C.1

(a)
- $u_0 = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$
- $u_1 = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3}$
- $u_2 = \dfrac{2+1}{2+2} = \dfrac{3}{4}$
- $u_3 = \dfrac{3+1}{3+2} = \dfrac{4}{5}$

(b)
- $u_0 = \sqrt{0^2+0+1} = \sqrt{1}$
- $u_1 = \sqrt{1^2+1+1} = \sqrt{3}$
- $u_2 = \sqrt{2^2+2+1} = \sqrt{7}$
- $u_3 = \sqrt{3^2+3+1} = \sqrt{13}$

(c)
- $u_0 = \dfrac{0-2}{0+1} = -\dfrac{2}{1} = -2$
- $u_1 = \dfrac{1-2}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$
- $u_2 = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$
- $u_3 = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

C.2

(a) (a) Les cinq premiers termes de la suite (u_n) ont pour valeur :
- $u_0 = \dfrac{3\times0^2+0+2}{0+2} = \dfrac{0+0+2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
- $u_1 = \dfrac{3\times1^2+1+2}{1+2} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{3+1+2}{3} = 2$
- $u_2 = \dfrac{3\times2^2+2+2}{2+2} = \dfrac{12+2+2}{4} = \dfrac{16}{4} = 4$
- $u_3 = \dfrac{3\times3^2+3+2}{3+2} = \dfrac{27+3+2}{3+2} = \dfrac{32}{5}$
- $u_4 = \dfrac{3\times4^2+4+2}{4+2} = \dfrac{48+4+2}{6} = \dfrac{54}{6} = 9$

(b) Voici les cinq premiers termes de la suite (v_n) :
- $v_0 = 1$
- $v_1 = \dfrac{-4\times1}{3\times0-4} = \dfrac{-4}{0-4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$
- $v_2 = \dfrac{-4\times1}{3\times1-4} = \dfrac{-4}{-1} = 4$
- $v_3 = \dfrac{-4\times4}{3\times2-4} = \dfrac{-16}{2} = -8$
- $v_4 = \dfrac{-4\times(-8)}{3\times3-4} = \dfrac{32}{5}$

(b) On a les quatre premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = \dfrac{2\times0^2+0+5}{0+1} = \dfrac{5}{1} = 5$
- $u_1 = \dfrac{2\times1^2+1+5}{1+1} = \dfrac{8}{2} = 4$
- $u_2 = \dfrac{2\times2^2+2+5}{2+1} = \dfrac{15}{3} = 5$
- $u_3 = \dfrac{2\times3^2+3+5}{3+1} = \dfrac{26}{4} = \dfrac{13}{2}$

C.3

(1) Les cinq premiers termes de cette suite ont pour valeurs :
- $u_0 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)^0\big]+3 = -\dfrac{7}{4}\cdot(1-1)+3$
  $= -\dfrac{7}{4}\times0+3 = 3$
- $u_1 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)^1\big]+3 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)\big]+3$
  $= -\dfrac{7}{4}\times2+3 = -\dfrac{1}{2}$
- $u_2 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)^2\big]+3 = -\dfrac{7}{4}\cdot(1-1)+3$
  $= -\dfrac{7}{4}\times0+3 = 3$
- $u_3 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)^3\big]+3 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)\big]+3$
  $= -\dfrac{7}{4}\times2+3 = -\dfrac{1}{2}$
- $u_4 = -\dfrac{7}{4}\cdot\big[1-(-1)^4\big]+3 = -\dfrac{7}{4}\cdot(1-1)+3$
  $= -\dfrac{7}{4}\times0+3 = 3$

(2) On remarque que les termes de la suite prennent des valeurs alternées ; on peut également dire que les termes de la suite sont cycliques de période 2.

C.4 Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4
u_n	5	9	17	33	65

C.5

(1) Les cinq premiers termes de la suite ont pour valeur :
- $v_0 = 3$
- $v_1 = \dfrac{1-v_0}{1+v_0} = \dfrac{1-3}{1+3} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- $v_2 = \dfrac{1-v_1}{1+v_1} = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$
  $= \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1} = 3$
- $v_3 = \dfrac{1-v_2}{1+v_2} = \dfrac{1-3}{1+3} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- $v_4 = \dfrac{1-v_3}{1+v_3} = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$
  $= \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1} = 3$

(2) Les termes de la suite ne prennent que deux valeurs successivement ; comme il a été dit dans la question (1), la suite est périodique de période 2.

C.6

(a)
- $u_0 = 3$
- $u_1 = 2\cdot u_0 - 2 = 2\times3-2 = 6-2 = 4$

- $u_2 = 2{\cdot}u_1 - 2 = 2\times4 - 2 = 8 - 2 = 6$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 - 2 = 2\times6 - 2 = 12 - 2 = 10$

b
- $u_0 = 1$
- $u_1 = 2{\cdot}u_0 - 2 = 2\times1 - 2 = 0$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 - 2 = 2\times0 - 2 = -2$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 - 2 = 2\times(-2) - 2 = -6$

c
- $u_0 = 2$
- $u_1 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$
- $u_2 = \dfrac{u_1 - 2}{u_1 + 1} = \dfrac{0-2}{0+1} = -2$
- $u_3 = \dfrac{u_2 - 2}{u_2 + 1} = \dfrac{-2-2}{-2+1} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

C.7 On a les premiers termes :
- $u_0 = 2$
- $u_1 = 3$
- $u_2 = u_1 + 2{\cdot}u_0 = 3 + 2\times2 = 7$
- $u_3 = u_2 + 2{\cdot}u_1 = 7 + 2\times3 = 7 + 6 = 13$

C.8 Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 3$
- $u_1 = 1$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 + u_0 = 2\times1 + 3 = 5$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 + u_1 = 2\times5 + 1 = 11$
- $u_4 = 2{\cdot}u_3 + u_2 = 2\times11 + 5 = 27$

C.9 On a :
- $u_0 = -1$
- $u_1 = u_0 + 0 - 2 = -1 + 0 - 2 = -3$
- $u_2 = u_1 + 1 - 2 = -3 + 1 - 2 = -4$
- $u_3 = u_2 + 2 - 2 = -4 + 2 - 2 = -4$

C.10 Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 2$
- $u_1 = 3{\cdot}u_0 - 2\times0 + 1 = 3\times2 - 0 + 1 = 6 + 1 = 7$
- $u_2 = 3{\cdot}u_1 - 2\times1 + 1 = 3\times7 - 2 + 1 = 21 - 2 + 1 = 20$
- $u_3 = 3{\cdot}u_2 - 2\times2 + 1 = 3\times20 - 4 + 1 = 60 - 4 + 1 = 57$

C.11 D'après les figures de l'énoncé, on a les valeurs suivantes : $u_1 = 3$; $u_2 = 9$; $u_3 = 18$

1 a **faux :**
Car, en utilisant la formule proposée :
$u_2 = 3{\cdot}u_1 + 3 = 3\times3 + 3 = 9 + 3 = 12 \neq 9$

c **faux :**
Car, en utilisant la formule proposée :
- $u_2 = u_1 + 6\times1 = 3 + 6 = 9$
- $u_3 = u_2 + 6\times2 = 9 + 12 = 21 \neq 18$

d **faux :**
Car, en utilisant la formule proposée :
- $u_2 = u_1 - 3\times1 + 9 = 3 - 3 + 9 = 9$
- $u_3 = u_2 - 3\times2 + 9 = 9 - 6 + 9 = 12 \neq 18$

Ainsi, la réponse correcte est la réponse b.

2 b
- $u_1 = 1^2 + 2\times1 = 1 + 2 = 3$
- $u_2 = 2^2 + 2\times2 = 4 + 4 = 8 \neq 9$

c $u_1 = \dfrac{3}{2}\times1^2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} - 1 = 0 \neq 3$

d
- $u_1 = 1^2 + \dfrac{3}{2}\times1 + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 3$
- $u_2 = 2^2 + \dfrac{3}{2}\times2 + \dfrac{1}{2} = 4 + 3 + \dfrac{1}{2} = 7 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{2} \neq 9$

Ainsi, la réponse correcte est a.

3 En utilisant l'expression explicite de la suite (u_n) trouvée à la question 2, on obtient :
$u_6 = \dfrac{3}{2}\times6^2 + \dfrac{3}{2}\times6 = \dfrac{3}{2}\times36 + 9 = 54 + 9 = 63$
Il est donc nécessaire d'avoir 63 allumettes pour construire la 6^e étape de la construction.

C.12

1
- Pour la suite (u_n) définie par : $u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1$

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	7	16	29

- Pour la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{4-n}{1+n}$

n	0	1	2	3	4
v_n	4	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	0

2
- On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
- On peut conjecturer que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

C.13

1 a Déterminons les quatre premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 2$
- $u_1 = \dfrac{1}{2}{\cdot}u_0 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times2 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = \dfrac{1}{2}{\cdot}u_1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$
- $u_3 = \dfrac{1}{2}{\cdot}u_2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{16}$

b On remarque les comparaisons :
$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$
On conjecture que la suite (u_n) est une suite décroissante.

2 a Déterminons les quatre premiers termes de la suite (v_n) :
- $v_0 = -1$
- $v_1 = \dfrac{1}{2}{\cdot}v_0 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times(-1) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$
- $v_2 = \dfrac{1}{2}{\cdot}v_1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{5}{8}$
- $v_3 = \dfrac{1}{2}{\cdot}v_2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{5}{8}\right) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{5}{16} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{9}{16}$

On remarque les comparaisons :
$v_0 < v_1 < v_2 < v_3$

b De la comparaison précédente, on conjecture que la suite (v_n) est une suite croissante.

C.14

1. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	-5	-9	-11	-11	-9	-5	1	9	19	31

2. La fonction f dont l'image de x est définie par la relation :
$f(x) = x^2 - 7{\cdot}x + 1$
est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est positif. Ainsi, la parabole représentative de la fonction f admet un minimum dont l'abscisse a pour valeur :
$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-7}{2\times1} = \dfrac{7}{2}$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f est croissante sur $\Big[\dfrac{7}{2}\,;+\infty\Big[$.
On en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est croissante à partir du rang 4.

C.15

1. Le dénominateur d'un quotient ne devant jamais être nul, La fonction g a pour ensemble de définition :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\Big\{-\dfrac{5}{2}\Big\}$.

2. La fonction g est définie par le quotient des deux fonctions u et v où :
$u(x) = 2{\cdot}x^2 + 1 \quad ; \quad v(x) = 2{\cdot}x + 5$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 4{\cdot}x \quad ; \quad v'(x) = 2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{4x{\cdot}(2x{+}5) - (2{\cdot}x^2+1)\times2}{\big(2{\cdot}x{+}5\big)^2}$$
$$= \frac{8{\cdot}x^2 + 20{\cdot}x - (4{\cdot}x^2+2)}{\big(2{\cdot}x+5\big)^2} = \frac{8{\cdot}x^2 + 20{\cdot}x - 4{\cdot}x^2 - 2}{\big(2{\cdot}x+5\big)^2}$$
$$= \frac{4{\cdot}x^2 + 20{\cdot}x - 2}{\big(2{\cdot}x+5\big)^2}$$

3. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, le signe de la dérivée f' ne dépend que du signe du numérateur du quotient.
Le discriminant du polynôme $4x^2{+}20x{-}2$ a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4\times4\times(-2) = 400 + 32 = 432$

On a la simplification :
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{432} = \sqrt{144\times3} = 12\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-12\sqrt{3}}{2\times4} = \frac{4{\cdot}\big(-5-3\sqrt{3}\big)}{2\times4} = \frac{-5-3\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20+12\sqrt{3}}{2\times4} = \frac{4{\cdot}\big(-5+3\sqrt{3}\big)}{2\times4} = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$$

À l'aide de la calculatrice, on remarque que :
$\dfrac{-5-3\sqrt{3}}{2} < -\dfrac{5}{2} < 0 < \dfrac{-5+3\sqrt{3}}{2}$
On obtient le tableau de signes suivant de la dérivée f' :

x	$-\infty$		$\frac{-5-3\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$2x^2{+}10x{-}1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{5}{2}$		x_2		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\Big[\dfrac{-5{+}3\sqrt{3}}{2}\,;+\infty\Big[$. Or : $\dfrac{-5{+}3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}098$.
On en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est croissante à partir du rang 1.

4. D'après la question précédente, on sait déjà que la suite $\big(u_n\big)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$. C'est-à-dire qu'on a :
$u_n \leqslant u_{n+1} \quad n{\in}\mathbb{N}^*$

Déterminons les deux premiers termes de la suite :
- $u_0 = \dfrac{2\times0^2+1}{2\times0+5} = \dfrac{1}{5}$
- $u_1 = \dfrac{2\times1^2+1}{2\times1+5} = \dfrac{2+1}{2+5} = \dfrac{3}{7}$

On remarque la comparaison : $u_0 \leqslant u_1$

Ainsi, on vient d'établir que la relation $u_n{\leqslant}u_{n+1}$ est réalisée sur $\mathbb{N}$.

La suite $\big(u_n\big)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

C.16 Pour étudier les variations de la suite $\big(u_n\big)$, considérons la différence de deux termes consécutifs de cette suite :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5+(n+1)}{n+1} - \frac{5+n}{n}$$
$$= \frac{\big[5+(n{+}1)\big]{\cdot}n}{n(n+1)} - \frac{(5{+}n)(n{+}1)}{n(n+1)} = \frac{n^2+6n-\big(5{+}6n{+}n^2\big)}{n(n{+}1)}$$
$$= \frac{-5}{n(n+1)} < 0$$

La différence de deux termes consécutifs étant toujours négative, on en déduit que la suite est décroissante sur $\mathbb{N}$.

C.17 Étudions la différence $w_{n+1}{-}w_n$:

$$w_{n+1} - w_n = \left[2(n+1) - \frac{25}{n+1}\right] - \left(2n - \frac{25}{n}\right)$$
$$= 2n + 2 - \frac{25}{n+1} - 2n + \frac{25}{n} = 2 + \frac{25}{n} - \frac{25}{n+1}$$
$$= 2 + \frac{25(n+1)}{n(n+1)} - \frac{25n}{n(n+1)} = 2 + \frac{25(n+1) - 25n}{n(n+1)}$$
$$= 2 + \frac{25}{n(n+1)} \ > \ 0$$

La différence de deux termes de la suite $\left(w_n\right)$ étant positive sur $\mathbb{N}^*$, on en déduit la suite $\left(w_n\right)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

C.18

(1) On a les manipulations algébriques suivantes :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)} - \frac{1-n}{1+n}$$
$$= \frac{1-n-1}{n+2} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n}{n+2} - \frac{1-n}{1+n}$$
$$= \frac{-n(1+n)}{(n+2)(1+n)} - \frac{(1-n)(n+2)}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)} - \frac{n+2-n^2-2n}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)} - \frac{2-n^2-n}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2-2+n^2+n}{(1+n)(n+2)} = \frac{-2}{(1+n)(n+2)}$$

(2) Pour tout entier naturel n, pour le quotient exprimant la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$:

- le numérateur est strictement négatif ;
- le dénominateur du quotient est strictement positif pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On en déduit le signe du quotient :
$$\frac{-2}{(1+n)(n+2)} < 0$$
$$u_{n+1} - u_n < 0$$
$$u_{n+1} < u_n$$

Ainsi, la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

C.19

(1) Pour étudier la différence $u_{n+1}-u_n$, simplifions séparément l'expression de ses deux termes :

- $u_{n+1} = (n+1)^3 - 4(n+1)^2 + (n+1) - 3$
  $= (n+1)(n+1)^2 - 4(n^2+2n+1) + n - 2$
  $= (n+1)(n^2+2n+1) - 4(n^2+2n+1) + n - 2$
  $=(n^3+2n^2+n+n^2+2n+1)-4n^2-8n-4+n-2$
  $= n^3 - n^2 - 4n - 5$
- $u_n = n^3 - 4n^2 + n - 3$

Ainsi, on a la simplification :
$$u_{n+1} - u_n = \left(n^3 - n^2 - 4n - 5\right) - \left(n^3 - 4n^2 + n - 3\right)$$
$$= n^3 - n^2 - 4n - 5 - n^3 + 4n^2 - n + 3$$
$$= 3n^2 - 5n - 2$$

(2) Pour étudier la monotonie de la suite $\left(u_n\right)$, nous allons étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$; le discriminant du polynôme du second degré obtenu par cette différence vaut :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}b = (-5)^2 - 4{\times}3{\times}(-2)$$
$$= 25 + 24 = 49$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$.

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, il admet les racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-7}{2{\times}3} = -\dfrac{1}{3}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+7}{2{\times}3} = 2$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2-5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante à partir du rang 2.

C.20

(1) On a la simplification :
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - \left(n^3-2n^2-3n\right)$$
$$=(n+1)\left(n^2+2n+1\right)-2(n^2+2n+1)-3(n+1)-n^3+2n^2+3n$$
$$=\left(n^3+2n^2+n+n^2+2n+1\right)-2n^2-4n-2-3n-3-n^3+2n^2+3n$$
$$=n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-2n^2-4n-2-3n-3-n^3+2n^2+3n$$
$$= 3n^2 - n - 4$$

(2) Étudions le signe du polynôme du second degré obtenu à la question précédente ; calculons son discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4{\times}3{\times}(-4) = (-1)^2 - 48 = 49$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-7}{2{\times}3} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+7}{2{\times}3} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}3$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la différence de deux termes consécutifs est positive à partir du rang 2 : $\left(u_n\right)$ est croissante à partir du rang 2.

C.21 Pour connaître le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$, nous allons étudions la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+10}{2(n+1)}-\frac{n^2+10}{2n}$$
$$=\frac{n^2+2n+1+10}{2(n+1)}-\frac{n^2+10}{2n}$$
$$=\frac{n\cdot\big(n^2+2n+11\big)-\big(n^2+10\big)\big(n+1\big)}{2\cdot n\cdot(n+1)}$$
$$=\frac{n^3+2n^2+11n-\big(n^3+10n+n^2+10\big)}{2\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{n^2+n-10}{2\cdot n\cdot(n+1)}$$

L'entier n étant strictement positif, le dénominateur du quotient précédent est nécessairement positif ; ainsi, le signe du quotient ne dépend que du signe du numérateur.

Étudions le polynôme x^2+x-10 ; son discriminant a pour valeur :
$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times1\times(-10)=1+40=41$$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}\approx-3{,}7$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}\approx2{,}7$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, nous allons obtenir le tableau de signes de ce polynôme.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-10		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on obtient le tableau de signes pour la différence $u_{n+1}-u_n$:

n	0		2		3		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$				$+$	

Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante à partir du rang 3.

C.22

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2(n+1)-1}-\sqrt{2n-1}$$
$$=\sqrt{2n+2-1}-\sqrt{2n-1}$$
$$=\frac{\big(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\big)\big(\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n-1}\big)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2n+1-2n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\ >\ 0$$

2. On a les comparaisons suivantes :

$$>0$$
$$u_{n+1}-u_n>0$$

On en déduit que la suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}^*$.

C.23 Tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.

Pour étudier la monotonie de la suite, étudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}}=\frac{3^{n+1}}{4}\times\frac{4}{3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=3>1$$

Le quotient étant strictement supérieur à 1 pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

C.24 Chaque terme de cette suite est strictement positif ; étudions le quotient de deux termes consécutifs :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)+2}}{\frac{5^n}{n+2}}=\frac{5^{n+1}}{n+3}\times\frac{n+2}{5^n}=5\cdot\frac{n+2}{n+3}$$
$$=\frac{5\cdot(n+2)}{n+3}=\frac{5n+10}{n+3}=\frac{(n+3)+(4n+7)}{n+3}$$
$$=\frac{n+3}{n+3}+\frac{4n+7}{n+3}=1+\frac{4n+7}{n+3}$$

L'entier n étant un entier naturel, on en déduit que :
$$\frac{4n+7}{n+3}\geqslant0$$
$$1+\frac{4n+7}{n+3}\geqslant1$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\quad1$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

C.25 Les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Comparons le quotient de deux termes positifs :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{3\cdot(n+1)}}{\frac{2^n}{3\cdot n}}=\frac{2^{n+1}}{3\cdot(n+1)}\times\frac{3\cdot n}{2^n}=\frac{2\cdot n}{n+1}$$
$$=\frac{(n+1)+(n-1)}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}=1+\frac{n-1}{n+1}$$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$n-1\geqslant0$$
$$\frac{n-1}{n+1}\geqslant0$$
$$1+\frac{n-1}{n+1}\geqslant1$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant1$$

La suite (u_n) est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

C.26

- Pour tout entier naturel n, le terme u_n est défini et non-nul.
  On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{2(n+1)+1}}{\dfrac{3^n}{2n+1}} = \frac{3^{n+1}}{2n+2+1} \times \frac{2n+1}{3^n}$$

$$= \frac{3}{2n+3} \times \frac{2n+1}{1} = \frac{3(2n+1)}{2n+3} = \frac{6n+3}{2n+3}$$

$$= \frac{(2n+3)+4n}{2n+3} = \frac{2n+3}{2n+3} + \frac{4n}{2n+3} = 1 + \frac{4n}{2n+3}$$

- Pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{4n}{2n+3} \geqslant 0$$

$$1 + \frac{4n}{2n+3} \geqslant 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

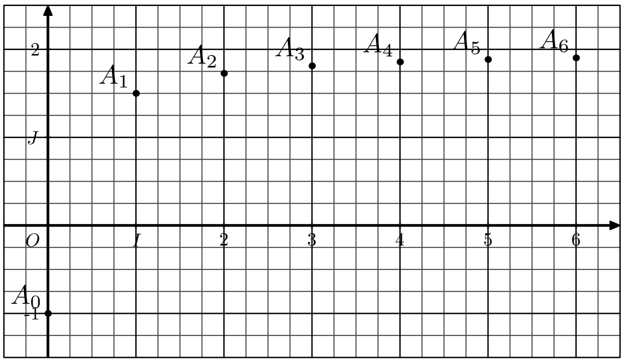
On en déduit que la suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

C.27

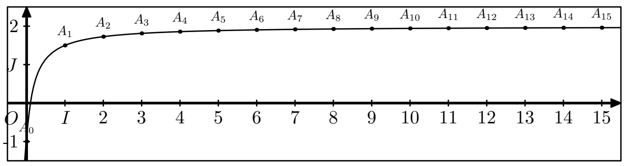
1 a Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	-1	1,5	1,72	1,81	1,86	1,88

b Voici les six points représentés dans le repère :



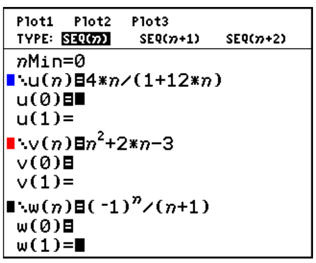
2 a Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ et les 15 premiers de la suite (A_n) dont les ordonnées représentent les premiers termes de la suite (u_n).

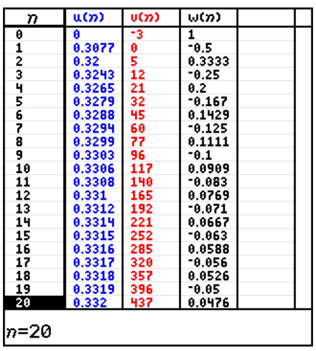


b On peut conjecturer que la suite (u_n) tend vers 2 :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 2$$

C.28 Voici la saisie de ces trois suites dans la calculatrice et le tableau de valeurs obtenu :





n	u(n)	v(n)	w(n)
0	0	-3	1
1	0.3077	0	-0.5
2	0.32	5	0.3333
3	0.3243	12	-0.25
4	0.3265	21	0.2
5	0.3279	32	-0.167
6	0.3288	45	0.1429
7	0.3294	60	-0.125
8	0.3299	77	0.1111
9	0.3303	96	-0.1
10	0.3306	117	0.0909
11	0.3308	140	-0.083
12	0.331	165	0.0769
13	0.3312	192	-0.071
14	0.3314	221	0.0667
15	0.3315	252	-0.063
16	0.3316	285	0.0588
17	0.3317	320	-0.056
18	0.3318	357	0.0526
19	0.3319	396	-0.05
20	0.332	437	0.0476

n=20

On peut émettre les conjectures suivantes :

- $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \frac{1}{3}$
- $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} w_n = 0$