Première Spécialité - Chapitre 12

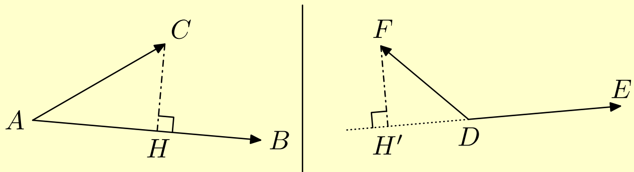
E.1

Définition :
Dans le plan, on considère trois points A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB). On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par :

- $AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

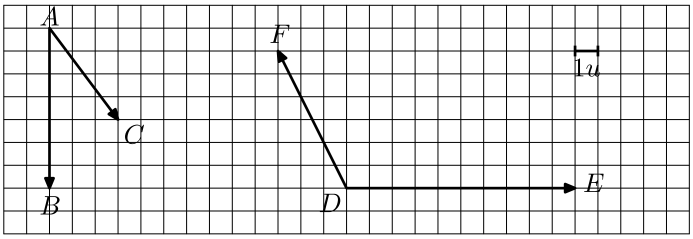
On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Illustration :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ | $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=-DE\times DH'$

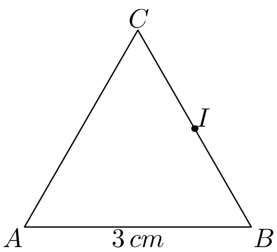
Dans un quadrillage, on considère les six points ci-dessous :



Déterminer la valeur des produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$

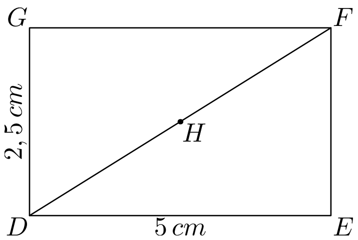
E.2



Dans le plan, on considère le triangle équilatéral ABC représenté ci-dessous et le point I milieu du segment $[BC]$. Déterminer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$

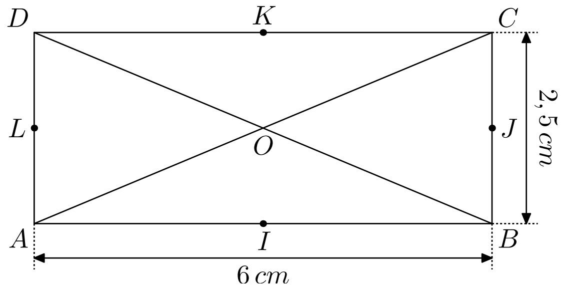
E.3



Dans le plan, on considère le rectangle $DEFG$ où le point H est le milieu de la diagonale $[DF]$, déterminer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$ b) $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE}$ c) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD}$

E.4 On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB=6\,cm$ et $CB=2{,}5\,cm$:



Les points I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Le point O est le centre du rectangle $ABCD$.

Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BI}$

d) $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DO}$ e) $\overrightarrow{KO} \cdot \overrightarrow{DB}$ f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

E.5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$.

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un nombre noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y'$
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,I\,;\,J\right)$ et les trois points : $A(-5\,;1)$; $B(-3\,;-5)$; $C(-2\,;2)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

E.6 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormal et les trois points :
$A(2\,;1)$; $B(1\,;-2)$; $C(-1\,;2)$.
Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

E.7 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$A(-3\,;2)$; $B(-2\,;-2)$; $C(2\,;-1)$; $D(1\,;3)$.

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

E.8 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les trois points :

$A(-2\,;1)$; $B(-8\,;-3)$; $D\left(-3\,;\dfrac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du point C tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

E.9 Dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC est rectangle en B.

Déterminer les coordonnées du point C.

E.10 Dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC est rectangle en C.

Déterminer l'ensemble des points C réalisant ces conditions.

E.11 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\widehat{EDF}$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

E.12 On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé et les points A, B, C de coordonnées :
$A(1\,;1)$; $B(4\,;2)$; $C(3\,;-1)$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au dixième de degrés près.

E.13 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :
$A(6\,;3)$; $B(1\,;1)$; $C(3\,;-1)$

Déterminer, au dixième de degré près, la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.