Première Spécialité - Chapitre 6

E.1

Proposition : pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{n\cdot x} = \left(e^x\right)^n$

Simplifier les expressions suivantes :

a) $e^3 \cdot e^4$ b) $e^4 \cdot e^{-4}$ c) $\left(e^4\right)^3 \cdot e^4$

d) $\dfrac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$ e) $e^5 \cdot e^6$ f) $\dfrac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}}$

E.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(e^3\right)^{-2} \cdot e^5$ b) $\dfrac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

E.3 Simplifier les expressions suivantes :

a) $e \cdot e^{2x+1}$ b) $e^{3-2x} \cdot e^{x+5}$ c) $e^{2\cdot x-1} \cdot e^{3-x}$

E.4 Simplifier les écritures suivantes :

a) $e^{3x+1} \cdot e^{2-2x}$ b) $\dfrac{e^{x-2}}{e^{3-x}}$ c) $e^{-x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$

E.5 Simplifier les expressions suivantes :

a) $3\cdot\left(e^{5x}\right)^4 - \left(2\cdot e^{10x}\right)^2$ b) $e^{9x} - 2\cdot\left(e^{3x}\right)^3$

E.6 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\left(e^{2\cdot x-1}\right)^2}{e^{7\cdot x-2}}$ b) $3\cdot e^{-2\cdot x} + \dfrac{e^x+1}{e^{2\cdot x}}$

E.7 Établir les égalités suivantes :

a) $\dfrac{2+3\cdot e^x + e^{2x}}{e^{2x}} = 2\cdot e^{-2x} + 3\cdot e^{-x} + 1$

b) $\dfrac{1-e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$

E.8 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(e^5 - e^4\right)^2 - \left(e^5 + e^4\right)^2$ b) $\left(e^2 + e^{-2}\right)\cdot\left(e^2 - e^{-2}\right)$

E.9 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(e^{3x}\right)^2 - e^{2x}\cdot\left(e^{2x} + e^{-2}\right)^2$

b) $\left(e^{3x}\right)^2 + \left(e^{-3x}\right)^2 - \left(e^{3x} - e^{-3x}\right)^2$

E.10 Recopier les identités ci-dessous en complétant correctement les pointillés :

(a) $e^x+e^{-x}=e^x\cdot\left(\ldots+\ldots\right)$ (b) $\dfrac{e^x}{x^2}=\left(\dfrac{e^{\cdots}}{\ldots}\right)^2$

(c) $1+e^{-x}=\dfrac{\ldots+\ldots}{e^x}$ (d) $\dfrac{1+e^x}{e^{2x}}=\ldots+\ldots$

(e) $\dfrac{e^{3x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}}=\dfrac{1-\ldots}{1+\ldots}$ (f) $e^{16x}=\left(e^{\cdots}\right)^2$

E.11 Simplifier les expressions suivantes :

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

E.12 Établir les égalités suivantes :

(a) $\dfrac{e^{3x}+2}{e^{3x}-1}=\dfrac{1+2\cdot e^{-3x}}{1-e^{-3x}}$ (b) $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{3x}+e^{2x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{\left(e^x+1\right)^2}$

E.13

Proposition : pour tous nombres réels a et b
$a=b \iff e^a=e^b$

Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^{5x+1}=e^{2x}$ (b) $e^{3x+1}=1$ (c) $\dfrac{e^{1-3x}}{e}=1$

E.14 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $\exp(x)=e$ (b) $\exp(-x)=1$

(c) $\exp(2x-1)=e$ (d) $e^x-e^{-x}=0$

E.15 Résoudre les équations :

(a) $e^x\cdot\left(e^{2x}-e^2\right)=0$ (b) $\left(e^{3x-1}-1\right)\left(e^{2-x}-e\right)=0$

(c) $x\cdot e^x-x=0$

E.16 Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^x+e^{-x}=0$ (b) $e^{3x+1}=e^{-2x+3}$

(c) $e^{2x}-1=0$ (d) $x\cdot e^{2x}-2\cdot e^{2x}=0$

E.17 Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^{x^2+1}=e^x$ (b) $\left(e^{x+1}\right)^2=e^{x^2+1}$ (c) $e^{x^2+1}+e^x=0$

E.18 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $e^{x^2+x}=1$ (b) $e^{x^2+5}=\left(e^{x+2}\right)^2$

E.19 Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $\exp(x)<e$ (b) $\exp(-x)\geqslant 1$

E.20

Proposition : Pour tout nombre réels a et b :

- $\mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \iff a > b$
- $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$

Remarque : cette propriété vient de la stricte croissante de la fonction f.

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $\mathrm{e}^{2x-4} \geqslant 1$ (b) $\mathrm{e}^{2x-1} < \mathrm{e}^x$

E.21 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$ (b) $x{\cdot}\mathrm{e}^{-x} - 3{\cdot}\mathrm{e}^{-x} < 0$

E.22 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\mathrm{e}^{x^2-3x+5} < \mathrm{e}$ (b) $\mathrm{e}^{[(3x+1)^2]} < 0$

E.23 Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

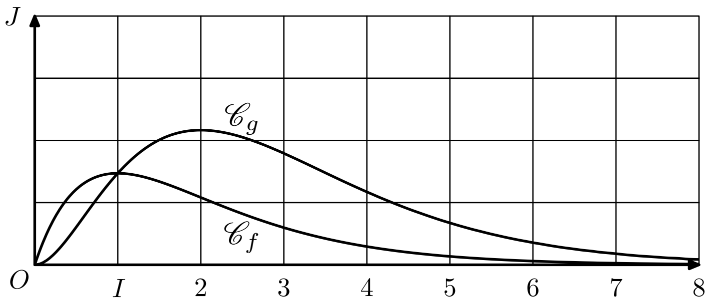
(a) $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x < 4$ (b) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} < 2$

Indication : on identifiera ces inéquations à des inéquations polynomiales de degré 2.

E.24 Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$; $g(x) = x^2{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.



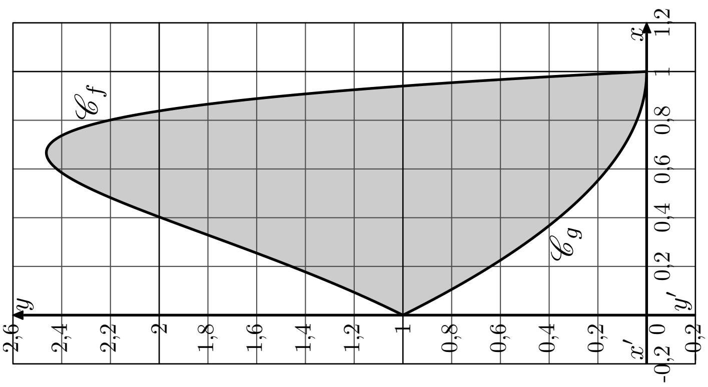
(1) Graphiquement, conjecturer les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

(2) (a) Factoriser l'expression $f(x) - g(x)$.

(b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.25 Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0\,;1]$ par :

$f(x) = (1-x){\cdot}\mathrm{e}^{3x}$; $g(x) = x^2 - 2{\cdot}x + 1$



(1) Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$ sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

(2) On admet que : pour tout x dans $[0\,;1]$:

$f(x)-g(x)=\big(1-x\big)\big(\mathrm{e}^{3x}-1+x\big)$

(a) Justifier que pour tout x dans $\big[0\,;\,1\big]$:
$\mathrm{e}^{3\cdot x}-1\geqslant 0$

(b) En déduire que pour tout x dans $\big[0\,;1\big]$:
$\mathrm{e}^{3\cdot x}-1+x\geqslant 0$

(c) Étudier le signe de $f(x)-g(x)$ pour tout x dans $\big[0\,;1\big]$.

E.26

Proposition : soit a et b deux nombres réels et la fonction f définie par : $f(x)=\mathrm{e}^{ax+b}$
La fonction f', dérivée de f, admet pour expression :
$f'(x)=a{\cdot}\mathrm{e}^{ax+b}$

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

(a) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ (b) $f(x)=\mathrm{e}^{2\cdot x}$ (c) $f(x)=\mathrm{e}^{3-x}$

E.27 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction dérivée :

(1) $f(x)=2{\cdot}\mathrm{e}^{x}+x^2$ (2) $g(x)=\dfrac{1}{4}{\cdot}\mathrm{e}^{3x+1}+\mathrm{e}^{-2x}$

E.28 On considère la fonction f définie par : $f(x)=3{\cdot}\mathrm{e}^{1-2x}$

(1) Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f. Puis, en déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

(2) En déduire le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.29 Pour chacune des deux fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de leur fonction dérivée ainsi que leur sens de variation sur $\mathbb{R}$:

(1) $f(x)=3{\cdot}\mathrm{e}^{5x+1}$ (2) $g(x)=2-3{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$

E.30 Pour chacune des fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de leur fonction dérivée, puis étudier leur sens de variations sur $\mathbb{R}$:

(1) $f(x)=x-\mathrm{e}^{x}$ (2) $g(x)=6x+3{\cdot}\mathrm{e}^{-2x}$

E.31 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

- $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{1-x}}{2}$
- $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x}}{2}$

Dans un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on donne les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement représentative des fonctions f et g :

(1) Établir que, pour tout nombre réel x : $f(x)-g(x)>0$

(2) Établir que, pour tout réel x, on a :
$f'(x)=g(x)$; $g'(x)=f(x)$

(3) Considérons a un nombre réel quelconque :

(a) Justifier que l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour expression :
$y=g(a){\cdot}\big(x-a\big)+f(a)$

(b) Justifier que l'équation réduite de la tangente (T') à la courbe $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse a a pour expression :
$y=f(a){\cdot}\big(x-a\big)+g(a)$

(4) Justifier que les tangentes (T) et (T') sont sécantes et en déduire l'abscisse du point d'intersection.

E.32 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

(a) $f(x)=\big(3-x\big){\cdot}\mathrm{e}^{x}$ (b) $g(x)=\big(x+1\big)\mathrm{e}^{x}$

E.33 On considère la fonction f définie par :
$f(x)=(2{\cdot}x-1){\cdot}\mathrm{e}^{x}$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f et l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

Indication : on donnera l'expression de f' sous forme factorisée.

E.34 On considère une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-3\,;2\right]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On donne les informations suivantes sur la fonction f :

$f(0)=3 \quad ; \quad f'(1)=0 \quad ; \quad f'(0)=0{,}5$

On admet qu'il existe trois réels a, b, c pour lesquels la fonction f définie ci-dessus est définie, pour tout x de $\left[-3\,;2\right]$, par : $f(x)=\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)\cdot \mathrm{e}^x+5$.

1. En utilisant une des informations précédentes, justifier que $c=-2$.
2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $\left[-3\,;2\right]$, par :
   $f'(x)=\left[a\cdot x^2+\left(2\cdot a+b\right)\cdot x-2+b\right]\cdot \mathrm{e}^x$

   En utilisant les informations précédentes, justifier que $b=2{,}5$, puis, que $a=-1$.

E.35 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $\quad f(x)=(x+1)\cdot \mathrm{e}^x$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x : $\quad f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

E.36 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\left(-6\cdot x^2+5\cdot x\right)\cdot \mathrm{e}^x$

1. Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, a pour expression : $\quad f'(x)=\left(-6\cdot x^2-7\cdot x+5\right)\cdot \mathrm{e}^x$
2. Établir le tableau de signe de la fonction f'.
3. Donner les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Indications : les valeurs des images et limites aux bornes ne sont pas demandées.

E.37 Pour chaque ligne, le tableau ci-dessous donne l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f :

$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$	$f'(x)=\dfrac{x\cdot \mathrm{e}^x}{\left(x+1\right)^2}$
$f(x)=\dfrac{2\cdot x+1}{\mathrm{e}^x}$	$f'(x)=\dfrac{-2\cdot x+1}{\mathrm{e}^x}$
$f(x)=\dfrac{3\cdot \mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$	$f'(x)=\dfrac{-4\cdot \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}$

Vérifier la véracité de chacune des expressions f' données.

E.38 Soit a un nombre réel quelconque. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$u_0=a \quad ; \quad u_{n+1}=\mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$u_{n+1}=\mathrm{e}^{u_n}\cdot\left(\mathrm{e}^{u_n}-1\right)$.

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-x$

1. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :
   $g'(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(2\cdot \mathrm{e}^x+1\right)$
2. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
3. En remarquant que $u_{n+1}-u_n=g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.