Première Spécialité - Chapitre 7

E.1 Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ (b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ (c) $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$

E.2 Pour chacune des questions, déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par :

(a) $u_n = \dfrac{3\cdot n^2+n+2}{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

(b) $u_n = \dfrac{2n^2+n+5}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

E.3 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la relation :

$u_n = -\dfrac{7}{4}\cdot\left[1-(-1)^n\right]+3$

(1) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

(2) Que peut-on dire de la valeur des termes de la suite (u_n)?

E.4 On définit la suite par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$u_0=5$; $u_{n+1}=2\cdot u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

E.5 On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par :

$v_{n+1} = \dfrac{1-v_n}{1+v_n}$; $v_0 = 3$

(1) Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

(2) Que remarque-t-on?

E.6 Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 2$; $u_0 = 3$

(b) $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 2$; $u_0 = 1$

(c) $u_{n+1} = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$; $u_0 = 2$

E.7 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les relations :

$u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_{n+1} = u_n + 2\cdot u_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.8 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2\cdot u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n).

E.9 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les relations :

$u_0 = -1$; $u_{n+1} = u_n + n - 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

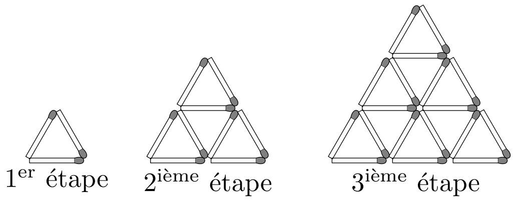
Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.10 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 2$; $u_{n+1} = 3\cdot u_n - 2\cdot n + 1$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.11 On considère la construction ci-dessous effectuée d'étapes en étapes la construction de triangles équilatéraux à l'aide d'allumettes :



Pour tout entier naturel n non-nul, on note u_n le nombre d'allumettes nécessaires à la construction de la figure à l'étape n. Ainsi, on a : $u_1 = 3$

1. Parmi les relations ci-dessous, laquelle vérifie les termes de la suite (u_n) :

   a. $u_{n+1} = 3 \cdot u_n + 3$ b. $u_{n+1} = u_n + 3 \cdot n + 3$

   c. $u_{n+1} = u_n + 6 \cdot n$ d. $u_{n+1} = u_n - 3 \cdot n + 9$

2. Parmi les relations ci-dessous, laquelle vérifie les termes de la suite (u_n) :

   a. $u_n = \frac{3}{2} \cdot n^2 + \frac{3}{2} \cdot n$ b. $u_n = n^2 + 2 \cdot n$

   c. $u_n = \frac{3}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{2} \cdot n + 1$ d. $u_n = n^2 + \frac{3}{2} \cdot n + \frac{1}{2}$

3. Donner la valeur du terme u_6.

E.12 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$:

$u_n = 2 \cdot n^2 - n + 1$; $v_n = \frac{4-n}{1+n}$.

1. Déterminer les 5 premiers termes de ces deux suites.
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et (v_n).

E.13

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n - \frac{1}{4}$

   a. Déterminer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

   b. Conjecturer la variation de la suite (u_n)

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $v_0 = -1$; $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n - \frac{1}{4}$

   a. Justifier les comparaisons : $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$

   b. Conjecturer la variation de la suite (v_n)

E.14 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule : $u_n = n^2 - 7 \cdot n + 1$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donné le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est définie par :
   $f(x) = x^2 - 7 \cdot x + 1$
   Établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

E.15 La suite (u_n) est définie par :

$u_n = \frac{2 \cdot n^2 + 1}{2 \cdot n + 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2 \cdot x^2 + 1}{2 \cdot x + 5}$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

2. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$: $f'(x) = \dfrac{4{\cdot}x^2+20{\cdot}x-2}{(2{\cdot}x+5)^2}$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
5. Peut-on dire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$?

E.16 La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{5+n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

E.17 Soit (w_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

E.18 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer une expression simplifiée de $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.19 On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_n = n^3 - 4{\cdot}n^2 + n - 3 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Établir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} - u_n = 3{\cdot}n^2 - 5{\cdot}n - 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

E.20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

1. Donner l'expression réduite de : $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante pour n supérieur à 2.

E.21 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n^2+10}{2{\cdot}n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

E.22 Soit (u_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

1. Établir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n strictement positif *($n\in\mathbb{N}^*$)* :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
2. en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

E.23 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

E.24 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{5^n}{n+2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.25 La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{2^n}{3 \cdot n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

E.26 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

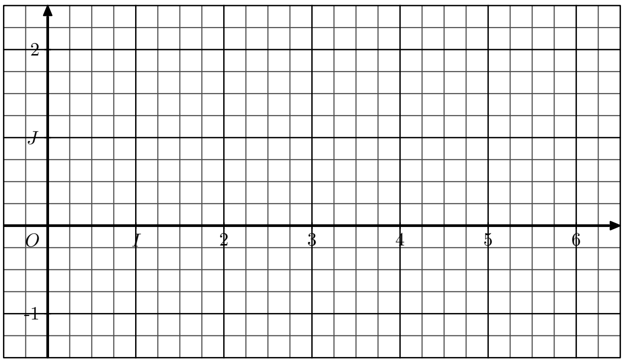
Déterminer les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.27 On considère la suite (u_n) dont les termes sont définis pour tout entier naturel n par la relation : $u_n = \dfrac{10 \cdot n - 1}{5 \cdot n + 1}$

1. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

   b. Dans le repère ci-dessous et pour n , placer la suite des points (A_n) dont les coordonnées sont définies par : $A_n(n\,;u_n)$



2. a. À l'aide de la calculatrice, observer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé de la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{10 \cdot x - 1}{5 \cdot x + 1}$

   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.28 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de chacun des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

- la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{4 \cdot n}{1 + 12 \cdot n}$
- la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $v_n = n^2 + 2 \cdot n - 3$
- la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$