Première Spécialité - Chapitre 11

C.1 Au cours de l'exercice, nous aurons besoin des exercices suivants :

- Dans le triangle ABC rectangle en B.
$$\cos\widehat{BAC}=\frac{AB}{AC}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{AB}{2}$$
$$AB=2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$AB=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$AB=\sqrt{2}$$
- Dans le triangle ADE rectangle en D.
$$\cos\widehat{DAE}=\frac{AD}{AE}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{AD}{4}$$
$$AD=4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$AD=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AD=2\cdot\sqrt{3}$$

(a) Le point D est le projeté orthogonal du point E sur la droite (AD).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant colinéaires et de même sens.
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD=\sqrt{2}\times\left(2\cdot\sqrt{3}\right)$$
$$=2\cdot\sqrt{2\times3}=2\cdot\sqrt{6}$$

(b) Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD) est le point B.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant colinéaires et de même sens, on a :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$
D'après la question précédente :
$$=2\cdot\sqrt{6}$$

(c) Le point D est le projeté orthogonal du E sur la droite est le point D.
Le vecteur $\overrightarrow{DD}$ étant le vecteur nul, on a :
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{0}=0$$

C.2

(1) L'angle $\widehat{IOJ}$ étant droit, on a : $\cos\widehat{IOJ}=0$

On en déduit :
$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}=\|\overrightarrow{OI}\|\times\|\overrightarrow{OJ}\|\times\cos\widehat{IOJ}$$
$$=\|\overrightarrow{OI}\|\times\|\overrightarrow{OJ}\|\times0=0$$

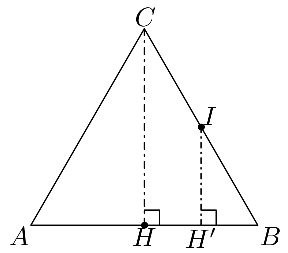
(2) (a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OC}\|\times\cos\widehat{AOC}$
$$=2\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cdot\sqrt{3}$$

(b) $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OE}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos\widehat{EOB}$
$$=2\times3\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\cdot\sqrt{2}$$

(3) (a) Les deux angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{DOF}$ sont adjacents :
$$\widehat{BOD}+\widehat{DOF}=\widehat{BOF}$$
$$30+\widehat{DOF}=45$$
$$\widehat{DOF}=45-30$$
$$\widehat{DOF}=15$$
Déterminons la valeur du produit scalaire :
$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=\|\overrightarrow{OD}\|\times\|\overrightarrow{OE}\|\times\cos\widehat{DOE}=3\times2\times\cos(15)$$
$$\approx5{,}796\approx5{,}8$$

(b) Les angles $\widehat{KOH}$, $\widehat{HOF}$, $\widehat{FOB}$ sont adjacents et supplémentaires. On en déduit :
$$\widehat{KOH}+\widehat{HOF}+\widehat{FOB}=180$$
$$\frac{\pi}{6}+\widehat{HOF}+\frac{\pi}{4}=\pi$$
$$\widehat{HOF}+\frac{5\pi}{12}=\pi$$
$$\widehat{HOF}=\pi-\frac{5\pi}{12}$$
$$\widehat{HOF}=\frac{7\pi}{12}$$
Déterminons la valeur du produit scalaire :
$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OH}=\|\overrightarrow{OE}\|\times\|\overrightarrow{OH}\|\times\cos\widehat{EOH}=2\times3\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$\approx1{,}553\approx1{,}6$$

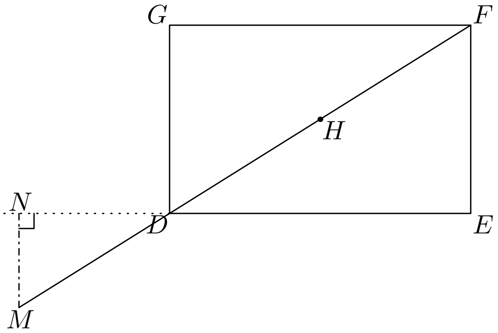
C.3 Considérons la configuration ci-dessous :



(a) Le projeté du point C sur la droite (AB) est le milieu H du segment $[AB]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ayant le même sens, on a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH=3\times1{,}5=4{,}5$$

(b) Notons H' le projeté orthogonal du point I sur la droite (AB).
Les droites (CH) et (JH') étant perpendiculaires à une même droite : elles sont parallèles.
Du rapport $\dfrac{BI}{BC}=\dfrac{1}{2}$ et à l'aide du théorème de Thalès, on a :
$$\frac{BH'}{BH}=\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad BH'=0{,}75\,cm$$
On en déduit la valeur du produit scalaire :
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=BA\times BH'=3\times0{,}75=2{,}25$$

C.4 Considérons la configuration ci-dessous :



(1) Le projeté du point F sur la droite (DE) est le point E. Le calcul du produit scalaire donne :

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE}$ ayant même sens :

$$=DE\times DE=5\times5=25$$

(2) Le projeté du point D sur la droite (DE) est le point D. On en déduit :

$$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DD}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{DE}=0$$

(3) Dans le triangle DEF rectangle en E, le théorème de Pythagore donne la relation :

$$DF^2=DE^2+EF^2$$
$$DF^2=5^2+2{,}5^2$$
$$DF=\sqrt{25+6{,}25}$$
$$DF=\sqrt{31{,}25}$$

On place le point M tel que : $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DM}$

Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DM}$ étant de sens opposés, on en déduit :

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DM}=-DF\times DM$$
$$=-\sqrt{31{,}25}\times\frac{\sqrt{31{,}25}}{2}=-\frac{31{,}25}{2}=-15{,}625$$

C.5

(a) Les deux vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant orthogonaux, on en déduit :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

(b) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire et de même sens avec lui-même, on en déduit :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=BC\times BC=2\times2=4$$

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont colinéaires et de sens opposés. On en déduit :

$$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FH}=-FE\times FH=-2\times4=-8$$

C.6

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant orthogonaux, on en déduit :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OC}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit :

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}=\|\overrightarrow{AO}\|\times\|\overrightarrow{OC}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{CO}$ sont portés par les deux diagonales du carré $ABCD$: ces deux vecteurs sont orthogonaux. On en déduit : $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{CO}=0$

(d) Les vecteurs $\vec{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont portés par deux côtés adjacents du carré : ces deux vecteurs sont orthogonaux. On en déduit : $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

C.7

(a) Le projeté du point C sur la droite (AI) est le point B. De plus, comme les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens, on a :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}=AI\times AB=3\times6=18$$

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ étant colinéaires et de sens opposés, on en déduit le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-IA\times IB=-3\times3=-9$$

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BI}$ étant égaux, on en déduit :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA}$$

Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ étant colinéaire et de même sens avec lui-même, on en déduit :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI}=IA\times IA=3\times3=9$$

(d) Le projeté du point O sur la droite (DA) est le point O. De plus, le vecteur $\overrightarrow{DL}$ étant colinéaire et de même sens avec lui-même, on en déduit :

$$\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{DO}=DL\times DL=1{,}25\times1{,}25=1.5625$$

(e) Les vecteurs $\overrightarrow{KO}$ et $\overrightarrow{DL}$ étant égaux, on a :

$$\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{DB}$$

Le projeté du point B sur la droite (DL) est le point A. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{DL}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires et de même sens.

On en déduit l'égalité :

$$\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB}=DL\times DA=1{,}25\times2{,}5=1{,}875$$

(f) Les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AO}$ étant égaux, on en déduit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$$

Le projeté du point O sur la droite (AB) est le point I. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens. On en déduit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}=AB\times AI=6\times3=18$$

C.8

(1) Calculons les produits scalaires demandés :

- $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1}=\left(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)\cdot\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F_1}$

$$=\|\overrightarrow{F}\|\cdot\|\overrightarrow{F_1}\|\cdot\cos\alpha+\|\overrightarrow{F_1}\|\cdot\|\overrightarrow{F_1}\|+\|\overrightarrow{F_2}\|\cdot\|\overrightarrow{F_1}\|\cdot\cos\gamma$$
$$=96\cdot\cos\alpha+48\cdot\cos\gamma+64$$

- $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_2}=\left(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F_2}$

$$=\|\overrightarrow{F}\|\cdot\|\overrightarrow{F_2}\|\times\cos\beta+\|\overrightarrow{F_1}\|\cdot\|\overrightarrow{F_2}\|\times\cos\gamma+\|\overrightarrow{F_2}\|^2$$
$$=72\cdot\cos\beta+48\cdot\cos\gamma+36$$

- $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F}=\left(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)\cdot\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F}$

$$=\|\overrightarrow{F}\|\cdot\|\overrightarrow{F}\|+\|\overrightarrow{F_1}\|\cdot\|\overrightarrow{F}\|\times\cos\alpha+\|\overrightarrow{F_2}\|\cdot\|\overrightarrow{F}\|\times\cos\beta$$
$$=96\cdot\cos\alpha+72\cdot\cos\beta+144$$

(2) (a) Puisque $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{0}$, on doit également avoir les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{0}\quad;\quad\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{0}\quad;\quad\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}96\cdot\cos\alpha+48\cdot\cos\gamma+64=0\\72\cdot\cos\beta+48\cdot\cos\gamma+36=0\\96\cdot\cos\alpha+72\cdot\cos\beta+144=0\end{cases}$$

En divisant les deux membres de la première ligne par 16 ; en divisant la seconde ligne par 12 ; en divisant la troisième ligne par 24 ; on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 6\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\gamma + 4 = 0 \\ 6\cdot\cos\beta + 4\cdot\cos\gamma + 3 = 0 \\ 4\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\beta + 6 = 0 \end{array}\right.$$

(b) En notant : $X=\cos\alpha$; $Y=\cos\beta$; $Z=\cos\gamma$

Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{l} 6X+3Z+4=0 \\ 6Y+4Z+3=0 \\ 4X+3Y+6=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6X+3Z=-4 \\ 4X+3Y=-6 \\ 6Y+4Z=-3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ 12X+9Y=-18 \\ 6Y+4Z=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ -9Y+6Z=10 \\ 6Y+4Z=-3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ 18Y-12Z=-20 \\ 18Y+12Z=-9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ 18Y-12Z=-20 \\ -24Z=-11 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ 18Y-12Z=-20 \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ 18Y-\dfrac{11}{2}=-20 \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ 18Y=-\dfrac{29}{2} \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+6Z=-8 \\ Y=-\dfrac{29}{36} \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X+\dfrac{11}{4}=-8 \\ Y=-\dfrac{29}{36} \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12X=-\dfrac{43}{4} \\ Y=-\dfrac{29}{36} \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=-\dfrac{43}{48} \\ Y=-\dfrac{29}{36} \\ Z=\dfrac{11}{24} \end{array}\right.$$

Ainsi, le système initial a pour solution :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = -\dfrac{43}{48} \\ \cos\beta = -\dfrac{29}{36} \\ \cos\gamma = \dfrac{11}{24} \end{array}\right.$$

Les relations trigonométriques inverses nous permettent d'obtenir la mesure de ces trois angles :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{43}{48}\right) \approx 153{,}6^o \\ \beta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{29}{36}\right) \approx 143{,}7^o \\ \gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{11}{24}\right) \approx 62{,}7^o \end{array}\right.$$

C.9

(1)
- Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 15^2 + 8^2$$
$$BC^2 = 225 + 64$$
$$BC^2 = 289$$
$$BC = \sqrt{289}$$
$$BC = 17\,m$$

- Dans le triangle ABD rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = DA^2 + DB^2$$
$$15^2 = 9^2 + DB^2$$
$$225 = 81 + DB^2$$
$$DB^2 = 225 - 81$$
$$DB^2 = 144$$
$$DB = \sqrt{144}$$
$$DB = 12\,m$$

(2) (a) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = BA\times BA = 15^2 = 225$

(b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BD} = -\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\right)$

$= -\left(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}\right) = -BD\times BD = -12^2 = -144$

(c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

(d) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$

$= BD\times BD = 12^2 = 144$

(e) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = -\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$= -AD\times AD = -9^2 = -81$

(f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = \left(-\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CA} = -\left(\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}\right)$

$= -\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right) = -CA\times CA = -8\times 8 = -64$

C.10

(1) Dans le triangle BHC rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore, on a la propriété :

$$AC^2 = BH^2 + HC^2$$
$$13^2 = 12^2 + HC^2$$
$$169 = 144 + HC^2$$
$$HC^2 = 169 - 144$$
$$HC^2 = 25$$
$$HC = \sqrt{25}$$
$$HC = 5$$

La relation de Chasles permet d'écrire les décompositions :

- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}$

Le produit scalaire peut s'exprimer par :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}\right)$

$= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$

$= 12^2 + 0 + 0 + \left(-9\times 5\right) = 144 - 45 = 99$

(2) Ce produit scalaire s'exprime aussi par :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC} = 15\times 13\times\cos\widehat{ABC}$

De l'égalité de ces deux expressions du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$99 = 15\times13\times\cos\widehat{ABC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{99}{15\times13}$$
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{99}{15\times13}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 59{,}489$$
$$\widehat{ABC} \approx 59{,}5$$

C.11

1

- On utilisera les deux décompositions :
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$$
On en déduit l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{MB}{\cdot}\overrightarrow{MC}$:
$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \big(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\big)\cdot\big(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\big)$$
$$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$$
$$= -x\big(5-x\big)+0+0+6\times6frec = -5{\cdot}x+x^2+36$$
$$= x^2-5{\cdot}x+36$$
- Dans le triangle MDC rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$$MC^2 = MD^2+DC^2$$
$$MC^2 = \big(5-x\big)^2+6^2$$
$$MC^2 = 5^2-10x+x^2+36$$
$$MC^2 = 25-10x+x^2+36$$
$$MC^2 = x^2-10x+61$$
Dans le triangle ABM rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$$MB^2 = AM^2+AB^2$$
$$MB^2 = x^2+6^2$$
$$MB^2 = x^2+36$$
- Le produit scalaire $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}$ est aussi défini par :
$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB} = MC\times MB\times\cos\widehat{CMB}$$
$$\big(\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}\big)^2 = \big(MC\times MB\times\cos\widehat{CMB}\big)^2$$
$$\big(x^2{-}5{\cdot}x{+}36\big)^2 = MC^2\times MB^2\times\big[\cos\widehat{CMB}\big]^2$$
$$x^4\text{-}10x^3{+}97x^2\text{-}360x{+}1296 = \big(x^2\text{-}10x{+}61\big)\big(x^2{+}36\big)\times\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2$$
$$2x^4\text{-}20x^3{+}194x^2\text{-}720x{+}2592 = x^4\text{-}10x^3{+}97x^2\text{-}360x{+}2196$$
$$x^4-10x^3+97x^2-360x+396 = 0$$
- D'après la question précédente :
$$x^4-10x^3+107x^2-360x+396 = 0$$
$$\big(x^2-5x+6\big)\big(x^2-5{\cdot}x+66\big) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
  - Résolvons l'équation : $x^2{-}5x{+}6{=}0$
Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-5\big)^2-4\times1\times6 = 25-24 = 1$$
On a la simplification :
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$$
Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-(-5)-1}{2\times1} = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-(-5)+1}{2\times1} = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

  - Résolvons l'équation : $x^2{-}5{\cdot}x{+}66{=}0$
Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-5\big)^2-4\times1\times66 = 25-264 = -239$$
Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que ce polynôme n'admet aucune racine.

On en déduit que l'équation admet pour ensemble des solutions :
$$\mathcal{S} = \big\{2\ ;\ 3\big\}$$

On remarquera que, l'étape :
$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB} = MC\times MB\times\cos\widehat{CMB}$$
$$\Longrightarrow \quad \big(\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}\big)^2 = \big(MC\times MB\times\cos\widehat{CMB}\big)^2$$
est une implication et pas une équivalence. Il faut maintenant vérifier que les valeurs trouvées sont solutions de l'équation de départ.

C.12 Utilisons la formule :
$$AB^2 = AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$$
$$= 13{,}69+49-51{,}8\times\cos\big(48\big) = 62{,}69-51{,}8\times\cos\big(48\big)$$
$$\approx 28{,}029$$
On en déduit la mesure du segment $[AB]$ au millimètre près :
$$AB \approx \sqrt{28{,}029} \approx 5{,}294 \approx 5{,}3\,cm$$

C.13 Les formules d'Al-Kashi appliquées au triangle ABC permettent d'écrire l'égalité :
$$AC^2 = AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$$
$$3^2 = 5^2+BC^2-2\times5\times BC\times\cos\big(30\big)$$
$$9 = 25+BC^2-10\times BC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$0 = BC^2-5\sqrt{3}{\cdot}BC+16$$
En notant x la longueur du segment $[BC]$, on a l'égalité :
$$x^2-5\sqrt{3}{\cdot}x+16 = 0$$
Étudions le polynôme du membre de gauche de l'équation qui est une équation du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta{=}b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c{=}\big({-}5\sqrt{3}\big)^2{-}4\times1\times16{=}25\times3{-}64{=}75{-}64{=}11$$
Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-\big(-5\sqrt{3}\big)-\sqrt{11}}{2\times1} = \dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-\big(-5\sqrt{3}\big)+\sqrt{11}}{2\times1} = \dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}$

On en déduit que deux triangles réalisent les conditions de l'énoncé avec :

- $BC = \dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2} \approx 2{,}67 \approx 2{,}7\,cm$
- $BC = \dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2} \approx 5{,}99 \approx 6{,}0\,cm$

C.14 Les formules d'Al-Kashi appliquées au triangle ABC permettent d'écrire l'égalité :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times \cos\widehat{BAC}$$
$$17^2 = AB^2 + 23^2 - 2\times AB\times 23\times \cos(45)$$
$$289 = 529 + AB^2 - 46\times AB\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= AB^2 - 23\sqrt{2}\cdot AB + 240$$

En notant x la longueur du segment $[AB]$, on a l'égalité :
$$x^2 - 23\sqrt{2}\cdot x + 240 = 0$$

Étudions le polynôme du membre de gauche de l'équation qui est une équation du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \big(-23\sqrt{2}\big)^2 - 4\times1\times240 = 1058 - 960 = 98$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{98} = \sqrt{7^2\times2} = 7\cdot\sqrt{2}$

Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\big(-23\sqrt{2}\big)-7\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\big(-23\sqrt{2}\big)+7\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{30\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$$

On en déduit que deux triangles réalisent les conditions de l'énoncé avec :

- $AB = 8\sqrt{2} \approx 11{,}3137 \approx 11{,}3\,cm$
- $AB = 15\sqrt{2} \approx 21{,}2132 \approx 21{,}2\,cm$

C.15 Ainsi, on peut calculer la mesure des trois angles du triangle ABC :

- $$\cos\widehat{ACB} = \frac{AB^2-AC^2-BC^2}{-2\cdot AC\times BC}$$
$$\cos\big(\widehat{ACB}\big) = \frac{5{,}3^2-3{,}7^2-7^2}{-2\times3{,}7\times7}$$
$$\widehat{ACB} = \cos^{-1}\Big(\frac{5{,}3^2-3{,}7^2-7^2}{-2\times3{,}7\times7}\Big)$$
$$\widehat{ACB} \approx 48{,}0906 \approx 48{,}1^o$$
- $$\cos\widehat{ABC} = \frac{AC^2-AB^2-BC^2}{-2\cdot AB\times BC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{3{,}7^2-5{,}3^2-7^2}{-2\times5{,}3\times7}$$
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{3{,}7^2-5{,}3^2-7^2}{-2\times5{,}3\times7}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 31{,}3012 \approx 31{,}3^o$$
- $$\cos\widehat{BAC} = \frac{BC^2-AB^2-AC^2}{-2\cdot AB\times AC}$$
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{7^2-5{,}3^2-3{,}7^2}{-2\times5{,}3\times3{,}7}$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{7^2-5{,}3^2-3{,}7^2}{-2\times5{,}3\times3{,}7}\Big)$$
$$\widehat{BAC} \approx 100{,}6080 \approx 100{,}6^o$$

C.16 Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donnent :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Ainsi, on peut calculer la mesure des trois angles du triangle ABC :

- $$\cos\widehat{ACB} = \frac{AB^2-AC^2-BC^2}{-2\times AC\times BC}$$
$$\cos\big(\widehat{ACB}\big) = \frac{6{,}4^2-4{,}8^2-8^2}{-2\cdot\times4{,}8\times8}$$
$$\widehat{ACB} = \cos^{-1}\Big(\frac{6{,}4^2-4{,}8^2-8^2}{-2\cdot\times4{,}8\times8}\Big)$$
$$\widehat{ACB} \approx 53{,}1301 \approx 53{,}1^o$$
- $$\cos\widehat{ABC} = \frac{AC^2-AB^2-BC^2}{-2\times AB\times BC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{4{,}8^2-6{,}4^2-8^2}{-2\times6{,}4\times8}$$
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{4{,}8^2-6{,}4^2-8^2}{-2\times6{,}4\times8}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 36{,}8698 \approx 36{,}9^o$$
- $$\cos\widehat{BAC} = \frac{BC^2-AB^2-AC^2}{-2\times AB\times AC}$$
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{8^2-6{,}4^2-4{,}8^2}{-2\cdot\times6{,}4\times4{,}8}$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{8^2-6{,}4^2-4{,}8^2}{-2\times6{,}4\times4{,}8}\Big)$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{0}{-2\times6{,}4\times4{,}8}\Big)$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}(0)$$
$$\widehat{BAC} = 90^o$$

C.17 D'après les formules d'Al-Kashi, on a la relation :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$
$$4{,}7^2 = 5{,}5^2 + 6{,}2^2 - 2\times5{,}5\times6{,}2\times\cos\widehat{BAC}$$
$$4{,}7^2 - 5{,}5^2 - 6{,}2^2 = -2\times5{,}5\times6{,}2\times\cos\widehat{BAC}$$
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{4{,}7^2-5{,}5^2-6{,}2^2}{-2\times5{,}5\times6{,}2}$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{4{,}7^2-5{,}5^2-6{,}2^2}{-2\times5{,}5\times6{,}2}\Big)$$
$$\widehat{BAC} \simeq 46{,}899$$
$$\widehat{BAC} \simeq 46{,}9^o$$

C.18

- Calcul de la longueur DC :

  La formule d'Al-Kashi donne dans le triangle BCD :

  $$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2\times BD\times BC\times \cos\widehat{DBC}$$
  $$= 6^2 + 6^2 - 2\times 6\times 6\times \cos 35 = 36 + 36 - 72\times \cos 35$$
  $$\approx 13{,}02105$$

  Par application numérique, au dixième près, on obtient :
  $CD \approx \sqrt{13{,}02105} \approx 3{,}6084 \approx 3{,}6\,cm$

- Calcul des longueurs AD :

  Dans le triangle ABD, on a les formules :
  $$\frac{\sin\widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin\widehat{DAB}}{DB}$$
  Nous connaissons les valeurs suivantes :
  $$\frac{\sin 48}{AD} = \frac{\sin 47}{AB} = \frac{\sin 85}{6}$$
  Utilisons l'égalité :
  $$\frac{\sin 48}{AD} = \frac{\sin 47}{6}$$
  $$\sin(48)\times 6 = \sin(85)\times AD$$
  $$AD = \frac{\sin(48)\times 6}{\sin(85)}$$
  $$AD \approx 4{,}4759 \approx 4{,}5\,cm$$

- Calcul des longueurs AB :

  On utilise la formule obtenue précédemment et sachant que l'angle $\widehat{ADB}$ mesure 47^o
  $$\frac{\sin\widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin\widehat{DAB}}{DB}$$
  Nous connaissons les valeurs suivantes :
  $$\frac{\sin 48}{AD} = \frac{\sin 47}{AB} = \frac{\sin 85}{6}$$
  Utilisons l'égalité :
  $$\frac{\sin 47}{AB} = \frac{\sin 85}{6}$$
  $$6\times\sin(47) = AB\times\sin(85)$$
  $$AB = \frac{6\times\sin(47)}{\sin(85)}$$
  $$AB \approx 4{,}4048 \approx 4{,}4\,cm$$

C.19

1. a. Les points P, C et M sont alignés, on en déduit que les angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{BCM}$ sont supplémentaires :
   $$\widehat{PCB} + \widehat{BCM} = 180$$
   $$45 + \widehat{BCM} = 180$$
   $$\widehat{BCM} = 180 - 45$$
   $$\widehat{BCM} = 135^o$$
   Par supplémentarité des angles dans le triangle BCM, on a :
   $$\widehat{BCM} + \widehat{CMB} + \widehat{MBC} = 180^o$$
   $$135 + 25 + \widehat{MBC} = 180^o$$
   $$160 + \widehat{MBC} = 180$$
   $$\widehat{MBC} = 180 - 160$$
   $$\widehat{MBC} = 20^o$$

   b. Dans le triangle MBC, la formule des sinus donne les égalités :
   $$\frac{\sin\widehat{BCM}}{BM} = \frac{\sin\widehat{CMB}}{CB} = \frac{\sin\widehat{MBC}}{MC}$$
   $$\frac{\sin 135}{BM} = \frac{\sin 25}{CB} = \frac{\sin 20}{3{,}5}$$
   Utilisons l'égalité :
   $$\frac{\sin 25}{CB} = \frac{\sin 20}{3{,}5}$$
   Par utilisation du produit en croix :
   $$\sin(25)\times 3{,}5 = CB\times\sin(20)$$
   $$CB = \frac{\sin(25)\times 3{,}5}{\sin(20)}$$
   $$CB \approx 4{,}3247$$
   $$CB \approx 4{,}3\,km$$

2. Des trois formules d'Al-Kashi dans le triangle PCB, utilisons la formule :
   $$PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2\times PC\times BC\times\cos\widehat{PCB}$$
   $$PB^2 = 5^2 + 4{,}3^2 - 2\times 5\times 4{,}3\times\cos(45)$$
   $$PB^2 = 5^2 + 4{,}3^2 - 2\times 5\times 4{,}3\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   $$PB^2 \approx 13{,}0844$$
   $$PB \approx \sqrt{13{,}0844} \approx 3.6172 \approx 3{,}6\,km$$