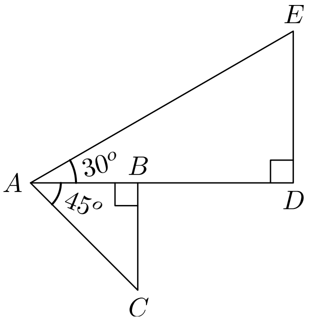
# Première Spécialité - Chapitre 11

E.1

**Proposition :** pour tout triplet de points $A$, $B$, $C$ distincts deux à deux, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

On considère la figure ci-dessous où : $AE=4\,cm$ et $AC=2\,cm$
et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite $(AD)$.



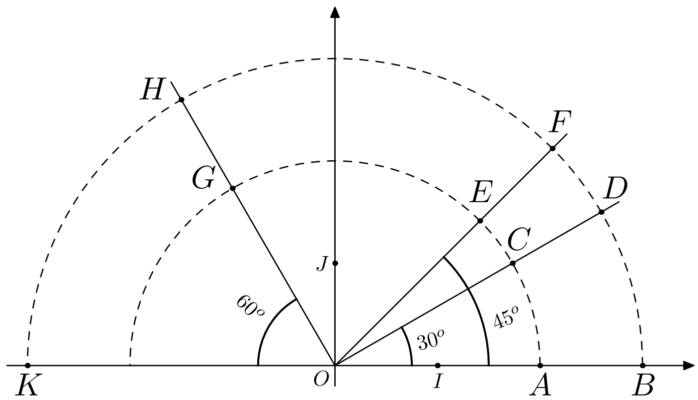

Déterminer la valeur des produits scalaires ci-dessous :

a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$  b $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$  c $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}$

**Rappels :**

| $\alpha$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $\sin\alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\times$ |

E.2 On considère le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :




où les angles sont indiqués en radian et les deux demi-cercles vérifient : $OA=2\,cm$ et $OB=3\,cm$.

1 Justifier que : $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}=0$

2 Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires :

a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$  b $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$

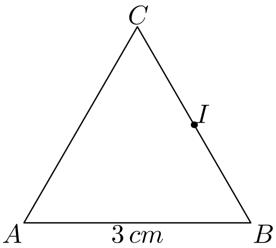
3 Déterminer les valeurs approchées au dixième près des produits scalaires :

a $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}$  b $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OH}$

**Rappels :**

| $\alpha$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $\sin\alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\times$ |

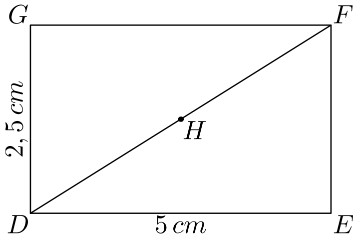
E.3




Dans le plan, on considère le triangle équilatéral $ABC$ représenté ci-dessous et le point $I$ milieu du segment $[BC]$. Déterminer les produits scalaires suivants :

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

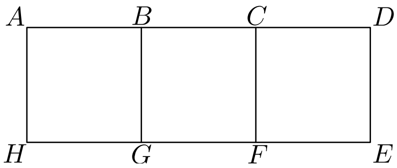
**E.4**




Dans le plan, on considère le rectangle $DEFG$ où le point $H$ est le milieu de la diagonale $[DF]$, déterminer les produits scalaires :

(a) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE}$ (b) $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DE}$ (c) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{HD}$

**E.5** Dans le plan, on considère les trois carrés de côté 2 représentés ci-dessous :



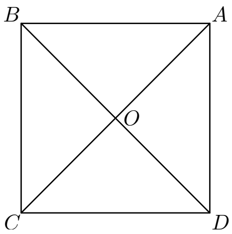

Établir les égalités suivantes :

(a) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$ (c) $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FH} = -8$

**E.6**

**Proposition :** soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires :
  - si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$
  - si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

On considère le carré $ABCD$ de côté 1 et admettant le point $O$ pour centre représenté ci-dessous :

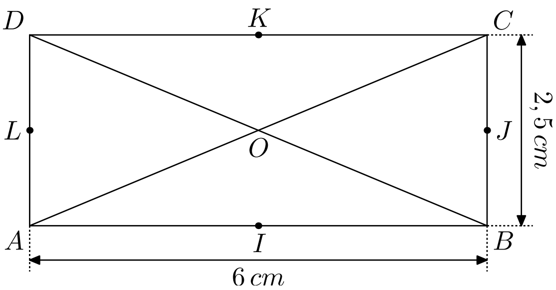



Déterminer les produits scalaires :

(a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (b) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC}$

(c) $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CO}$ (d) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}$

**E.7** On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6\,cm$ et $CB = 2{,}5\,cm$ :



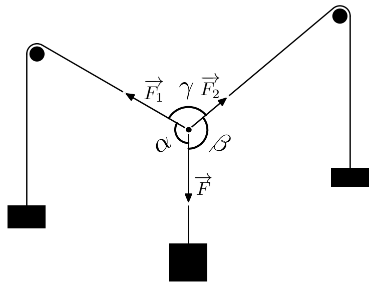

Les points $I$, $J$, $K$, $L$ sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Le point $O$ est le centre du rectangle $ABCD$.

Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

(a) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ (c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BI}$

(d) $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DO}$ (e) $\overrightarrow{KO} \cdot \overrightarrow{DB}$ (f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

**E.8** Le schéma ci-dessous représente un système de poulies à l'équilibre. Chacun des poids exerce sur le noeud proportionnellement à son poids.




On donne les informations suivantes :

$\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| = 8\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F_2}\right\| = 6\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F}\right\| = 12\,N$

On note $R$ la résultante de toutes ces forces :

$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

(1) Déterminer en fonction de *alpha*, $\beta$ et $\gamma$ les trois produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_1} \quad ; \quad \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_2} \quad ; \quad \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F}$

(2) On suppose maintenant que ce système est en position d'équilibre, ainsi on a $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.

(a) Montrer que les mesures des angles vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\beta + 6 = 0 \\ 6\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\gamma + 4 = 0 \\ 6\cdot\cos\beta + 4\cdot\cos\gamma + 3 = 0 \end{cases}$$

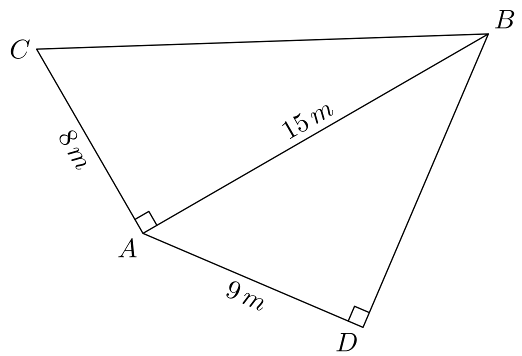
(b) En déduire les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ pour la position d'équilibre.

**E.9**

**Proposition :** soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\left(\lambda \times \overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \times \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens :
  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraire :
  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

On considère les deux triangles $ABC$ et $ABD$ rectangle respectivement en $A$ et $D$ représentés ci-dessous :



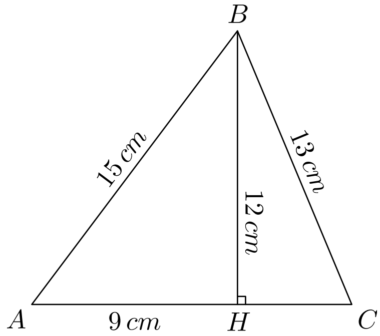

(1) Établir que : $BC = 17\,m \quad ; \quad BD = 12\,m$

(2) Déterminer les valeurs des produits scalaires suivants :

(a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ (c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

(d) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$ (e) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (f) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

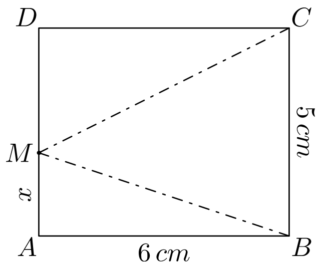
**E.10** On considère le triangle $ABC$ et $H$ le pied de la hauteur issue du sommet $B$ et dont les mesures sont représentées ci-dessous :




(1) Établir que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 99$

(2) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

**E.11**




Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ et un point $E$ du segment $[DC]$ tels que :
$BC = 5\,cm$ ; $AB = 6\,cm$

On note $M$ un point du segment $[AD]$ et on note $x$ la longueur du segment $[AM]$.

(1) Déterminer une expression du produit scalaire $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ en fonction de $x$.

(2) Déterminer la, ou les valeurs de $x$, afin que l'angle $\widehat{BMC}$ ait pour mesure : $\widehat{EMB} = 45^o$

On utilisera la factorisation :
$x^4 - 10x^3 + 107x^2 - 30x + 756 = \left(x^2 - 5x + 6\right)\left(x^2 - 5{\cdot}x + 66\right)$

**E.12** On considère le triangle $ABC$ dont les mesures sont :
$AC = 3{,}7\,cm$ ; $BC = 7\,cm$ ; $\widehat{ACB} = 48^o$

Déterminer la mesure, au millimètre près, du segment $[AB]$.

**E.13** On considère un triangle $ABC$ vérifiant les mesures :
$AB = 5\,cm$ ; $AC = 3\,cm$ ; $\widehat{ABC} = 30^o$

Déterminer les mesures possibles du segment $[BC]$ réalisant ces conditions. *(on donnera ces mesures au millimètre près)*

**E.14** On considère un triangle $ABC$ vérifiant les mesures :
$BC = 17\,cm$ ; $AC = 23\,cm$ ; $\widehat{BAC} = 45^o$

Déterminer les mesures possibles du segment $[AB]$ réalisant ces conditions. *(on donnera ces mesures au millimètre près)*

**E.15**

Les formules d'Al-Kashi appliquées au triangle $ABC$ donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2{\times}AC{\times}BC{\times} \cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2{\times}AB{\times}BC{\times} \cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2{\times}AB{\times}AC{\times} \cos\widehat{BAC}$

On considère le triangle $ABC$ dont les mesures sont :

$AB = 5{,}3\,cm \quad ; \quad AC = 3{,}7\,cm \quad ; \quad BC = 7\,cm$

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle $ABC$.

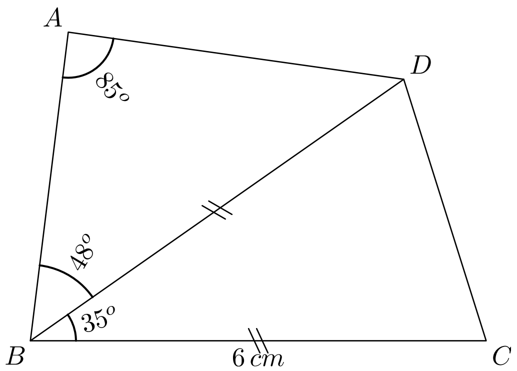
**E.16** Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle $ABC$ ayant les mesures suivantes :

$AB = 6{,}4\,cm \quad ; \quad AC = 4{,}8\,cm \quad ; \quad BC = 8\,cm$

**E.17** On considère le triangle $ABC$ dont les mesures sont :
$AB = 5{,}5\,cm \quad ; \quad AC = 6{,}2\,cm \quad ; \quad BC = 4{,}7\,cm$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degrés près.

**E.18** On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous :

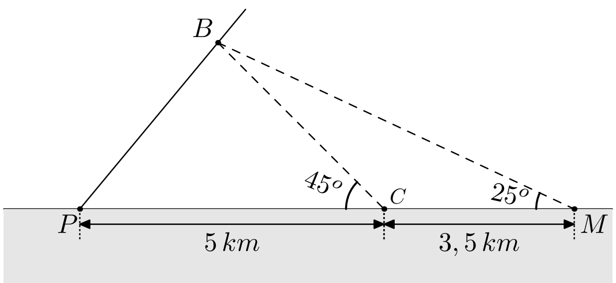



1. Les formules d'AL-Kashi donne la formule :
   $DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2\times BD\times BC\times \cos\widehat{DBC}$

   En déduire la mesure de la longueur $DC$ arrondie au millimètre près.

2. La formule des sinus exprimés dans le triangle $ABD$ s'exprime par :
   $$\frac{\sin\widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin\widehat{DAB}}{DB}$$
   En déduire les mesures des longueurs $AB$ et $AD$ arrondie au millimètre près.

**E.19** Un bateau $B$ rejoint le port $P$ en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.




1. (a) Déterminer les mesures des angles du triangle $BCM$.

   (b) La formule des sinus s'exprime dans le triangle $MBC$ par :
   $$\frac{\sin\widehat{BCM}}{BM} = \frac{\sin\widehat{CMB}}{CB} = \frac{\sin\widehat{MBC}}{MC}$$
   En déduire la longueur $BC$ arrondie à l'hectomètre près.

2. Dans le triangle $CBP$, les formules d'Al-Kashi s'exprime par :
   - $PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2\times PB\times BC\times \cos\widehat{PBC}$
   - $PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2\times PC\times BC\times \cos\widehat{PCB}$
   - $CB^2 = CP^2 + PB^2 - 2\times CP\times PB\times \cos\widehat{CPB}$

   En déduire la distance séparant le bateau du port arrondie à l'hectomètre près.