Première Spécialité - Chapitre 6

C.1

a) $\mathrm{e}^3\cdot\mathrm{e}^4=\mathrm{e}^{3+4}=\mathrm{e}^7$

b) $\mathrm{e}^4\cdot\mathrm{e}^{-4}=\mathrm{e}^{4+(-4)}=\mathrm{e}^0=1$

c) $\left(\mathrm{e}^4\right)^3\cdot\mathrm{e}^4=\mathrm{e}^{3\times4}\cdot\mathrm{e}^4=\mathrm{e}^{12}\cdot\mathrm{e}^4=\mathrm{e}^{12+4}=\mathrm{e}^{16}$

d) $\dfrac{\mathrm{e}^5\cdot\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{5+(-3)}}{\mathrm{e}^{-2}}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^{2-(-2)}=\mathrm{e}^4$

e) $\mathrm{e}^5\cdot\mathrm{e}^6=\mathrm{e}^{5+6}=\mathrm{e}^{11}$

f) $\dfrac{\mathrm{e}^6\cdot\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-4}}=\dfrac{\mathrm{e}^{6+(-2)}}{\mathrm{e}^{-4}}=\dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^{-4}}=\mathrm{e}^{4-(-4)}=\mathrm{e}^8$

C.2

a) $\left(\mathrm{e}^3\right)^{-2}\cdot\mathrm{e}^5=\mathrm{e}^{-2\times3}\cdot\mathrm{e}^5=\mathrm{e}^{-6}\cdot\mathrm{e}^5=\mathrm{e}^{-6+5}=\mathrm{e}^{-1}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^6-\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^2}=\dfrac{\mathrm{e}^6-\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^3}=\dfrac{\mathrm{e}^6}{\mathrm{e}^3}-\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^3}=\mathrm{e}^3-1$

C.3

a) $\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{2x+1}=\mathrm{e}^1\cdot\mathrm{e}^{2x+1}=\mathrm{e}^{1+(2x+1)}=\mathrm{e}^{2x+2}$

b) $\mathrm{e}^{3-2x}\cdot\mathrm{e}^{x+5}=\mathrm{e}^{(3-2x)+(x+5)}=\mathrm{e}^{8-x}$

c) $\mathrm{e}^{2\cdot x-1}\cdot\mathrm{e}^{3-x}=\mathrm{e}^{(2\cdot x-1)+(3-x)}=\mathrm{e}^{x+2}$

C.4

a) $\mathrm{e}^{3x+1}\cdot\mathrm{e}^{2-2x}=\mathrm{e}^{(3x+1)+(2-2x)}=\mathrm{e}^{x+3}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{x-2}}{\mathrm{e}^{3-x}}=\mathrm{e}^{(x-2)-(3-x)}=\mathrm{e}^{x-2-3+x}=\mathrm{e}^{2x-5}$

c) $\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

$=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{2x-x}-\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^x$

C.5

a) $3\cdot\left(\mathrm{e}^{5x}\right)^4-\left(2\cdot\mathrm{e}^{10x}\right)^2$

$=3\cdot\mathrm{e}^{5x\times2}-4\cdot\mathrm{e}^{10x\times2}=3\cdot\mathrm{e}^{20x}-4\mathrm{e}^{20x}=-\mathrm{e}^{20x}$

b) $\mathrm{e}^{9x}-2\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^3=\mathrm{e}^{9x}-2\mathrm{e}^{9x}=-\mathrm{e}^{9x}$

C.6

a) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2\cdot x-1}\right)^2}{\mathrm{e}^{7\cdot x-2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2\times(2\cdot x-1)}}{\mathrm{e}^{7\cdot x-2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{4\cdot x-2}}{\mathrm{e}^{7\cdot x-2}}=\mathrm{e}^{(4\cdot x-2)-(7\cdot x-2)}$

$=\mathrm{e}^{4\cdot x-2-7\cdot x+2}=\mathrm{e}^{-3\cdot x}$

b) $3\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x}+\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2\cdot x}}=3\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2\cdot x}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\cdot x}}$

$=3\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x}+\mathrm{e}^{x-2x}+\mathrm{e}^{-2\cdot x}=4\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x}+\mathrm{e}^{-x}$

C.7

a) $\dfrac{2+3\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}}+\dfrac{3\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2x}+\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}}$

$=2\cdot\mathrm{e}^{-2x}+3\cdot\mathrm{e}^{-x}+1$

b) $\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{x-2x}$

$=\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}$

C.8

a) $\left(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^4\right)^2-\left(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^4\right)^2$

$=\left[\left(\mathrm{e}^5\right)^2-2\cdot\mathrm{e}^5\cdot\mathrm{e}^4+\left(\mathrm{e}^4\right)^2\right]-\left[\left(\mathrm{e}^5\right)^2+2\cdot\mathrm{e}^5\cdot\mathrm{e}^4+\left(\mathrm{e}^4\right)^2\right]$

$=\left(\mathrm{e}^{10}-2\cdot\mathrm{e}^9+\mathrm{e}^8\right)-\left(\mathrm{e}^{10}+2\cdot\mathrm{e}^9+\mathrm{e}^8\right)=-4\cdot\mathrm{e}^9$

b) $\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)$

$=\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^{-2}$

$=\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-4}=\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^{-4}$

C.9

a) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2-\mathrm{e}^{2x}\cdot\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2}\right)^2$

$=\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{2x}\cdot\left[\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2+2\cdot\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-2}+\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^2\right]$

$=\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{2x}\cdot\left(\mathrm{e}^{4x}+2\cdot\mathrm{e}^{2x-2}+\mathrm{e}^{-4}\right)$

$=\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{6x}-2\cdot\mathrm{e}^{4x-2}-\mathrm{e}^{2x-4}$

$=-2\cdot\mathrm{e}^{4x-2}-\mathrm{e}^{2x-4}$

b) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2+\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2-\left(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-3x}\right)^2$

$=\mathrm{e}^{2\times3x}+\mathrm{e}^{2\times(-3x)}-\left[\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2-2\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot\mathrm{e}^{-3x}+\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2\right]$

$=\mathrm{e}^{6x}+\mathrm{e}^{-6x}-\left(\mathrm{e}^{6x}-2\cdot\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^{-6x}\right)=2$

C.10

a) $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^x\cdot\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x}\right)=\mathrm{e}^x\cdot\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2\cdot\frac{x}{2}}}{x^2}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2}=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x}\right)^2$

c) $1+\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{\mathrm{e}^x\cdot\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}$

d) $\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\mathrm{e}^{3x}\cdot\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

f) $\mathrm{e}^{16x}=\mathrm{e}^{2\times8x}=\left(\mathrm{e}^{8x}\right)^2$

C.11

$\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$

$=\left[\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\right]\left[\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\right]$

$=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\dfrac{\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)-\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)}{2}$

$=\dfrac{2\cdot\mathrm{e}^x}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\dfrac{2\cdot\mathrm{e}^x\times2\cdot\mathrm{e}^{-x}}{4}$

$=\dfrac{4\cdot\mathrm{e}^{x-x}}{4}=\mathrm{e}^0=1$

C.12

a) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+2}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}\left(1+2\cdot\mathrm{e}^{-3x}\right)}{\mathrm{e}^{3x}\left(1-\mathrm{e}^{-3x}\right)}$

$=\dfrac{1+2\cdot\mathrm{e}^{-3x}}{1-\mathrm{e}^{-3x}}$

(b) $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{e^{-2x}\cdot\left(e^{3x}-e^{2x}\right)}{e^{-2x}\cdot\left(e^{3x}+e^{2x}\right)} = \dfrac{e^{x}-e^{0}}{e^{x}+e^{0}}$

$= \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = \dfrac{\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}+1\right)}$

$= \dfrac{\left(e^{x}\right)^2-1^2}{\left(e^{x}+1\right)^2} = \dfrac{e^{2x}-1}{\left(e^{x}+1\right)^2}$

C.13

(a) $e^{5x+1} = e^{2x}$

De la propriété $\left(e^{a}{=}e^{b} \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 5x+1 &= 2x \\ 5x-2x &= -1 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

(b) $e^{3x+1} = 1$

$e^{3x+1} = e^{0}$

De la propriété $\left(e^{a}{=}e^{b} \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 0 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

(c) $\dfrac{e^{1-3x}}{e} = 1$

$e^{1-3x} = e$

$e^{1-3x} = e^{1}$

De la propriété $\left(e^{a}{=}e^{b} \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 1-3x &= 1 \\ -3x &= 1-1 \\ -3x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-3} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{0\right\}$

C.14

(a) $\exp(x) = e$

$\exp(x) = \exp(1)$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle, on en déduit qu'il existe une unique solution à cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{1\right\}$

(b) $\exp(-x) = 1$

$\exp(-x) = e^{0}$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :

$\exp(-x) = \exp(0) \implies -x = 0$

On en déduit qu'il existe une unique solution à cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{0\right\}$

(c) $\exp(2x-1) = e$

$\exp(2x-1) = \exp(1)$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$\mathcal{S} = \left\{1\right\}$

(d) $e^{x} - e^{-x} = 0$

$e^{x}\left(1-\dfrac{e^{-x}}{e^{x}}\right) = 0$

$e^{x}\left(1-e^{-2\cdot x}\right) = 0$

La fonction exponentielle est non nulle sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1-e^{-2\cdot x} &= 0 \\ e^{-2\cdot x} &= 1 \\ e^{-2\cdot x} &= e^{0} \end{aligned}$$

Par la stricte croissante de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

On a : $\mathcal{S}=\left\{0\right\}$

C.15

(a) De l'équation :

$e^{x}\cdot\left(e^{2x}-e^{2}\right) = 0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$e^{x} = 0$

pas de solution

$e^{2x}-e^{2} = 0$

$e^{2x} = e^{2}$

D'après la propriété :

$\left(e^{a}{=}e^{b} \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ x &= \frac{2}{2} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{1\right\}$

(b) De l'équation :

$\left(e^{3x-1}-1\right)\left(e^{2-x}-e\right) = 0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

- $e^{3x-1}-1 = 0$

  $e^{3x-1}-e^{0} = 0$

  $e^{3x-1} = e^{0}$

  D'après la propriété : $\left(e^{a}{=}e^{b} \implies a{=}b\right)$:

  $$\begin{aligned} 3x-1 &= 0 \\ 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $e^{2-x}-e = 0$

  $e^{2-x} = e$

  $e^{2-x} = e^{1}$

  D'après la propriété : $\left(e^{a}{=}e^{b} \implies a{=}b\right)$:

  $$\begin{aligned} 2-x &= 1 \\ -x &= 1-2 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\,;\,1\right\}$

(c) De l'équation :

$$x\cdot e^x - x = 0$$
$$x\cdot\left(e^x-1\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x=0$ | $e^x-1=0$

$e^x=1$

$e^x=e^0$

D'après la propriété : $\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right)$:

$x=0$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{0\}$

C.16

(a) On a les transformations suivantes :

$$e^x+e^{-x}=0$$
$$e^x\cdot\left(1+e^{-2x}\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul ; sachant que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ceci entraîne :

$$1+e^{-2x}=0 \quad\Longrightarrow\quad e^{-2x}=-1$$

Or, la fonction exponentielle étant strictement positive, cette dernière équation n'admet aucune solution :

$\mathcal{S}=\varnothing$

(b) Cette égalité peut se transformer en :

$$e^{3x+1}=e^{-2x+3}$$
$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-2x+3}}=1$$
$$e^{3x+1-(-2x+3)}=1$$
$$e^{5x-2}=1$$
$$e^{5x-2}=e^0$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$5x-2=0$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$

(c) On a :

$$e^{2x}-1=0$$
$$e^{2x}=1$$
$$e^{2x}=e^0$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$2x=0$$
$$x=0$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\{0\}$

(d) On a les manipulations algébriques suivantes :

$$x\cdot e^{2x}-2\cdot e^{2x}=0$$
$$e^{2x}\cdot\left(x-2\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. Sachant que la fonction exponentielle est strictement positive et ne s'annule pas, on en déduit l'équation :

$$x-2=0$$
$$x=2$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\{2\}$

C.17

(a) De l'équation :

$$e^{x^2+1}=e^x$$

et de la propriété $\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right)$, on en déduit :

$$x^2+1=x$$
$$x^2-x+1=0$$

Étudions le discriminant du polynôme du second degré du membre de gauche :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3$$

Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que cette équation n'admet aucune solution :

$\mathcal{S}=\varnothing$

(b) On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\left(e^{x+1}\right)^2=e^{x^2+1}$$
$$e^{2(x+1)}=e^{x^2+1}$$
$$e^{2x+2}=e^{x^2+1}$$

De la propriété : $\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right)$

$$2x+2=x^2+1$$
$$0=x^2+1-2x-2$$
$$0=x^2-2x-1$$

Le discriminant du membre du second degré a pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\cdot\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-2)-2\cdot\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2-2\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}=1-\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-2)+2\cdot\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2+2\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}=1+\sqrt{2}$$

(c) La fonction exponentielle étant strictement positive, l'équation :

$$e^{x^2+1}+e^x=0$$

présente la somme de deux termes strictement positifs qui doit être nulle. Cela n'étant pas possible, cette équation n'admet aucune solution.

C.18

(a)

$$e^{x^2+x}=1$$
$$e^{x^2+x}=\exp(0)$$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :

$$x^2+x=0$$
$$x\cdot\left(x+1\right)=0$$

Ainsi, l'ensemble des solutions possèdent deux éléments :

$\mathcal{S}=\{-1\,;0\}$

b)
$$e^{x^2+5} = \left(e^{x+2}\right)^2$$
$$e^{x^2+5} = e^{2\cdot(x+2)}$$
$$e^{x^2+5} = e^{2x+4}$$
Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :
$$x^2+5 = 2x+4$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
On a : $\mathcal{S}=\{1\}$

C.19

a) $\exp(x) < e$

$\exp(x) < \exp(1)$

La fonction exponentielle est strictement croissante

$x < 1$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S}=]-\infty\,;1[$

b) $\exp(-x) \geqslant 1$

$\exp(-x) \geqslant \exp 0$

La stricte croissante de la fonction exponentielle donne :
$$-x \geqslant 0$$
$$x \leqslant 0$$
On a pour ensemble de solution : $\mathcal{S}=\mathbb{R}_-$

C.20

a) Étudions l'inéquation :
$$e^{2x-4} \geqslant 1$$
$$e^{2x-4} \geqslant e^0$$
De la propriété : $\left(e^a \geqslant e^b \implies a \geqslant b\right)$
$$2x-4 \geqslant 0$$
$$2x \geqslant 4$$
$$x \geqslant \frac{4}{2}$$
$$x \geqslant 2$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = [2\,;+\infty[$

b) $e^{2x-1} < e^x$

La fonction exponentielle est strictement positive :
$$\frac{e^{2x-1}}{e^x} < \frac{e^x}{e^x}$$
$$e^{2x-1-x} < 1$$
$$e^{x-1} < e^0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante :
$$x-1 < 0$$
$$x < 1$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=]-\infty\,;1[$

C.21

a) On a :
$$e^x - e^{-x} > 0$$
$$e^x\cdot\left(1-e^{-2x}\right) > 0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante :
$$1-e^{-2x} > 0$$
$$1 > e^{-2x}$$
$$e^{-2x} < 1$$
$$e^{-2x} < e^0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante :
$$-2x < 0$$
$$x > 0$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^*$

b) On a les transformations algébriques suivantes :
$$x\cdot e^{-x} - 3\cdot e^{-x} < 0$$
$$e^{-x}\cdot(x-3) < 0$$
Étudions le signe du membre de gauche :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
e^{-x}		$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$e^{-x}\cdot(x-3)$		$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble de solution : $\mathcal{S}=]-\infty\,;3[$

C.22

a) Étudions l'inéquation :
$$e^{x^2-3x+5} < e$$
$$e^{x^2-3x+5} < e^1$$
De la propriété : $\left(e^a < e^b \implies a < b\right)$
$$x^2-3x+5 < 1$$
$$x^2-3x+5-1 < 0$$
$$x^2-3x+4 < 0$$
Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-3)^2-4\times1\times4 = 9-16 = -7$$
Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme a pour signe le signe de son coefficient du terme du second degré : c'est-à-dire positif.
Ainsi, l'inéquation $x^2-3x+4<0$ n'admet aucune solution.

b) La fonction exponentielle étant strictement positif, on en déduit que l'inéquation $\left(e^{3x+1}\right)^2<0$ n'admet aucune solution.

C.23

a)
- Étudions l'inéquation :
$$e^{2x}+3\cdot e^x < 4$$
$$e^{2x}+3\cdot e^x-4 < 0$$
$$\left(e^x\right)^2+3\cdot e^x-4 < 0$$
- Étudions le polynôme x^2+3x-4 qui a pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 3^2-4\times1\times(-4) = 9+16 = 25$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

  Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-3-5}{2\times 1} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-3+5}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

On en déduit la factorisation :
$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

- On en déduit la factorisation :
$$e^{2x}+3\cdot e^x < 4$$
$$\left(e^x\right)^2+3\cdot e^x-4 < 0$$
$$\left(e^x+4\right)\left(e^x-1\right) < 0$$

- Résolvons les deux équations :
  - $e^x+4 \geqslant 0 \Longrightarrow e^x \geqslant -4$
    On en déduit : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  - $e^x-1 \geqslant 0 \Longrightarrow e^x \geqslant 1$
    On en déduit : $\mathcal{S} = \left[0\,;+\infty\right[$

- On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^x+4	$+$		$+$
e^x-1	$-$	0	$+$
$e^{2x}+3e^x-4$	$-$	0	$+$

On en déduit les solutions de notre inéquation :
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;0\right[$

b
$$e^x+e^{-x} < 2$$
$$e^x-2+e^{-x} < 0$$
La fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$
$$e^x\cdot\left(e^x-2+e^{-x}\right) < e^x\cdot 0$$
$$e^{2x}-2\cdot e^x+e^{-x+x} < e^x\cdot 0$$
$$e^{2x}-2\cdot e^x+1 < 0$$
$$\left(e^x\right)^2-2\cdot e^x+1 < 0$$
$$\left(e^x-1\right)^2 < 0$$
Or, le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif : $\mathcal{S} = \varnothing$

C.24

1 On peut conjecturer :
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

2 Pour étudier la position relative de ces deux courbes, étudions le signe de la différence :
$f(x)-g(x) = x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}\cdot(1-x)$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$
x	$+$		$+$
$1-x$	$+$	0	$-$
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$

Ce tableau de signes confirme la conjecture de la question 1.

C.25

1
- Montrons que les coordonnées du point A sont vérifiées par ces deux fonctions :
  - $f(1) = (1-1)\cdot e^{3\times 1} = 0\times e^3 = 0\times 1 = 0$
  - $g(1) = 1^2-2\times 1+1 = 1-2+1 = 0$
- Montrons que les coordonnées du point B sont vérifiées par ces deux fonctions :
  - $f(0) = (1-0)\cdot e^{3\times 0} = 1\times e^0 = 1\times 1 = 1$
  - $g(0) = 0^2-2\times 0+1 = 0-0+1 = 1$

2 a Pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, on a :
$$x \geqslant 0$$
$$3\cdot x \geqslant 0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante :
$$e^{3\cdot x} \geqslant e^0$$
$$e^{3\cdot x} \geqslant 1$$
$$e^{3\cdot x}-1 \geqslant 0$$

b Le nombre x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, on a :
$$x \geqslant 0$$
$$e^{3\cdot x}-1+x \geqslant 0$$

c De la question précédente, on a :
$$e^{3\cdot x}-1+x \geqslant 0$$
Puisque $x\in\left[0\,;1\right]$, on a $1-x\geqslant 0$:
$$(1-x)\cdot\left(e^{3\cdot x}-1+x\right) \geqslant 0$$
$$f(x)-g(x) \geqslant 0$$

C.26

a $f'(x) = e^x$

b L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = e^{a\cdot x+b}$
où la fonction u est définie par :
$a = 2 \quad ; \quad b = 0$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$f'(x) = a\cdot e^{a\cdot x+b} = 2\cdot e^{2\cdot x}$

c L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = e^{a\cdot x+b}$
où la fonction u est définie par :
$a = -1 \quad ; \quad b = 3$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$f'(x) = a\cdot e^{a\cdot x+b} = -1\cdot e^{3-x} = -e^{3-x}$

C.27

1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour la fonction

f' pour dérivée dont l'expression est :
$f'(x) = 2\cdot e^x + 2\cdot x$

(2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour la fonction g' pour dérivée dont l'expression est :
$g'(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(3\cdot e^{3x+1}\right) + (-2)\cdot e^{-2x} = \frac{3}{4}\cdot e^{3x+1} - 2\cdot e^{-2x}$

C.28

(1) La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = 3\times(-2)\cdot e^{1-2x} = -6\cdot e^{1-2x}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction f' étant strictement négative sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

C.29

(1) la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = 3\times5\cdot e^{5x+1} = 15\cdot e^{5x+1}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction g admet pour dérivée la fonction g' qui admet pour expression :

$$g'(x) = 0 - 3\times(-1)\cdot e^{-x} = 3\cdot e^{-x}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

C.30

(1) La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ 1 - e^{-x} &> 0 \\ -e^{-x} &> -1 \\ e^{-x} &< 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e^{-x} &< e^0 \\ -x &< 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit :

- Sur $\left]-\infty\,;0\right[$, la fonction f est strictement décroissante.
- Sur $\left]0\,;+\infty\right[$, la fonction f est strictement décroissante.

(2) La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$g'(x) = 6 + 3\times(-2)\cdot e^{-2x} = 6 - 6\cdot e^{-2x}$$

Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} g'(x) &> 0 \\ -6\cdot e^{-2x} &> -6 \\ e^{-2x} &< \frac{-6}{-6} \\ e^{-2x} &< 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e^{-2x} &< e^0 \\ -2x &< 0 \\ x &> \frac{0}{-2} \\ x &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction g' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit :

- Sur $\left]-\infty\,;0\right[$, la fonction g est strictement décroissante.
- Sur $\left]0\,;+\infty\right[$, la fonction g est strictement décroissante.

C.31

(1) Étudions la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2} - \frac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2} \\ &= \frac{\left(e^{1+x}+e^{1-x}\right) - \left(e^{1+x}-e^{1-x}\right)}{2} \\ &= \frac{e^{1+x}+e^{1-x}-e^{1+x}+e^{1-x}}{2} = \frac{2\cdot e^{1-x}}{2} = e^{1-x} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive :
$f(x) - g(x) > 0$

(2) La fonction f admet pour dérivée :

$$f'(x) = \frac{e^{1+x}+\left(-e^{1-x}\right)}{2} = \frac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{e^{1+x}-\left(-e^{1-x}\right)}{2} = \frac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2} = f(x)$$

(3) (a) La tangente (T) admet pour équation réduite :
$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$

D'après la question (2) :

$$y = g(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

(b) La tangente (T') admet pour équation réduite :
$y = g'(a)\cdot(x-a) + g(a)$

D'après la question (2) :

$$y = f(a)\cdot(x-a) + g(a)$$

(4) Le point M est le point d'intersection des tangentes (T) et (T') et l'abscisse du point M est défini par l'équation :

$$g(a)\cdot(x-a) + f(a) = f(a)\cdot(x-a) + g(a)$$

$$\begin{aligned} g(a)\cdot(x-a)+f(a)-f(a)\cdot(x-a)-g(a) &= 0 \\ g(a)\cdot(x-a-1) - f(a)\cdot(x-a-1) &= 0 \\ \left[g(a)-f(a)\right]\cdot(x-a-1) &= 0 \end{aligned}$$

Or, nous avons vu que, pour tout réel x, on a :
$f(x)-g(x)>0 \implies g(x)-f(x)<0$

Le produit étant nul et le facteur $g(a)-f(a)$ étant non-nul, on en déduit que le second facteur est nul :

$$\begin{aligned} x-a-1 &= 0 \\ x &= a+1 \end{aligned}$$

Ainsi, le point d'intersection des deux tangentes (T) et (T') a pour abscisse $a+1$.

C.32

(a) La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :

$u(x)=3-x \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x)=-1 \quad ; \quad v'(x)=\mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=-1\cdot\mathrm{e}^x+\big(3-x\big)\cdot\mathrm{e}^x$$
$$=\big[-1+\big(3-x\big)\big]\cdot\mathrm{e}^x=\big(2-x\big)\cdot\mathrm{e}^x$$

(b) L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x)=x+1 \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=\mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot\mathrm{e}^x+\big(x+1\big)\cdot\mathrm{e}^x$$
$$=\big(1+x+1\big)\cdot\mathrm{e}^x=\big(x+2\big)\cdot\mathrm{e}^x$$

C.33 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et son expression est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x)=2x-1 \quad ; \quad v(x)=e^x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=2 \quad ; \quad v'(x)=e^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2\cdot e^x+\big(2x-1\big)\cdot e^x$$
$$=\big(2x-1+2\big)\cdot e^x=\big(2x+1\big)\cdot e^x$$

C.34

(1) De l'information $f(0)=3$, on a :

$$\begin{aligned}f(0)&=3\\ \big(a\times0^2+b\times0+c\big)\cdot\mathrm{e}^0+5&=3\\ c\times1+5&=3\\ c&=3-5\\ c&=-2\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :

$f(x)=\big(a\cdot x^2+b\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^x+5.$

(2) De l'information $f'(0)=0{,}5$, on a :

$$\begin{aligned}f'(0)&=0{,}5\\ \big[a\times0^2+\big(2\cdot a+b\big)\times0-2+b\big]\cdot\mathrm{e}^0&=0{,}5\\ \big(-2+b\big)\times1&=0{,}5\\ -2+b&=0{,}5\\ b&=0{,}5+2\\ b&=2{,}5\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x)=\big[a\cdot x^2+\big(2\cdot a+b\big)\cdot x-2+b\big]\cdot\mathrm{e}^x$$
$$=\big[a\cdot x^2+\big(2\cdot a+2{,}5\big)\cdot x-2+2{,}5\big]\cdot\mathrm{e}^x$$
$$=\big[a\cdot x^2+\big(2\cdot a+2{,}5\big)\cdot x+0{,}5\big]\cdot\mathrm{e}^x$$

De l'information $f'(1)=0$, on a :

$$\begin{aligned}f'(1)&=0\\ \big[a\times1^2+\big(2\cdot a+2{,}5\big)\cdot1+0{,}5\big]\cdot\mathrm{e}^1&=0\\ \big(a+2\cdot a+2{,}5+0{,}5\big)\cdot\mathrm{e}^1&=0\\ \big(3\cdot a+3\big)\cdot\mathrm{e}^1&=0\end{aligned}$$

Le nombre e^1 est stricement positif : donc non-nul :

$$\begin{aligned}3\cdot a+3&=0\\ 3\cdot a&=-3\\ a&=-1\end{aligned}$$

La fonction f admet pour expression :

$f(x)=\big(-x^2+2{,}5\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^x+5.$

C.35

(1)
- On a les deux limites :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+1=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

  On en déduit la limite :
  $\lim\limits_{x\mapsto+}\infty f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(x+1)\cdot\mathrm{e}^x=+\infty$
- On a le développement :
  $f(x)=(x+1)\cdot\mathrm{e}^x=x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$

  On a les deux limites :
  $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x\cdot\mathrm{e}^x=0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x=0$

  On en déduit la limite :
  $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=0$

(2) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définie par :

$u(x)=x+1 \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivées :

$u(x)'=1 \quad ; \quad v'(x)=\mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\times\mathrm{e}^x+\big(x+1\big)\cdot\mathrm{e}^x$$
$$=\big(1+x+1\big)\cdot\mathrm{e}^x=\big(x+2\big)\cdot\mathrm{e}^x$$

(3) La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, le signe de f' ne dépend que du facteur $x+2$.

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

On a l'image suivante par la fonction f :

$f(-2)=(-2+1)\cdot\mathrm{e}^{-2}=-\mathrm{e}^{-2}$

La fonction f admet le tableau de variations :

x	-∞		-2		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

C.36

(1) La fonction f est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$u(x)=-6\cdot x^2+5\cdot x \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=-12x+5 \quad ; \quad v'(x)=\mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$= \left(-12x+5\right)\cdot \mathrm{e}^x + \left(-6\cdot x^2+5\cdot x\right)\cdot \mathrm{e}^x$

$= \left(-12x+5-6\cdot x^2+5\cdot x\right)\cdot \mathrm{e}^x = \left(-6\cdot x^2-7x+5\right)\cdot \mathrm{e}^x$

2. Le polynôme $-6\cdot x^2-7\cdot x+5$ du second degré admet pour discriminant :

$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = \left(-7\right)^2-4\times(-6)\times 5 = 49+120 = 169$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-7)-13}{2\times(-6)} = \frac{7-13}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-7)+13}{2\times(-6)} = \frac{7+13}{-12} = \frac{20}{-12} = -\frac{5}{3}$$

Le facteur e^x étant strictement positif sur $\mathbb{R}$ et le coefficient du terme du second degré du premier facteur étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On en déduit :

- la fonction f est croissante sur : $\left[-\frac{5}{3}\,;\frac{1}{2}\right]$;
- la fonction f est décroissante sur : $\left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$;

C.37

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :

  $u(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad v(x) = x+1$

  qui admettent pour dérivée :

  $u'(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad v'(x) = 1$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

  $$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{\mathrm{e}^x\cdot\left(x+1\right)-\mathrm{e}^x\times 1}{\left(x+1\right)^2} = \frac{x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{\left(x+1\right)^2} = \frac{x\cdot\mathrm{e}^x}{\left(x+1\right)^2}$$

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :

  $u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$

  qui admettent pour dérivée :

  $u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

  $$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{2\cdot\mathrm{e}^x-\left(2x+1\right)\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{\left[2-\left(2x+1\right)\right]\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{2-\left(2x+1\right)}{\mathrm{e}^x} = \frac{2-2x-1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1-2x}{\mathrm{e}^x}$$

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :

  $u(x) = 3\cdot\mathrm{e}^x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x-1$

  qui admettent pour dérivée :

  $u'(x) = 3\cdot\mathrm{e}^x \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

  $$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{3\cdot\mathrm{e}^x\cdot\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(3\cdot\mathrm{e}^x+1\right)\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2} = \frac{3\cdot\mathrm{e}^{2x}-3\cdot\mathrm{e}^x-3\cdot\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2} = \frac{-4\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}$$

C.38

1. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

   $g(x) = 2\cdot\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-1$

   On a les transformations algébriques suivantes :

   $\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(2\cdot\mathrm{e}^x+1\right) = 2\cdot\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2\cdot\mathrm{e}^x-1 = 2\cdot\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-1 = g(x)$

2. De la forme factorisée de la fonction g', on obtient le tableau de signes de cette fonction sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
$2\cdot\mathrm{e}^x+1$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

   Ainsi, la fonction g est décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$ et croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$: la fonction g admet un minimum en 0 qui a pour valeur :

   $g(0) = \mathrm{e}^{2\times 0}-\mathrm{e}^0-0 = 1-1-0 = 0$

3. Du minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout x, on a :

   $g(x) \geqslant 0$

   Donc, pour tout entier naturel n, on a :

   $$g(u_n) \geqslant 0$$
   $$\mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n}-u_n \geqslant 0$$
   $$u_{n+1}-u_n \geqslant 0$$
   $$u_{n+1} \geqslant u_n$$

   On en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite croissante.