times1=0$

2. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:
   $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D)=(1\,;-4)$

   On remarque ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées : ces deux vecteurs sont égaux ; on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

   Or, d'après la question 1, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAD}$ est droit.

   Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme et il possède un angle droit : $ABCD$ est un rectangle.

C.8

1. Pour le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut avoir l'égalité vectorielle :
   $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

   En notant $C(x\,;y)$ les coordonnées du point C, on peut exprimer les coordonnées de ces deux vecteurs :

   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(-8-(-2)\,;\,-3-1)$
     $=(-8+2\,;\,-4)=(-6\,;\,-4)$
   - $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D)=\Big(x-(-3)\,;y-\dfrac{5}{2}\Big)$

   L'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ implique l'égalité de leurs coordonnées et on obtient les deux équations suivantes :

$x+3=-6$	$y-\dfrac{5}{2}=-4$
$x=-6-3$	$y=-4+\dfrac{5}{2}$
$x=-9$	$y=-\dfrac{8}{2}+\dfrac{5}{2}$
	$y=-\dfrac{3}{2}$

   Ainsi, le point C a pour coordonnées : $C\Big(-9\,;-\dfrac{3}{2}\Big)$

2. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A)=\Big(-3-(-2)\,;\dfrac{5}{2}-1\Big)$
   $=\Big(-3+2\,;\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{2}\Big)=\Big(-1\,;\dfrac{3}{2}\Big)$

   On a le produit scalaire :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-6\times(-1)+(-4)\times\dfrac{3}{2}=6-2\times3=6-6=0$

C.9 Le point C a pour abscisse 3. Il existe un nombre $y\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées du point C s'expriment par :
$C(3\,;y)$

Déterminons les coordonnées de vecteurs :

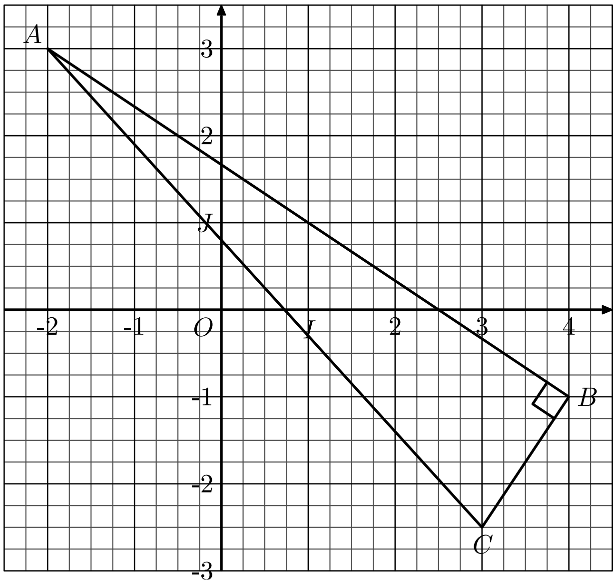
- $\overrightarrow{BA}(x_A-x_B\,;y_A-y_B)$
  $=(-2-4\,;3-(-1))=(-6\,;3+1)=(-6\,;4)$
- $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B\,;y_C-y_B)$
  $=(3-4\,;y-(-1))=(-1\,;y+1)$

Le triangle ABC étant un triangle rectangle en B, on en déduit que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux : le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul.

On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}&=0\\ x\cdot x'+y\cdot y'&=0\\ -6\times(-1)+4\times(y+1)&=0\\ 6+4\cdot y+4&=0\\ 4\cdot y+10&=0\\ 4\cdot y&=-10\\ y&=\frac{-10}{4}\\ y&=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Le point C a pour coordonnées : $C\Big(3\,;-\dfrac{5}{2}\Big)$



C.10 Le point C a pour abscisse 3. Il existe un nombre $y \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées du point C s'expriment par :

$C(3\,;y)$

Déterminons les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$
  $= (3-(-2)\,;y-3) = (3+2\,;y-3) = (5\,;y-3)$
- $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\,;y_C - y_B)$
  $= (3-4\,;y-(-1)) = (-1\,;y+1)$

Le triangle ABC étant un triangle rectangle en C, on en déduit que les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux : le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul.

On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} &= 0\\ 5\times(-1) + \big(y-3\big)\big(y+1\big) &= 0\\ -5 + \big(y-3\big)\big(y+1\big) &= 0\\ -5 + y^2 + y - 3y - 3 &= 0\\ y^2 - 2y - 8 &= 0\end{aligned}$$

Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-2)^2 - 4\times1\times(-8) = 4+32 = 36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

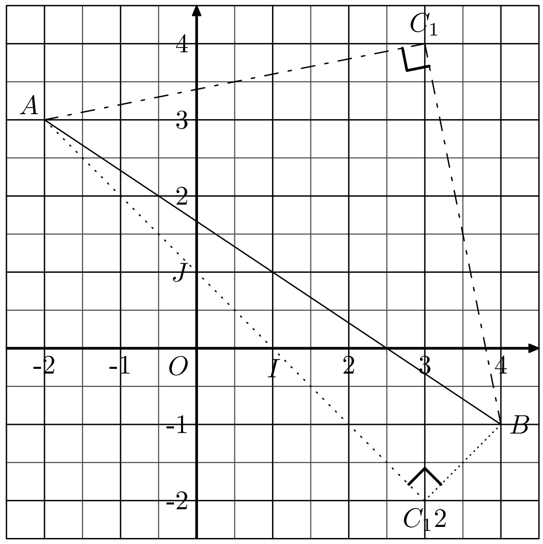
Le discriminant étant strictement positif, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-2)-6}{2\times1} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-2)+6}{2\times1} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Ainsi, il existe deux points tels que le triangle ABC est rectangle en A et l'abscisse du point C est 3 :

$C_2(3\,;-2)$; $C_1(3\,;4)$



C.11 Le calcul des coordonnées des vecteurs donnent :

$\overrightarrow{DE}(-4\,;-5)$; $\overrightarrow{DF}(-1\,;-1)$

Ainsi, le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ a pour valeur :

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = (-4)\times(-1) + (-5)\times(-1) = 9$

Le calcul des normes de vecteurs donne :

- $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$
- $\|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est également déterminé par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} &= DE\times DF\times\cos\widehat{EDF}\\ 9 &= \sqrt{41}\times\sqrt{2}\times\cos\widehat{EDF}\end{aligned}$$

$$\cos\widehat{EDF} = \frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}$$

Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'écrire :

$$\widehat{EDF} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}\right) \approx 6{,}34^o$$

au centième de degré près.

Un dessin à la main permet de montrer que l'angle $\widehat{FDE}$ est orienté positivement. Ainsi, on a :

$\widehat{FDE} = 6{,}34^o$

C.12 On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{BA}(x_A - x_B\,;y_A - y_B) = (1-4\,;1-2) = (-3\,;-1)$
- $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\,;y_C - y_B) = (3-4\,;-1-2) = (-1\,;-3)$

On a les longueurs suivantes :

- $BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
- $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

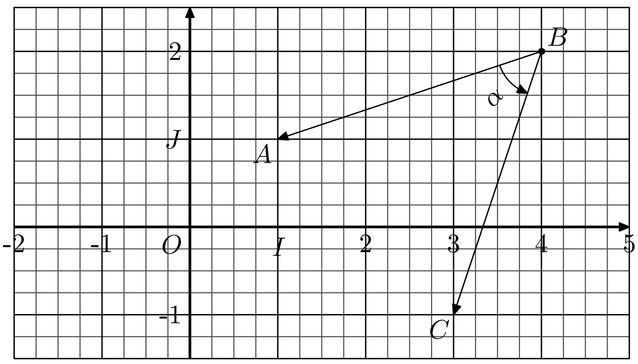
Les caractérisations du produit scalaire permettent d'écrire les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$(-3)\times(-1)+(-1)\times(-3) = BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$
$$3+3 = \sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$
$$6 = 10\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$
$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{6}{10}$$
$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = 0{,}6$$

On a : $\cos^{-1}(0{,}6)\approx 53{,}1301\approx 53{,}1^o$

On en déduit : $\widehat{ABC}\approx 53{,}1^o$

Voici la représentation de ces trois points et l'orientation de l'angle $\widehat{ABC}$:



On en déduit : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)\approx 53{,}1^o$

C.13 On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{CA}(x_A-x_C\,;y_A-y_C) = (6-3\,;3-(-1)) = (3\,;4)$
- $\overrightarrow{CB}(x_B-x_C\,;y_B-y_C) = (1-3\,;1-(-1)) = (-2\,;2)$

Déterminons le produit scalaire des deux manières suivantes :

- $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 3\times(-2)+4\times 2 = -6+8 = 2$
- On a les normes des vecteurs :
  - $\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
  - $\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

  On en déduit l'expression du produit scalaire :
  $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos\widehat{BCA} = 5\times\sqrt{8}\times\cos\widehat{BCA}$

Par identification de ces deux expressions du produit scalaire, on a :

$$2 = 5\times\sqrt{8}\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\cos\widehat{BCA} = \frac{2}{5\times\sqrt{8}}$$
$$\widehat{BCA} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5\times\sqrt{8}}\right)$$
$$\widehat{BCA}\approx 81{,}869$$
$$\widehat{BCA}\approx 81{,}9$$