Première Spécialité - Chapitre 8

E.1

Définition : On appelle **suite arithmétique** toute suite de nombres dont le successeur d'un terme est obtenu en additionnant à celui toujours le même nombre.
Ce nombre s'appelle la **raison** de cette suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) arithmétique, où $n\in\mathbb{N}$, de premier terme $u_0=5$ et de raison 3. Recopier et compléter la ligne ci-dessous pour obtenir les cinq premiers termes de cette suite :

$u_0 = \ldots \quad ; \quad u_1 = \ldots \quad ; \quad u_2 = \ldots \quad ; \quad \ldots$

E.2 Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

E.3 On considère la suite (u_n) arithmétique, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, de premier terme 2 et de raison -3.
Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.4

1. a. Dans un langage de programmation, saisir l'algorithme suivant :

```
a ← 2
Pour i allant de 0 à 4
   a ←  a+3
Fin Pour
```

b. En effectuant une exécution pas à pas, noter les valeurs successives prises par la variable `a` :
$\ldots \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \ldots$

2. a. Modifier l'algorithme pour que les valeurs successives prises par la variable `a` soit :
2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22

b. Modifier l'algorithme pour que les valeurs successives prises par la variable `a` soit :
5 ; 10 ; 15

E.5 On considère la suite (u_n), définie pour $n\in\mathbb{N}^*$, arithmétique de premier terme 3 et de raison 5.
Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

E.6 On considère la suite (v_n) arithmétique définie par :
$v_0 = 6 \quad ; \quad v_{n+1} = v_n - 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Déterminer la valeur des 6 premiers termes de la suite (v_n).

E.7 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont :
$u_0=3 \quad ; \quad u_1=7 \quad ; \quad u_2=11 \quad ; \quad u_3=15$

Parmi les quatre propositions, citer les deux relations vérifiées par les quatre premiers termes de la suite (u_n). Lesquelles ?

a. $u_{n+1} = u_n + 4$ b. $u_{n+1} = 4{\cdot}u_n$

c. $u_n = 3 + 3{\cdot}n$ d. $u_n = 3 + 4{\cdot}n$

E.8 On considère la suite (u_n), définie pour $n\in\mathbb{N}$, arithmétique et dont les premiers termes ont pour valeur :

n	0	1	2	3	4
u_n	3	7	11	15	19

1. Donner les éléments caractéristiques de cette suite.
2. Parmi les relations ci-dessous, lesquelles sont vérifiées par la suite (u_n) :

a. $u_{n+1} = u_n + 4$ b. $u_{n+1} = u_n + 3$

c. $u_n = 4{\cdot}n + 3$ d. $u_n = 3{\cdot}n + 4$

E.9

Proposition : soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$u_n = u_0 + r\cdot n$

Cette relation s'appelle la **formule explicite** des termes d'une suite arithmétique.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 2$

1. Quelle est la nature de cette suite?
2. Donner la formule explicite donnant la valeur de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de u_{20}.

E.10 On considère la suite (u_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, arithmétique de premier terme 3 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

1. Donner la formule explicite des termes de la suite (u_n) en fonction de n.
2. Déterminer l'expression du terme de rang 112 de la suite (u_n).

E.11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, dont on connait les deux termes : $u_4 = 12 \quad ; \quad u_{22} = -24$
Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

E.12 On considère la suite (u_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, arithmétique dont on connait les valeurs des deux termes suivants :
$u_{10} = 5 \quad ; \quad u_{16} = 14$

Déterminer le premier terme u_0 et la raison de cette suite.

E.13 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique telle que :

$w_6 = 7$; $w_8 = 1$

Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

E.14 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique qui vérifie :

$w_{15} = 54$; $w_{99} = 180$

Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

E.15 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique telle que :

$v_7 = 13 \quad ; \quad v_{15} = 39$

Déterminer la valeur du premier terme et de la raison de la suite.

E.16 On considère la suite (u_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, dont les premiers termes sont :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_1 = 5 \quad ; \quad u_2 = 9 \quad ; \quad u_3 = 12$

Justifier que la suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

E.17 On considère la suite (u_n) arithmétique, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, de premier terme de 2 et de raison 3 :

1. Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, simplifier l'expression $u_{n+1}-u_n$
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Proposition : soit (u_n) une suite arithmétique :

- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, sa raison est strictement négative ;
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, sa raison est strictement positive ;
- (u_n) est constante si, et seulement si, sa raison est nulle ;

E.18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Justifier que la suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.19 Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$u_n = -32n + 102 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Montrer que cette suite est décroissante.

E.20

Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n *(*$n\in\mathbb{N}$*)* et dont le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = 4 - n$
Justifier que la suite $\left(v_n\right)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.21

Soit $\left(u_n\right)$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Relier les assertions correspondantes :

	• $u_0>0$ et $r>0$
$\left(u_n\right)$ est croissante •	
	• $u_0>0$ et $r<0$
	• $u_0<0$ et $r>0$
$\left(u_n\right)$ est décroissante •	
	• $u_0<0$ et $r<0$

2. À quelle*(s)* condition*(s)* une suite arithmétique est constante?

E.22

Définition :

Soit $\left(u_n\right)$ une suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- la suite $\left(u_n\right)$ est dite **strictement croissante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\quad u_{n+1} > u_n$
- la suite $\left(u_n\right)$ est dite **strictement décroissante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\quad u_{n+1} < u_n$
- la suite $\left(u_n\right)$ est dite **constante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\quad u_{n+1} = u_n$

On considère la suite arithmétique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite $\left(u_n\right)$?

E.23 Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

1. $\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
2. $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
3. $\left(w_n\right)$ est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

E.24 On considère la suite $\left(u_n\right)$ arithmétique de premier terme 3 et de raison 5. Déterminer la somme de ses 33 premiers termes.

E.25 On considère la suite $\left(u_n\right)$, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, arithmétique de premier terme -10 et de raison 3.

Déterminer la valeur de la somme S définie par :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{84}$

E.26 On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie pour tout entier n naturel par : $\quad v_n = 4 + 3{\cdot}n$
Déterminer la somme S' des 20 premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$.

E.27 On considère la somme S définie par :
$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 101$

On admet que les termes de la somme S sont les premiers termes successifs d'une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

1. a. Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Déterminer le rang du terme de la suite ayant 101 pour valeur.
2. En déduire la valeur de la somme S.

E.28 On considère la somme S définie par :

$$S = \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \cdots + 10$$

On admet que les termes de la somme S sont les premiers termes successifs d'une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

1. Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) et déterminer le rang du terme ayant pour valeur 10.
2. En déduire la valeur de la somme S

E.29 On considère la somme S définie par :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \cdots + \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

On admet que les termes de la somme S sont les premiers termes successifs d'une suite (u_n) arithmétique définie sur $\mathbb{N}$.

1. a. Donner les éléments caractéristiques de (u_n).
   b. Déterminer le rang du terme de la suite ayant $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ pour valeur.
2. En déduire la valeur de la somme S.

E.30 La somme S, définie ci-dessous, est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = 7 + 10 + 13 + \cdots + 340$$

En laissant les traces de votre démarche, déterminer la valeur de la somme S.

E.31 Un constructeur automobile décide de réduire sa production de voiture thermique. Actuellement, sa production est de 80 000 voitures par mois et il décide de la réduire de 3 000 voitures chaque mois. On décide de noter u_0 la production actuelle de voiture thermique de cette entreprise et on note u_n sa production au bout de n mois *(où $n \in \mathbb{N}$)*.

1. Préciser la nature de la suite (u_n) ainsi que ces éléments caractéristiques.
2. Donner une formule de récurrence et la formule explicite de la suite (u_n).
3. Combien faut-il attendre de mois pour que sa production de voitures thermiques passe sous le nombre de 10 000 unités produites par mois?

Indication : toute trace de recherche, même incomplète sera prise en compte dans cette question.

E.32

Définition : on appelle **suite géométrique** toute suite de nombres dont le successeur d'un terme est obtenu en multipliant celui-ci par le même nombre.
Ce nombre s'appelle la **raison** de la suite géométrique.

On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, géométrique de premier terme 2 et de raison 3.
Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

E.33 On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_0 = 64$; $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Quelle est la nature de cette suite?
2. Donner, sans justification, la valeur de v_6.

E.34 On considère la suite (v_n) géométrique définie par :

$$v_0 = -2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les valeurs des 6 premiers termes de la suite (v_n).

E.35 La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

E.36 On considère la suite (v_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, géométrique de premier terme 54 et de raison $\dfrac{1}{3}$. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

E.37

Proposition : soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$u_n = u_0\times q^n$

Cette relation s'appelle la **formule explicite** des termes d'une suite géométrique.

Soit (u_n) une suite géométrique, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ de raison 2 et de premier terme 5

Déterminer la valeur de u_8.

E.38 On considère la suite (u_n) géométrique, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, de premier terme $\dfrac{2^4}{3}$ et de raison $\dfrac{3}{2}$.

Déterminer la valeur des termes u_{11} et u_{28}.

E.39 On considère la suite (u_n) géométrique, définie pour tout entier naturel n, de premier terme 4 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

Déterminer, sous forme simplifiée, la valeur du terme u_4.

E.40 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{3}{4}$.

Déterminer la valeur du terme de rang 6.

E.41 Soit (v_n) une suite géométrique, définie pour $n\in\mathbb{N}$, de raison $\dfrac{1}{2}$ et telle que $v_7=3^2\times2^3$. Déterminer la valeur de v_{20}.

E.42 On considère (w_n) une suite géométrique définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ et telle que :

$w_0 = 5$; $w_3 = 40$

Déterminer la raison de la suite (u_n).

E.43 On considère la suite (v_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, géométrique dont on connait les valeurs des deux termes suivants :

$v_4 = 96 \quad ; \quad v_7 = \dfrac{3}{2}$

Déterminer le premier terme v_1 et la raison de cette suite.

E.44 On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a) $8 \;;\; 4 \;;\; 2 \;;\; 1 \;;\; \dfrac{1}{2} \;;\; \dfrac{1}{4}$

b) $1 \;;\; 3 \;;\; 9 \;;\; 18 \;;\; 54 \;;\; 162$

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

E.45 On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1) Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2) Donner l'expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de son rang n.

3) Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n)?

E.46

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ géométrique de premier terme 3 et de raison 0,1.

1) Exprimer en fonction de n le terme de la suite (u_n) de rang n.

(2) Simplifier et factoriser l'expression $u_{n+1}-u_n$.

(3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

Proposition : soit (u_n) géométrique de raison q.

- Si $u_0>0$ et $q>1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q=1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $u_0>0$ et $0<q<1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

E.47 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

E.48

(1) Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme 2 et de raison 4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

(2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ et dont le terme de rang n admet l'expression :

$$v_n = 3\times 0{,}2^n$$

Justifier que la suite (v_n) est décroissante.

E.49 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Indiquer, si possible, dans le tableau ci-dessous le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de la valeur de ses éléments caractéristiques :

	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$u_0<0$			
$u_0=0$			
$u_0>0$			

E.50

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On note S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n). On a :

$$S = u_0+u_1+\cdots+u_n = u_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 2. Déterminer la somme S des 100 premiers termes de la suite (u_n).

E.51

On considère la suite géométrique de premier terme 12 et de raison 4. Déterminer la somme des 100 premiers termes de cette suite.

Indication : on donnera l'expression simplifiée de cette somme.

E.52 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n naturel par : $v_n = \dfrac{5}{2^n}$

Déterminer la somme S' des 20 premiers termes de la suite (v_n).

E.53 On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 12 et de raison $\dfrac{1}{4}$.

(1) Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

(2) Quel est le rang du terme de la suite (v_n) ayant pour valeur $\dfrac{3}{64}$?

3 Déterminer une expression simplifiée de la somme S définie par :
$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{30}$

E.54 On considère la somme S définie par :
$S = 27 + 9 + 3 + \cdots + \dfrac{1}{81}$

On admet que les termes de cette somme sont les termes consécutifs d'une suite (u_n) géométrique.

1 Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

2 Déterminer le rang du terme de la suite (u_n) dont la valeur est $\dfrac{1}{81}$, puis donner le nombre de termes de la somme S.

3 Déterminer la valeur de S.

E.55 On considère que la somme S ci-dessous :
$S = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2}$
On admet que les termes de cette somme sont les termes consécutifs d'une suite (u_n) géométrique.

1 Donner les caractéristiques de la suite géométrique (u_n).

2 Déterminer le rang du terme de la suite (u_n) dont la valeur est $8\sqrt{2}$. Donner le nombre de termes de la somme S.

3 En déduire la valeur de S.

E.56 On considère la somme numérique suivante :

$S_n = 4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ où $n \in \mathbb{N}$

On admet que les termes de cette somme sont les premiers termes d'une suite (u_n) géométrique.

1 Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

2 Déterminer le rang du terme de la suite (u_n) valant $\dfrac{1}{2^n}$. Donner le nombre de termes de la somme S_n.

3 a Déterminer la valeur de S_n en fonction de n.

b Justifier que, quelle que soit la valeur de n, la somme S_n est majorée par 8.

E.57 Soit x un nombre réel différent de 1.

1 Exprimer la somme suivante en fonction de x :
$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

2 En déduire une factorisation du polynôme $1 - x^{n+1}$.

E.58 En 2012, la population d'un pays est estimé à 45,5 millions d'habitants. On considère que cette population décroit de 3 % chaque année.
On note u_n la population de ce pays à l'année $2012+n$. On vient ainsi de créer une suite (u_n) défini sur $\mathbb{N}$.

1 Déterminer la population de ce pays en 2013 et 2014 arrondie au millier près.

2 a Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette suite.

b Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

3 Déterminer la population de ce pays en 2020 arrondie au millier d'habitants près.

E.59 Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.
Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0 = 500$.

1 Calculer u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.

2 Exprimer u_n en fonction de n.

3 Déterminer la valeur du terme de rang 6 arrondie à l'unité.

E.60 Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds.

Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$u_n = 2000\times 1{,}008^{n-1}$

où u_n représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.

On a ainsi $u_1=2000$ et $u_2=2016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.

Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.

2. Pour tout entier naturel n non nul :

   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite $\left(u_n\right)$.

   b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.