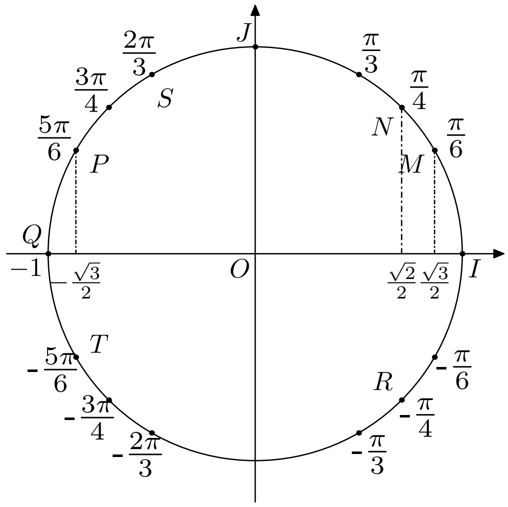
**C.1**

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :




(a) Le point $M$ est repéré par l'angle $\frac{\pi}{6}$. L'abscisse du point $M$ a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) Le point $N$ est repéré par l'angle $\frac{\pi}{4}$. L'abscisse du point $N$ a pour valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

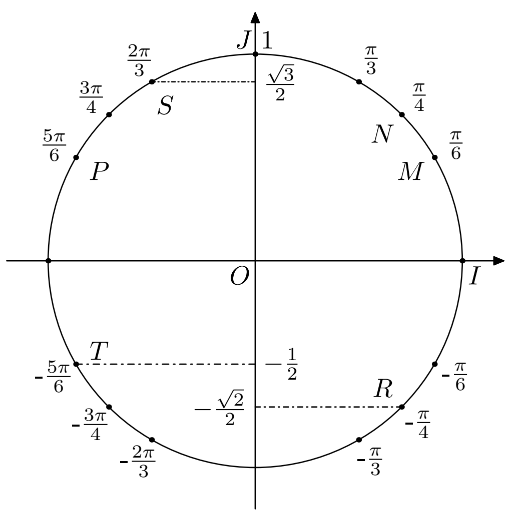
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) Le point $P$ est repéré par l'angle $\frac{5\pi}{6}$. L'abscisse du point $P$ a pour valeur $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) Le point $Q$ est repéré par l'angle $\pi$. L'abscisse du point $Q$ a pour valeur $-1$.
On en déduit : $\cos\left(\pi\right) = -1$

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :




(e) Le point $R$ est repéré par l'angle $-\frac{\pi}{4}$. L'ordonnée du point $R$ a pour valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) Le point $S$ est repéré par l'angle $\frac{2\cdot\pi}{3}$. L'ordonnée du point $S$ a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit : $\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

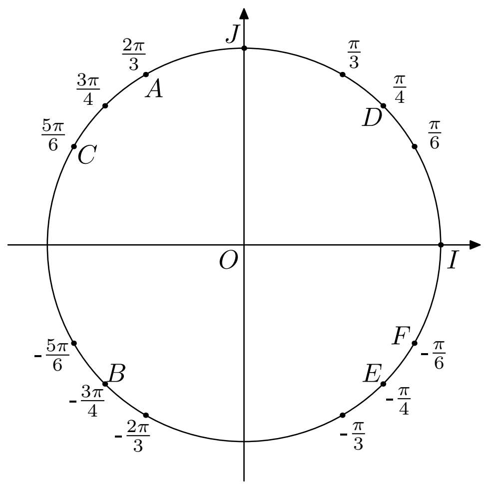
(g) Le point $T$ est repéré par l'angle $-\frac{5\pi}{6}$. L'ordonnée du point $T$ a pour valeur $-\frac{1}{2}$.

On en déduit : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

(h) Le point $J$ est repéré par l'angle $\frac{\pi}{2}$. L'ordonnée du point $J$ a pour valeur 1.
On en déduit : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

**C.2**

(1) Voici les six points représentés sur le cercle trigonométrique :




(2) Par lecture graphique, voici les valeurs des cosinus et des sinus associées à chacun de ces six angles :

(a) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ; $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(e) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

**C.3**

1 a Le point $M$ a pour coordonnées : $M\left(\cos\frac{\pi}{6}\,;\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

D'après les valeurs trigonométriques des angles remarquables :

$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

b Par la symétrie axiale d'axe $(OJ)$, le point $M'$ a pour coordonnées :

$$M'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

La figure ci-dessous montre que l'angle repérant le point $M'$ est le supplémentaire de $\frac{\pi}{6}$ :

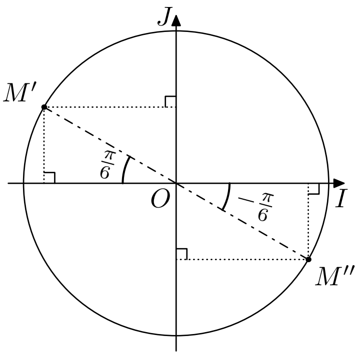
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

c Par la symétrie axiale d'axe $(OI)$, le point $M''$ a pour coordonnées :

$$M''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$$

La figure ci-dessous montre que l'angle repérant le point $N'$ est :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right) = -\frac{\pi}{6}$$




2 a Repérer par l'angle $\frac{\pi}{3}$ repérant le point $N$ :

$$N\left(\cos\frac{\pi}{3}\,;\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b Le point $N'$ a pour coordonnées : $N'\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

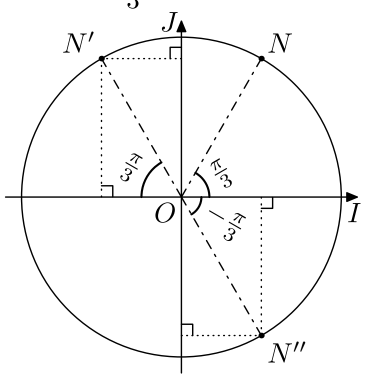
L'angle repérant le point $N'$ a pour angle :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

c Le point $N''$ a pour coordonnées : $N''\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

L'angle repérant le point $N''$ a pour angle :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right) = -\frac{\pi}{3}$$




C.4

1 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

2 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

3 $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

C.5

a $\cos\left(x-\pi\right) = \cos\left[-(\pi-x)\right] = \cos(\pi-x) = -\cos x$

b $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$= -\cos x$

c $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$= \cos x$

d $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$= -\sin x$

C.6

a $\sin\left(3\pi+x\right) = \sin\left(\pi+x+2\pi\right) = \sin\left(\pi+x\right) = -\sin x$

b $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x+2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

c $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

d $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$
$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x$

C.7

a $\sin\left(\pi-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x + \sin x = 2\cdot\sin x$

b $3\cdot\sin\left(\pi+x\right) - 2\cdot\sin\left(\pi-x\right) + 4\cdot\sin\left(x-\pi\right)$
$= -3\cdot\sin x - 2\cdot\sin x + 4\cdot\sin\left[-(\pi-x)\right]$
$= -3\cdot\sin x - 2\cdot\sin x - 4\cdot\sin\left(\pi-x\right)$
$= -3\cdot\sin x - 2\cdot\sin x - 4\cdot\sin x = -9\cdot\sin x$

C.8

1 a D'après la formule donnée dans l'énoncé, on a :

$$\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

b $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c Sur son ensemble de définition, la fonction tangente vérifie la relation :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Utilisons cette égalité pour $x=\dfrac{\pi}{8}$ :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}$$

$$= \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}} = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(3-2\sqrt{2})}{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

2. On a les manipulations suivantes :

$$A = \cos\frac{9\pi}{8} - 3\cdot\sin\frac{5\pi}{8} + 2\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) - 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + 2\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right) - 3\cdot\cos\frac{\pi}{8} + \left(-2\cdot\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{8} - 3\cdot\cos\frac{\pi}{8} - 2\cdot\cos\frac{\pi}{8} = -6\cdot\cos\frac{\pi}{8}$$

## C.9

1. On a :

$$f(-x) = \big[(-x)-1\big]\cdot\big[(-x)+1\big] = \big(-x-1\big)\cdot\big(-x+1\big)$$

$$= \big[-(x+1)\big]\cdot\big[-(x-1)\big] = (x+1)\cdot(x-1) = f(x)$$

On en déduit que la fonction $f$ est paire.

2. On a :

$$g(-x) = 3\cdot(-x)^3 - 2\cdot(-x) = -3\cdot x^3 + 2\cdot x$$

$$= -\big[3\cdot x^3 - 2\cdot x\big] = -g(x)$$

Ainsi, on a : $g(-x) = -g(x)$
On en déduit que la fonction $g$ est impaire.

3. On a :

$$h(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} - h(x)$$

On en déduit que la fonction $h$ est impaire.

4. On a :

$$j(-x) = \cos\big[3\cdot(-x)^3\big] = \cos\big[3\cdot(-x^3)\big] = \cos\big(-3\cdot x^3\big)$$

La fonction cosinus est paire

$$= \cos\big(3\cdot x^3\big) = j(x)$$

La fonction $j$ est paire.