

Première Spécialité - Chapitre 8

C.1

- $u_0 = 5$
- $u_1 = u_0 + 3 = 8$
- $u_2 = u_1 + 3 = 11$
- $u_3 = u_2 + 3 = 14$
- $u_4 = u_3 + 3 = 17$

C.2

La suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 est définie par les deux relations :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 + r = 2 + 3 = 5$
- $u_2 = u_1 + r = 5 + 3 = 8$
- $u_3 = u_2 + r = 8 + 3 = 11$
- $u_4 = u_3 + r = 11 + 3 = 14$

C.3

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -3 . Ses premiers termes ont pour valeur :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 + r = 2 + (-3) = -1$
- $u_2 = u_1 + r = -1 + (-3) = -4$
- $u_3 = u_2 + r = -4 + (-3) = -7$

C.4

- 1 a Les valeurs affectées successivement à la variable a lors de l'algorithme sont :
2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17.

- 2 a Voici l'algorithme modifié :

```
a ← 2
Pour i allant de 0 à 4
    a ← a+4
Fin Pour
```

- b Voici l'algorithme modifié :

```
a ← 5
Pour i allant de 0 à 1
    a ← a+5
Fin Pour
```

C.5

La suite (u_n) étant une suite arithmétique de raison 5, on en déduit la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = u_n + 5$$

On en déduit la valeur suivante des cinq premiers termes de cette suite :

- $u_1 = 3$
- $u_2 = u_1 + 5 = 3 + 5 = 8$
- $u_3 = u_2 + 5 = 8 + 5 = 13$
- $u_4 = u_3 + 5 = 13 + 5 = 18$
- $u_5 = u_4 + 5 = 18 + 5 = 23$

C.6

Voici les six premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 6$

- $v_1 = v_0 - 2 = 6 - 2 = 4$
- $v_2 = v_1 - 2 = 4 - 2 = 2$
- $v_3 = v_2 - 2 = 2 - 2 = 0$
- $v_4 = v_3 - 2 = 0 - 2 = -2$
- $v_5 = v_4 - 2 = -2 - 2 = -4$

C.7

- a Cette relation permet d'écrire :

- Pour $n=0$: $u_{0+1} = u_0 + 4$
 $u_1 = 3 + 4 = 7$
- Pour $n=1$: $u_{1+1} = u_1 + 4$
 $u_2 = 7 + 4 = 11$
- Pour $n=2$: $u_{2+1} = u_2 + 4$
 $u_3 = 11 + 4 = 15$

Cette relation permet de vérifier la valeur de 4 premiers termes de la suite (u_n) .

- b Cette relation permet d'écrire :

- Pour $n=0$: $u_{0+1} = 4 \cdot u_0$
 $u_1 = 4 \times 3 = 12$

La valeur obtenue pour u_1 ne correspond pas à l'énoncé.

- c Cette relation permet d'écrire :

- Pour $n=0$: $u_0 = 3 + 3 \times 0 = 3 + 0 = 3$
- Pour $n=1$: $u_1 = 3 + 3 \times 1 = 3 + 3 = 6$

La valeur obtenue pour u_1 ne correspond à la valeur du terme de l'énoncé.

- d Cette relation permet d'écrire :

- Pour $n=0$: $u_0 = 3 + 4 \times 0 = 3 + 0 = 3$
- Pour $n=1$: $u_1 = 3 + 4 \times 1 = 3 + 4 = 7$
- Pour $n=2$: $u_0 = 3 + 4 \times 2 = 3 + 8 = 11$
- Pour $n=3$: $u_3 = 3 + 4 \times 3 = 3 + 12 = 15$

Cette relation permet de vérifier la valeur des 4 premiers termes de la suite (u_n) .

C.8

- 1 On remarque pour n allant de 0 à 3, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 4$$

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme 3 et de raison 4.

- 2 Voici les deux expressions correspondantes à cette suite :

$$\text{a } u_{n+1} = u_n + 4 \quad \text{c } u_n = 4 \cdot n + 3$$

C.9

- 1 Cette suite est une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison -2 .

- 2 La formule explicite définissant la suite (u_n) est :

$$u_n = u_0 + r \cdot n = 5 + (-2) \cdot n = -2n + 5$$

- 3 Grâce à la formule explicite, on a l'égalité :

$$u_{20} = -2 \times 20 + 5 = -40 + 5 = -35$$

C.10

① Le terme de rang n , pour $n \in \mathbb{N}$, a pour expression :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + n \times r \\ &= 3 + \frac{2}{3} \cdot n \end{aligned}$$

② Le terme de rang 112 a pour valeur :

$$u_{112} = 3 + \frac{2}{3} \times 112 = 3 + \frac{224}{3} = \frac{9}{3} + \frac{224}{3} = \frac{233}{3}$$

C.11● **1er méthode :**

La suite (u_n) étant une suite arithmétique, son terme de rang n admet pour expression :

$$u_n = u_0 + r \cdot n$$

où r est la raison de cette suite.

La connaissance des deux termes donnés dans l'énoncé permet d'obtenir le système d'équations :

$$\begin{cases} u_4 = u_0 + 4 \times r \\ u_{22} = u_0 + 22 \times r \end{cases}$$

qui devient :
$$\begin{cases} 12 = u_0 + 4 \times r \\ -24 = u_0 + 22 \times r \end{cases}$$

Par soustraction de la première ligne par la seconde, on obtient l'équation :

$$12 - (-24) = 4 \times r - 22 \times r$$

$$36 = -18 \times r$$

$$r = \frac{36}{-18}$$

$$r = -2$$

La raison de la suite vaut -2

La première équation permet d'obtenir le premier terme de la suite :

$$u_4 = u_0 + 4 \times r$$

$$12 = u_0 + 4 \times (-2)$$

$$12 = u_0 - 8$$

$$u_0 = 12 + 8$$

$$u_0 = 20$$

Le premier terme de la suite a pour valeur 20.

● **2nd méthode :**

La suite étant arithmétique, pour passer du rang 4 au rang 22, il faut ajouter 18 fois la raison :

$$u_{22} = u_4 + 18 \cdot r$$

$$-24 = 12 + 18 \cdot r$$

$$18 \cdot r = -24 - 12$$

$$18 \cdot r = -36$$

$$r = \frac{-36}{18}$$

$$r = -2$$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 . Ainsi, sa formule explicite a pour forme :

$$u_n = u_0 + (-2) \cdot n$$

Appliquons cette formule pour le rang 4 :

$$u_4 = u_0 - 2 \times 4$$

$$12 = u_0 - 8$$

$$u_0 = 12 + 8$$

$$u_0 = 20$$

Ainsi, la suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme 20 et de raison -2 .

C.12

Pour passer du terme de rang 10 au terme de rang 16, il faut ajouter 6 fois la raison. Ainsi, on a l'égalité :

$$\begin{array}{l|l} u_{16} = u_{10} + 6 \times r & r = \frac{9}{6} \\ 14 = 5 + 6 \times r & r = \frac{3}{2} \\ 6 \times r = 14 - 5 & \\ 6 \times r = 9 & \end{array}$$

La propriété des termes d'une suite arithmétique permettent d'exprimer le terme de rang 10 en fonction de u_1 et de r :

$$\begin{array}{l|l} u_{10} = u_1 + (10 - 1) \cdot r & u_1 = 5 - \frac{27}{2} \\ 5 = u_1 + 9 \times \frac{3}{2} & u_1 = \frac{10}{2} - \frac{27}{2} \\ 5 = u_1 + \frac{27}{2} & u_1 = -\frac{17}{2} \end{array}$$

Ainsi, la suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $-\frac{17}{2}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

C.13

Puisque (w_n) est une suite arithmétique, on a :

$$w_8 = w_6 + 2 \times r$$

$$w_8 - w_6 = 2 \cdot r$$

$$1 - 7 = 2 \cdot r$$

$$r = \frac{-6}{2} = -3$$

On a la relation :

$$w_6 = w_0 + 6 \times r$$

$$7 = w_0 + 6 \times (-3)$$

$$7 = w_0 - 18$$

$$w_0 = 7 + 18$$

$$w_0 = 25$$

On en déduit que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme 25 et de raison -3 .

C.14

Puisque (w_n) est une suite arithmétique, on a :

$$w_{99} = w_{15} + 84 \times r$$

$$w_{99} - w_{15} = 84 \cdot r$$

$$180 - 54 = 84 \cdot r$$

$$r = \frac{126}{84} = \frac{3}{2}$$

On a la relation :

$$w_{15} = w_1 + (15 - 1) \times r$$

$$54 = w_1 + 14 \times \frac{3}{2}$$

$$54 = w_1 + 21$$

$$w_1 = 54 - 21$$

$$w_1 = 33$$

Ainsi, la suite (w_n) est la suite arithmétique de premier terme 33 et de raison $\frac{3}{2}$.

C.15

On a la relation :

$$\begin{aligned}
v_{15} &= v_7 + 8 \times r \\
v_{15} - v_7 &= 8 \cdot r \\
r &= \frac{v_{15} - v_7}{8} \\
r &= \frac{39 - 13}{8} \\
r &= \frac{26}{8} \\
r &= \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

Pour déterminer le premier terme, on utilise :

$$\begin{aligned}
v_7 &= v_1 + (7 - 1) \cdot r \\
13 &= v_1 + 6 \times \frac{13}{4} \\
13 &= v_1 + 3 \times \frac{13}{2} \\
13 &= v_1 + \frac{39}{2} \\
v_1 &= 13 - \frac{39}{2} \\
v_1 &= \frac{26}{2} - \frac{39}{2} \\
v_1 &= -\frac{13}{2}
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est arithmétique de premier terme $-\frac{13}{2}$ et de raison $\frac{13}{4}$.

C.16 Pour qu'une suite soit arithmétique, il faut que la différence de deux termes consécutifs soit constante. Or, pour la suite (u_n) , la différence de termes consécutifs n'est pas constante :

$$u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3 \quad ; \quad u_2 - u_1 = 9 - 5 = 4$$

La suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

C.17 *La correction n'existe pas.*

C.18 Étudions la différence de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 3) - u_n = 3 > 0$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

C.19 La différence de deux termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= [-32 \cdot (n + 1) + 102] - [-32 \cdot n + 102] \\
&= -32 \cdot n - 32 + 102 + 32 \cdot n - 102 = -32
\end{aligned}$$

Puisque, on a : $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La différence de deux termes quelconques de la suite est négative. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

C.20 Étudions la différence de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= [4 - (n + 1)] - (4 - n) \\
&= 4 - n - 1 - 4 + n = -1 < 0
\end{aligned}$$

On a les comparaisons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &< 0 \\
u_{n+1} &< u_n
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

C.21

La correction n'existe pas.

C.22

1) Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad u_0 &= 5 \\
\bullet \quad u_1 &= u_0 + 2 = 5 + 2 = 7 \\
\bullet \quad u_2 &= u_1 + 2 = 7 + 2 = 9 \\
\bullet \quad u_3 &= u_2 + 2 = 9 + 2 = 11
\end{aligned}$$

2) La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 2. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :

$$u_n = u_0 + n \cdot r = 5 + 2 \cdot n$$

3) Les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) obtenues à la question 1) permettent de conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

C.23

1) La suite (u_n) est décroissante.

2) La suite (v_n) est décroissante.

3) On ne peut préciser le sens de variation de la suite. En fait, elle prend des valeurs alternées entre les nombres positifs et négatifs.

C.24 On souhaite déterminer la valeur de la somme S définie par :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{32}$$

La suite (u_n) étant arithmétique, on a :

$$u_{32} = u_0 + 32 \times r = 3 + 32 \times 5 = 3 + 160 = 163$$

On en déduit la valeur de la somme S :

$$\begin{aligned}
S = u_0 + u_1 + \dots + u_{32} &= \frac{33 \times (u_0 + u_{32})}{2} = \frac{33 \times (3 + 163)}{2} \\
&= \frac{33 \times 166}{2} = 33 \times 83 = 2739
\end{aligned}$$

C.25 Le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = u_0 + n \times r = -10 + 3n$$

Donc le terme de rang 84 a pour valeur :

$$u_{84} = -10 + 3 \times 84 = -10 + 192 = 242$$

La somme S est la somme des 85 premiers termes de la suite (u_n) . La suite (u_n) étant arithmétique, on en déduit :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{85 \times (u_0 + u_{84})}{2} = \frac{85 \times (-10 + 242)}{2} = \frac{85 \times 232}{2} \\
&= 85 \times 116 = 9860
\end{aligned}$$

C.26 L'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n permet d'affirmer que la suite (v_n) est la suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 3. On a les valeurs :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad v_0 &= 4 \\
\bullet \quad v_{19} &= 4 + 19 \times 3 = 4 + 57 = 61
\end{aligned}$$

La somme S' des 20 premiers termes de la suite (v_n) admet pour expression :

$$S' = \frac{20 \times (u_0 + u_{19})}{2} = \frac{20 \times (4 + 61)}{2} = 10 \times 65 = 650$$

C.27

- 1 a Les termes de la somme S étant les premiers termes de la suite arithmétique (u_n) , on en déduit que le premier terme a pour valeur :

$$u_0 = 1$$

et la raison de cette suite a pour valeur :

$$u_1 - u_0 = 3 - 1 = 2$$

- b Déterminons le rang de la suite (u_n) ayant pour valeur 101 :

$$\begin{array}{l|l} u_n = 1 + 2 \cdot n & 2 \cdot n = 100 \\ 101 = 1 + 2 \cdot n & n = \frac{100}{2} \\ 2 \cdot n = 101 - 1 & n = 50 \end{array}$$

- 2 On en déduit : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$
La somme S comporte 51 termes et sa somme a pour valeur :

$$S = \frac{51 \times (u_0 + u_{50})}{2} = \frac{51 \times (1 + 101)}{2} = \frac{51 \times 102}{2} = 51 \times 51 = 2601$$

C.28

- 1 Les termes de la somme : $S = \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + 10$
sont les premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme $\frac{2}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Déterminons le rang du terme de la suite (u_n) valant 10 :

$$\begin{array}{l|l} u_n = 10 & n \times \frac{1}{3} = \frac{28}{3} \\ u_0 + n \times r = 10 & n = 3 \times \frac{28}{3} \\ \frac{2}{3} + n \times \frac{1}{3} = 10 & n = 28 \\ n \times \frac{1}{3} = 10 - \frac{2}{3} & \end{array}$$

- 2 Ainsi, la somme S comporte donc 29 termes et s'exprime par : $S = u_0 + \dots + u_{28}$
La formule de la somme des termes d'une suite arithmétique donne :

$$S = \frac{29 \times \left(\frac{2}{3} + 10 \right)}{2} = \frac{29 \times \frac{32}{3}}{2} = 29 \times \frac{32}{3} \times \frac{1}{2} = 29 \times \frac{16}{3} = 29 \times \frac{16}{3} = \frac{464}{3}$$

C.29

- 1 a Les termes de la somme S étant les premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) . On en déduit que le premier terme de cette suite est :

$$u_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

et dont la raison r a pour valeur :

$$r = u_1 - u_0 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- b Déterminons le rang du terme de la suite (u_n) valant $\frac{16\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{array}{l} u_n = \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot n = \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \times (1 + n) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 + n = \frac{16\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ 1 + n = \frac{16\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{\sqrt{3}} \\ n + 1 = 16 \\ n = 15 \end{array}$$

- 2 Ainsi, S est la somme des 16 termes de la suite arithmétique (u) . On en déduit la valeur de la somme

$$S = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{16\sqrt{3}}{3} \right) \times 16}{2} = \frac{17\sqrt{3}}{3} \times 8 = \frac{136}{3} \cdot \sqrt{3}$$

- C.30** On remarque que la suite arithmétique (u_n) a pour premier terme 7 et pour raison 3.

Notons n le rang du terme ayant 340 pour valeur. On a la relation :

$$\begin{array}{l|l} u_n = 340 & n \times 3 = 333 \\ u_0 + n \times r = 340 & n = \frac{333}{3} \\ 7 + n \times 3 = 340 & n = 111 \\ n \times 3 = 340 - 7 & \end{array}$$

Ainsi, la somme S s'exprime par :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{111}$$

D'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique, on a :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{111} = \frac{112 \times (u_0 + u_{111})}{2} = 56 \times (7 + 340) = 19\,432$$

C.31

- 1 Modélisons la production de voiture thermique de cette entreprise par une suite (u_n) où u_0 est la production actuelle et u_n est la production après n mois ($n \in \mathbb{N}$).

● Puisque le constructeur automobile décide de réduire sa production de voiture thermique de 3 000 véhicules chaque mois, on en déduit que la suite (u_n) modélisant sa production est une suite arithmétique où -3000 est sa raison.

● La production actuelle étant de 80 000 véhicules thermiques, on en déduit que son premier terme a pour valeur : $u_0 = 80\,000$

- 2 Voici les deux expressions caractérisant notre suite (u_n) :

- $u_{n+1} = u_n - 3000$ avec $u_0 = 80\,000$
- $u_n = 80\,000 - 3\,000 \times n$

- 3 Il est possible de saisir cette suite à l'aide des outils de sa calculatrice et d'obtenir la valeur recherchée.

Voici la résolution algébrique de cette question.

$$\begin{aligned}
u_n &\leq 10\,000 \\
u_n &\leq 10\,000 \\
80\,000 - 3\,000 \times r &\leq 10\,000 \\
-3\,000 \times r &\leq 10\,000 - 80\,000 \\
-3\,000 \times r &\leq -70\,000 \\
r &\geq \frac{-70\,000}{-3\,000} \\
r &\geq \frac{70}{3}
\end{aligned}$$

D'après la valeur approchée : $\frac{70}{3} \approx 23,3$

$$r \geq 24$$

Il faudra donc 24 mois pour que la production de véhicules électriques de l'entreprise passe sous les 10 000 unités.

C.32 Une suite géométrique de raison 3 vérifie la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 3 \cdot u_n$$

Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 2 = 6$
- $u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 6 = 18$
- $u_3 = 3 \times u_2 = 3 \times 18 = 54$
- $u_4 = 3 \times u_3 = 3 \times 54 = 162$

C.33

① La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme 64 et de raison $\frac{1}{2}$.

② Voici les termes successifs de la suite (v_n) :

- $v_1 = \frac{1}{2} \cdot v_0 = \frac{1}{2} \times 64 = 32$
- $v_2 = \frac{1}{2} \cdot v_1 = \frac{1}{2} \times 32 = 16$
- $v_3 = \frac{1}{2} \cdot v_2 = \frac{1}{2} \times 16 = 8$
- $v_4 = \frac{1}{2} \cdot v_3 = \frac{1}{2} \times 8 = 4$
- $v_5 = \frac{1}{2} \cdot v_4 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
- $v_6 = \frac{1}{2} \cdot v_5 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

C.34 Voici les six premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = -2$
- $v_1 = \frac{1}{2} \cdot v_0 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$
- $v_2 = \frac{1}{2} \cdot v_1 = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$
- $v_3 = \frac{1}{2} \cdot v_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
- $v_4 = \frac{1}{2} \cdot v_3 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$
- $v_5 = \frac{1}{2} \cdot v_4 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}$

C.35 La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$, elle est définie par les relations :

$$v_0 = 3 \quad ; \quad v_{n+1} = -\frac{3}{2} \cdot v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Voici les quatre premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 3$
- $v_1 = q \times v_0 = -\frac{3}{2} \times 3 = -\frac{9}{2}$
- $v_2 = q \times v_1 = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{4}$
- $v_3 = q \times v_2 = -\frac{3}{2} \times \frac{27}{4} = -\frac{81}{8}$

C.36 (v_n) est la suite géométrique de premier terme 54 et de raison $\frac{1}{3}$. Ses premiers termes ont pour valeur :

- $v_1 = 54$
- $v_2 = q \times v_1 = \frac{1}{3} \times 54 = 18$
- $v_3 = q \times v_2 = \frac{1}{3} \times 18 = 6$
- $v_4 = q \times v_3 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$

C.37 La suite (u_n) étant géométrique de raison 2, on a la relation :

$$u_8 = u_0 \times q^8$$

$$u_8 = 5 \times 2^8$$

$$u_8 = 1280$$

C.38

• Le terme de rang 11 s'exprime par :

$$\begin{aligned}
u_{11} &= u_0 \times q^{11} = \frac{2^4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{2^4}{3} \times \frac{3^{11}}{2^{11}} \\
&= \frac{2^4 \times 3^{11}}{3 \times 2^{11}} = \frac{3^{10}}{2^7}
\end{aligned}$$

• Le terme de rang 28 s'exprime par :

$$\begin{aligned}
u_{28} &= u_0 \times q^{28} = \frac{2^4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{2^4}{3} \times \frac{3^{28}}{2^{28}} \\
&= \frac{2^4 \times 3^{28}}{3 \times 2^{28}} = \frac{3^{27}}{2^{24}}
\end{aligned}$$

C.39 La suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison $\frac{2}{3}$ admet pour forme explicite :

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0 \times q^n \\
&= 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Le terme de rang 4 a pour valeur :

$$u_4 = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 4 \times \frac{2^4}{3^4} = 2^2 \times \frac{2^4}{3^4} = \frac{2^6}{3^4}$$

C.40 La suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{3}{4}$ a son terme de rang n qui a pour expression :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Le terme de rang 6 a pour valeur :

$$u_6 = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 2 \times \frac{3^6}{4^6} = 2 \times \frac{3^6}{(2^2)^6} = 2 \times \frac{3^6}{2^{2 \times 6}} \\ = 2 \times \frac{3^6}{2^{12}} = \frac{3^6}{2^{11}}$$

C.41 La suite (v_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on a la relation :

$$v_{20} = v_7 \times q^{20-7}$$

$$v_{20} = 3^2 \times 2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$$

$$v_{20} = 3^2 \times 2^3 \times \frac{1}{2^{13}}$$

$$v_{20} = \frac{3^2 \times 2^3}{2^{13}}$$

$$v_{20} = \frac{3^2}{2^{10}}$$

C.42 Pour passer du terme de w_3 au terme w_0 , il faut multiplier par q^3 , on a :

$$\begin{array}{l|l} w_3 = w_0 \times q^3 & q^3 = 2^3 \\ 40 = 5 \times q^3 & q = 2 \\ q^3 = 8 & \end{array}$$

La raison de cette suite est 2.

Le premier terme de cette suite a pour valeur $w_0 = 5$

C.43 Pour passer du terme de rang 4 au terme de rang 7, il faut multiplier par q^3 . Ainsi, on a l'égalité :

$$\begin{array}{l|l} v_7 = v_4 \times q^3 & q^3 = \frac{3}{2 \times (3 \times 32)} \\ \frac{3}{2} = 96 \times q^3 & q^3 = \frac{1}{64} \\ q^3 = \frac{3}{96} & q^3 = \frac{1}{4^3} \\ q^3 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{96} & q^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \end{array}$$

Ainsi, on en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

D'après la propriété des suites géométriques, on a l'expression de v_4 en fonction de v_0 et de q :

$$\begin{array}{l|l} v_4 = v_1 \times q^{4-1} & v_1 = 96 \times 64 \\ 96 = v_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 & v_1 = 6\,144 \\ 96 = v_1 \times \frac{1}{64} & \end{array}$$

Ainsi, la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 6 144 et de raison $\frac{1}{4}$.

C.44

a On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie par $\frac{1}{2}$. Cela permet de conjecturer que cette suite est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b Notons (u_n) cette suite de nombre. On a :

$$u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 9 \quad ; \quad u_3 = 18$$

Or, on a les relations suivantes :

$$u_2 = 3 \times u_1 \quad ; \quad u_3 = 2 \times u_2$$

On en déduit qu'il n'existe pas un seul facteur permettant de passer d'un terme au suivant : la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

C.45

1 Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_0 = 24$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot u_0 = \frac{1}{2} \times 24 = 12$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_1 = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot u_2 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

2 La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 24 et de raison $\frac{1}{2}$. Les termes de la suite s'expriment en fonction de leur rang par :

$$u_n = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3 Les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) obtenues à la question **1** permettent de conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

C.46

La correction n'existe pas.

C.47 Tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positifs.

Pour étudier la monotonie de la suite, étudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} = \frac{3^{n+1}}{4} \times \frac{4}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$$

Le quotient étant strictement supérieur à 1 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

C.48

1 Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \cdot u_n}{u_n} = 4 > 1$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

2 Les termes de suite (v_n) sont strictement positifs et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 0,2^{n+1}}{3 \times 0,2^n} = 0,2^{(n+1)-n} = 0,2^1 = 0,2 < 1$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

C.49

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$u_0 < 0$	croissante	constante	décroissante
$u_0 = 0$	constant	constant	constant
$u_0 > 0$	décroissante	constant	croissante

C.50 La somme S des 100 premiers termes de la suite (u_n) a pour valeur :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = u_0 \cdot \frac{1 - q^{100}}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 2^{100}}{1 - 2}$$

$$= 2 \times \frac{1 - 2^{100}}{-1} = 2 \cdot (2^{100} - 1)$$

C.51 La somme S des 100 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 12 et de raison 4 a pour valeur :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = u_0 \cdot \frac{1 - q^{99-0+1}}{1 - q} = 12 \cdot \frac{1 - 4^{100}}{1 - 4}$$

$$= 12 \cdot \frac{1 - 4^{100}}{-3} = -4 \cdot (1 - 4^{100}) = 4 \cdot (4^{100} - 1)$$

C.52 Pour tout entier naturel n , on a la relation :

$$v_n = \frac{5}{2^n} = 5 \times \frac{1}{2^n} = 5 \times \frac{1^n}{2^n} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On reconnaît l'expression des termes de la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.

Ainsi, la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) a pour valeur :

$$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{19} = u_0 \cdot \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{2}} = 5 \times 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right] = 10 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$$

C.53

① La suite (v_n) étant une suite géométrique de premier terme 12 et de raison $\frac{1}{4}$, son terme de rang n admet pour expression :

$$v_n = 12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

② En notant n le rang du terme de la suite (v_n) valant $\frac{3}{64}$, on obtient l'égalité :

$$\begin{array}{l|l} v_n = 12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{3}{64} = 12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{3}{64} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{64} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^n & \end{array}$$

On en déduit que 4 est le rang du terme valant $\frac{3}{64}$

③ La suite (v_n) géométrique étant de raison différente de 1,

la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique donne :

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{30}$$

$$= v_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{31}}{1 - \frac{1}{4}} = 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{31}}{\frac{3}{4}}$$

$$= 12 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{31}\right] \cdot \frac{4}{3} = 16 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{31}\right]$$

C.54

① Les premiers termes de la somme S permettent de reconnaître les termes successifs de la suite (w_n) géométrique de premier terme 27 et de raison $\frac{1}{3}$.

② La formule explicite d'une suite géométrique permet d'obtenir l'expression des termes w_n en fonction du rang n :

$$w_n = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Déterminons le rang n du terme ayant pour valeur :

$$\begin{array}{l|l} w_n = \frac{1}{81} & \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^7} \\ 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81} & \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1^7}{3^7} \\ 3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^4} & \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{3^4} & \end{array}$$

On en déduit : $n = 7$

③ Ainsi, la somme S s'exprime par :

$$S = w_0 + w_1 + \dots + w_7 = w_0 \cdot \frac{1 - q^8}{1 - q} = 27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{\frac{2}{3}} = 27 \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8\right] = \frac{81}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8\right]$$

C.55

① La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\sqrt{2}$.

② Le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = 1 \times (\sqrt{2})^n$$

Soit n le rang du terme valant $8\sqrt{2}$ vérifie :

$$\begin{array}{l} u_n = 8\sqrt{2} \\ (\sqrt{2})^n = 2^3 \times \sqrt{2} \\ (\sqrt{2})^n = [(\sqrt{2})^2]^3 \times \sqrt{2} \\ (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^6 \times \sqrt{2} \\ (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^7 \end{array}$$

Par identification, on en déduit que : $n = 7$

Ainsi, la somme S comprend 8 termes.

③ La formule de la somme des termes d'une suite géométrique permet d'exprimer :

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots + 8\sqrt{2} = u_0 + u_1 + \dots + u_7 \\
 &= u_0 \cdot \frac{1 - q^8}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^8}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - [(\sqrt{2})^2]^4}{1 - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1 - 2^4}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 16}{1 - \sqrt{2}} = \frac{-15}{1 - \sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2} - 1}
 \end{aligned}$$

Indication supplémentaire : on peut simplifier le résultat ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{15}{\sqrt{2} - 1} &= \frac{15(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{15 \cdot \sqrt{2} + 15}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} \\
 &= \frac{15 \cdot \sqrt{2} + 15}{2 - 1} = 15 \cdot \sqrt{2} + 15
 \end{aligned}$$

C.56

① Le premier terme de la suite (u_n) est 4 et sa raison vaut $\frac{1}{2}$.

② La suite géométrique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{2}$ a son terme de rang k a pour expression :

$$u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Le terme ayant pour valeur $\frac{1}{2^n}$ vérifie :

$$u_k = \frac{1}{2^n} \quad \text{Par identification, on en déduit que}$$

$$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$2^k = 2^{n+2}$$

le dernier terme de la somme S_n est le terme de rang $n+2$.

Ainsi, la somme S_n comprend les $n+3$ premiers termes de la suite (u_n) .

③ a La formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique permet d'obtenir l'expression de S_n :

$$S_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+3}}{1 - q} = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+3}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 4 \times \left(1 - \frac{1}{2^{n+3}}\right) \times \frac{2}{1} = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+3}}\right)$$

b Pour tout entier naturel n , on a :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 1$$

$$8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 8$$

$$S_n < 8$$

Pour toute valeur de n , la somme S_n est majorée par 8.

C.57

① S est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite

géométrique de premier terme 1 et de raison x .

Le nombre x étant différent de 1, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n = 1 \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\
 &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}
 \end{aligned}$$

② D'après la question précédente, on a l'égalité :

$$S = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$(1 + x + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$$

On a obtenu la factorisation de $1 - x^{n+1}$ par $1 - x$.

C.58

① Une réduction de 3 % est associé à un coefficient multiplicateur de valeur :

$$1 - \frac{3}{100} = 1 - 0,03 = 0,97$$

• Ainsi, la population en 2013 sera :

$$45,5 \times 0,97 = 44,135 \text{ millions d'habitants}$$

• Ainsi, la population en 2014 sera :

$$44,135 \times 0,97 = 42,81905$$

$$\approx 42,819 \text{ millions d'habitants}$$

② a Ainsi, pour passer d'un terme à son successeur, on multiplie toujours par 0,97 : on en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme 45,5 et de raison 0,97.

b Ainsi, les termes de la suite (u_n) admettent pour formule explicite :

$$u_n = 45,5 \times 0,97^n$$

③ La population de ce pays en 2020 est le terme de rang 8. Ainsi, on a :

$$u_8 = u_0 \cdot q^8 = 45,5 \times 0,97^8$$

$$\approx 35,6603 \approx 35,660 \text{ millions d'habitants}$$

C.59

① Une évolution de +6 % a un coefficient multiplicateur associé de :

$$1 + \frac{6}{100} = 1 + 0,06 = 1,06.$$

Les valeurs d'une grandeur subissant des évolutions successives à taux constant définissent une suite géométrique : (u_n) est la suite géométrique de premier terme 500 et de raison 1,06.

Les premiers termes de la suite ont pour valeur :

$$u_1 = 1,06 \times u_0 = 1,06 \times 500 = 530$$

$$u_2 = 1,06 \times u_1 = 561,8 \approx 562$$

② La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme 500 et de raison 1,06, elle admet la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = 1,06 \cdot u_n.$$

Elle admet pour formule explicite :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 500 \times 1,06^n$$

③ Le terme u_6 de rang 6 s'exprime par :

$$u_6 = 500 \times 1,06^6 \\ \approx 709,25 \approx 709$$

C.60

- 1 D'après l'expression définissant les termes de la suite (u_n) , on a :
- $$u_3 = 2000 \times 1,008^{3-1} = 2000 \times 1,008^2 = 2032,128 \approx 2032,13$$

Ainsi, le forage des 30 premiers mètres a coûté :

$$2000 + 2016 + 2032,13 = 6029,13$$

- 2 a L'expression des termes de la suite (u_n) permet de reconnaître les termes de la suite géométrique de premier terme 2000 et de raison 1,008.
- Ainsi, les termes de la suite (u_n) vérifient la relation de récurrence :
- $$u_{n+1} = 1,008 \times u_n$$

- b Le coefficient multiplicateur 1,008 est associé à une augmentation de 0,8 % car :
- $$1 + \frac{0,8}{100} = 1 + 0,008 = 1,008$$