Première Spécialité - Chapitre 5

C.1 D'après son tableau de variation, la fonction f est croissante sur l'intervalle $\big[-1\,;4\big[$. On en déduit que la tangente au point d'abscisse 1 est croissante : le coefficient directeur de cette tangente est positif.

Le nombre dérivé de la fonction f en $x=1$ est positif.

C.2 D'après le tableau de signe, la fonction f' admet une image négative pour $x=2$.

On en déduit que le coefficient directeur de la tangente (T) est négative : la tangente (T) est décroissante.

C.3 Les indications données dans l'énoncé permettent d'obtenir les images suivantes par la fonction f :

- $f(-1)=3$
- $f(5)=-2{\cdot}f(-1)=-2{\times}3=-6$
- $f(-3)=f(5)+5=-6+5=-1$
- $f(2)=f(-1){\cdot}f(5)=3{\times}(-6)=-18$

Ainsi, on obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f	-1	↗	3	↘	-18	↗	-6

C.4

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f dont l'expression est :
$f'(x)=3{\cdot}x^2-6{\cdot}(2x)+9=3{\cdot}x^2-12{\cdot}x+9$

2. Déterminons le discriminant du polynôme du second degré définissant la fonction f' :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-12)^2-4{\times}3{\times}9=144-108=36$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)-6}{2{\times}3}=\frac{12-6}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)+6}{2{\times}3}=\frac{12+6}{6}=\frac{18}{6}=3$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^3-6{\cdot}x^2+9{\cdot}x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On a les deux images par la fonction f :

- $f(1)=1^3-6{\times}1^2+9{\times}1+3=1-6+9+3=7$
- $f(3)=3^3-6{\times}3^2+9{\times}3+3=9-36+27+3=3$

D'après le signe de la fonction dérivée f', on a le tableau de variations suivant de la fonction f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

C.5

1. La fonction f admet pour fonction dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x)=3{\cdot}x^2-9{\cdot}(2x)+15=3x^2-18x+15$

Le polynôme du second degré définissant l'expression de la fonction f' a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-18)^2-4{\times}3{\times}15=324-180=144$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{144}=12$

Le discriminant étant strictement positif, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-18)-12}{2{\times}3}=\frac{18-12}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-18)+12}{2{\times}3}=\frac{18+12}{6}=\frac{30}{6}=5$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le signe de la fonction dérivée f' permet de déterminer le sens de variation de la fonction f :

x	-∞		1		5		$+\infty$
Variation de f		↗		↘		↗	

2. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :
$g'(x)=-3{\cdot}x^2-3{\cdot}(2x)-3=-3{\cdot}x^2-6{\cdot}x-3$

Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-6)^2-4{\times}(-3){\times}(-3)=36-36=0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet pour unique racine :
$-\dfrac{b}{2{\cdot}a}=-\dfrac{-6}{2{\times}(-3)}=-\dfrac{-6}{-6}=-1$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes suivant de la fonction dérivée g' :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

Le signe de la fonction dérivée permet de définir le tableau de variations de la fonction g est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variation de g		↘	4	↘	

3 La fonction h admet pour dérivée la fonction h' dont l'expression est :

$$h'(x) = -\frac{1}{3}\cdot(3x^2) + \frac{1}{2}\cdot(2x) - \frac{1}{2} = -x^2 + x - \frac{1}{2}$$

Le polynôme du second degré définissant la fonction h' admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 = -1$$

Le discriminant étant strictement négatif, la fonction h' n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, h' admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	

Le signe de la fonction dérivée h' permet de déterminer le sens de variation de la fonction h.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de h		↘	

C.6

1 La fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = -2\times\left(3x^2\right) - 4\times(2x) + 8$$
$$= -6x^2 - 8x + 8$$

2 La fonction f' admet pour expression un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-8)^2 - 4\times(-6)\times 8 = 64 + 192 = 256$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{256} = 16$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-8)-16}{2\times(-6)} = \frac{8-16}{-12} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-8)+16}{2\times(-6)} = \frac{8+16}{-12} = \frac{24}{-12} = -2$$

Le terme du coefficient du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-6x^2-8x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Voici le tableau de variation de la fonction f *(sans les valeurs)* :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variation de f		↘		↗		↘	

C.7

1 La fonction f est définie comme étant la somme de fonction de référence. On en déduit l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = 4 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4\cdot x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{4\cdot x^2 - 1}{x^2} = \frac{\left(2\cdot x\right)^2 - 1^2}{x^2} = \frac{\left(2\cdot x+1\right)\left(2\cdot x-1\right)}{x^2}$$

2 On a les valeurs suivantes :

- $f(1) = 4\times 1 + \frac{1}{1} - 5 = 4 + 1 - 5 = 0$
- $f'(1) = 4 - \frac{1}{1^2} = 4 - \frac{1}{1} = 4 - 1 = 3$

La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$$y = f'(1)\left(x-1\right) + f(1)$$
$$y = 3\left(x-1\right) + 0$$
$$y = 3x - 3$$

3 a On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

b On en déduit les variations suivantes de la fonction f :

- la fonction f est décroissante sur les intervalles $\left]-\frac{1}{2}\,;0\right[$ et $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.
- la fonction f est croissante sur les intervalles

$\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

C.8 On remarque que :

- la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $\left[\dfrac{1}{2}\,;2\right]$ et $[3\,;7]$;
- la fonction f est strictement croissante sur les intervalles $[2\,;3]$.

On en déduit le tableau de signes de la fonction f' son ensemble de définition $[0{,}5\,;7]$:

x	0,5		2		3		7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

C.9

1. L'expression de la fonction f est définie par le produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x)=5x^2+5x-4 \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x)=10x+5 \quad ; \quad v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$\begin{aligned}f'(x)&=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\\&=(10x+5)\cdot\sqrt{x}+(5x^2+5x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{2x(10x+5)}{2\sqrt{x}}+\frac{5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{20x^2+10x+5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}}=\frac{25x^2+15x-4}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

2. La dérivée s'écrit sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est positif ; pour étudier son signe, il suffit de connaître le signe du numérateur.

Le polynôme du second degré définissant ce quotient a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=15^2-4\times25\times(-4)=625>0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{625}=25$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet donc les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15-25}{50}=\frac{-40}{50}=-\frac{4}{5}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15+25}{50}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$25x^2+15x-4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$					||	$-$	0	$+$	

3. Calculons l'image de $\dfrac{1}{5}$ par la fonction f :
$$\begin{aligned}f\Big(\frac{1}{5}\Big)&=\Big[5\times\Big(\frac{1}{5}\Big)^2+5\times\frac{1}{5}-4\Big]\sqrt{\frac{1}{5}}\\&=\Big(5\times\frac{1}{25}+1-4\Big)\sqrt{\frac{1}{5}}=\Big(\frac{1}{5}+1-4\Big)\sqrt{\frac{1}{5}}\\&=-\frac{14}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{14\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$
Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
Variation de f	0 ↘	$-\frac{14\sqrt{5}}{25}$	↗ $+\infty$

C.10

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x^2-x \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x)=2\cdot x-1 \quad ; \quad v'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f, dérivée de la fonction f :
$$\begin{aligned}f'(x)&=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\\&=(2\cdot x-1)\cdot\sqrt{x}+(x^2-x)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\\&=(2\cdot x-1)\cdot\sqrt{x}+\frac{x^2-x}{2\cdot\sqrt{x}}\\&=\frac{(2\cdot x-1)\cdot\sqrt{x}\times2\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}+\frac{x^2-x}{2\cdot\sqrt{x}}\\&=\frac{(2\cdot x-1)\times2x}{2\cdot\sqrt{x}}+\frac{x^2-x}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{4x^2-2x+x^2-x}{2\cdot\sqrt{x}}\\&=\frac{5x^2-3x}{2\cdot\sqrt{x}}\end{aligned}$$

2. On a les valeurs suivantes :
- $f(1)=(1^2-1)\cdot\sqrt{1}=(1-1)\cdot\sqrt{1}=0\times\sqrt{1}=0$
- $f'(1)=\dfrac{5\times1^2-3\times1}{2\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{5-3}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$

Ainsi, la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :
$$\begin{aligned}y&=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)\\y&=1\cdot(x-1)+0\\y&=x-1\end{aligned}$$

3. a. Factorisation le numérateur de l'expression de f' :
$$f'(x)=\frac{5\cdot x^2-3\cdot x}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{x\cdot(5\cdot x-3)}{2\cdot\sqrt{x}}$$
On a le tableau de signes :

x	0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
x	‖	$+$	|	$+$	
$5x-3$	‖	$-$	0	$+$	
$2\cdot\sqrt{x}$	‖	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(b) On en déduit les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

- f est décroissante sur $\left]0\,;\frac{3}{5}\right]$;
- f est croissante sur $\left[\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$.

C.11

(1) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit des fonctions u et v définies par :

$u(x)=3{\cdot}x^2-5{\cdot}x \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=6{\cdot}x-5 \quad ; \quad v'(x)=\dfrac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f, dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$

$$=\big(6x-5\big){\cdot}\sqrt{x}+\big(3{\cdot}x^2-5{\cdot}x\big){\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\big(6x-5\big){\cdot}\times2x}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{3{\cdot}x^2-5{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{12x^2-10x}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{3{\cdot}x^2-5{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{12x^2-10x+3{\cdot}x^2-5{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{15x^2-15x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{15x\big(x-1\big)}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

(2) On a les valeurs suivantes :

- $f(1)=\big(3{\times}1^2-5{\times}1\big){\cdot}\sqrt{1}=\big(3-5\big){\cdot}\sqrt{1}$
  $=-2{\times}\sqrt{1}=-2$
- $f'(1)=\dfrac{15{\times}1{\times}\big(1-1\big)}{2{\cdot}\sqrt{1}}=\dfrac{15{\times}0}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

Ainsi, la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$y=f'(1){\cdot}\big(x-1\big)+f(1)$

$y=0{\cdot}\big(x-1\big)-2$

$y=-2$

(3) On a le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$15x$	‖	$+$	|	$+$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$2\cdot\sqrt{x}$	‖	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

- f est décroissante sur $\big]0\,;1\big]$;
- f est croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

C.12

(1) Le dénominateur étant un polynôme du second degré, son discriminant a pour valeur :

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4{\times}2{\times}3=4-24=-20<0$

Ce polynôme n'admet aucune racine : le dénominateur de ce quotient ne s'annule jamais.

On a en déduit que la fonction f est définie pour tout nombre réel : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

(2) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définie par :

$u(x)=x^2-x+3 \quad ; \quad v(x)=2x^2-2x+3$

qui admette pour dérivée :

$u'(x)=2x-1 \quad ; \quad v'(x)=4x-2$

Ainsi, la formule de dérivation du quotient de fonctions donne l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{\big(2x-1\big)\big(2x^2-2x+3\big)-\big(x^2-x+3\big){\times}\big(4x-2\big)}{\big(2x^2-2x+3\big)^2}$$

$$=\frac{\big(4x^3-4x^2+6x-2x^2+2x-3\big)-\big(4x^3-2x^2-4x^2+2x+12x-6\big)}{\big(2x^2-2x+3\big)^2}$$

$$=\frac{\big(4x^3-6x^2+8x-3\big)-\big(4x^3-6x^2+14x-6\big)}{\big(2x^2-2x+3\big)^2}$$

$$=\frac{4x^3-6x^2+8x-3-4x^3+6x^2-14x+6}{\big(2x^2-2x+3\big)^2}$$

$$=\frac{-6x+3}{\big(2x^2-2x+3\big)^2}$$

(3) (a) Le dénominateur étant strictement positif *(voir question (1))*, le signe de f' ne dépend que de son numérateur. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(b) L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\Big(\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{1}{2}+3}{2{\times}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2-2{\times}\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3}{2{\times}\frac{1}{4}-1+3}=\frac{\frac{1-2+12}{4}}{\frac{1}{2}+2}$$

$$=\frac{\frac{11}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{11}{4}{\times}\frac{2}{5}=\frac{11}{10}$$

On a le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation de f	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	$\frac{11}{10}$	$\searrow$ $\frac{1}{2}$

(4) Ainsi, la fonction f admet pour maximum $\dfrac{11}{10}$, et atteint son maximum pour $x=\dfrac{1}{2}$.

C.13

(1) Le dénominateur est un polynôme du second degré ; son

discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times2\times1 = -7$$

Le discriminant est strictement négatif ; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

(2) (a) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :

$u(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 + x + 1$

qui admettent pour dérivée les fonctions :

$u'(x) = 6x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 4x + 1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(6x-2)\cdot(2x^2+x+1) - (3x^2-2x-2)\cdot(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(12x^3{+}6x^2{+}6x{-}4x^2{-}2x{-}2){-}(12x^3{+}3x^2{-}8x^2{-}2x{-}8x{-}2)}{(2x^2{+}x{+}1)^2}$$

$$= \frac{(12x^3+2x^2+4x-2) - (12x^3-5x^2-10x-2)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{7x^2+14x}{(2x^2+x+1)^2}$$

(b) Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur ; on peut factoriser le numérateur :

$7x^2 + 14x = 7x(x+2)$

Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif ; on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Effectuons les calculs suivants :

- $f(-2) = \dfrac{3\times(-2)^2 - 2\times(-2) - 2}{2\times(-2)^2 + (-2) + 1} = \dfrac{14}{7} = 2$
- $f(0) = \dfrac{3\times0^2 - 2\times0 - 2}{2\times0^2 + 0 + 1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Variation de f	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

(3) Puisque $2 > \dfrac{3}{2}$ et $-2 < -\dfrac{3}{2}$ et d'après le tableau de variations :

- 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x = -2$;
- -2 est la minimum de la fonction f et il est atteint pour $x = 0$;

C.14

(1) (a) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 3x - 4 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = 2x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{3\cdot(x^2+1) - (3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2+3-(6x^2-8x)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2+8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$$

(b) Le dénominateur étant strictement positif, on en déduit que le signe de la fonction f' ne dépend que de son numérateur.

Étudions le signe du polynôme $-3x^2{+}8x{+}3$. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 8^2 - 4\times(-3)\times3 = 64 + 36 = 100$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-8-10}{2\times(-3)} = \frac{-18}{-6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-8+10}{2\times(-3)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(2) On a les deux images suivantes par la fonction f :

- $f\Big(-\dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{3\cdot\Big(-\dfrac{1}{3}\Big) - 4}{\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^2 + 1} = \dfrac{(-1)-4}{\dfrac{1}{9}+1} = \dfrac{-5}{\dfrac{10}{9}}$

  $= -5\times\dfrac{9}{10} = -\dfrac{9}{2}$
- $f(3) = \dfrac{3\times3-4}{3^2+1} = \dfrac{9-4}{9+1} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

Du tableau de signes de la fonction dérivée f', on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	-∞		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

(3) La fonction f admet deux extrémums :

- Un minimum atteint pour $x = -\dfrac{1}{3}$. Ce minimum a pour valeur $-\dfrac{9}{2}$.
- Un maximum atteint pour $x = 3$. Ce maximum a pour valeur $\dfrac{1}{2}$.

C.15

(1) Pour x pièces vendues, le chiffre d'affaires sera de $247\cdot x$.

Ainsi, le bénéfice réalisé en vendant x pièces sera :

$$\begin{aligned} B(x) &= 247{\cdot}x - C(x) \\ &= 247{\cdot}x - \big(x^3 - 30{\cdot}x^2 + 400{\cdot}x + 100\big) \\ &= 247{\cdot}x - x^3 + 30{\cdot}x^2 - 400{\cdot}x - 100 \\ &= -x^3 + 30{\cdot}x^2 - 153{\cdot}x - 100 \end{aligned}$$

2. La fonction B' dérivée de la fonction B admet pour expression :

$$\begin{aligned} B'(x) &= 3\times(-1){\cdot}x^2 + 2\times 30{\cdot}x - 153 \\ &= -3{\cdot}x^2 + 60{\cdot}x - 153 \end{aligned}$$

3. L'expression de B' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 60^2 - 4\times(-3)\times(-153) = 3600 - 1836$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1764} = 42$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-60-42}{2\times(-3)} = \frac{-102}{-6} = 17$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-60+42}{2\times(-3)} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes de la fonction B' sur $\big[0\,;+\infty\big[$:

x	0		3		17		$+\infty$
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On a les images suivantes par la fonction B :

- $\begin{aligned} B(0) &= -0^3 + 30\times 0^2 - 153\times 0 - 100 \\ &= 0 + 0 - 0 - 100 \\ &= -100 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} B(3) &= -3^3 + 30\times 3^2 - 153\times 3 - 100 \\ &= -27 + 30\times 9 - 459 - 100 \\ &= -27 + 270 - 459 - 100 = -316 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} B(17) &= -17^3 + 30\times 17^2 - 153\times 17 - 100 \\ &= -4913 + 30\times 289 - 2601 - 100 \\ &= -4913 + 8670 - 2601 - 100 \\ &= 1056 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} B(25) &= -25^3 + 30\times 25^2 - 153\times 25 - 100 \\ &= -15625 + 30\times 625 - 3825 - 100 \\ &= -15625 + 18750 - 3825 - 100 \\ &= -800 \end{aligned}$

On obtient le tableau de variations ci-dessous :

x	0		3		17		25
Variation de B	-100	$\searrow$	-316	$\nearrow$	1056	$\searrow$	-800

5. D'après le tableau de variations, on en déduit que le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise vent 17 pièces alors le bénéfice est de 1056 €.

C.16

1. En vendant x kilomètres de tissu, la recette a pour valeur :

$$R(x) = 530{\cdot}x.$$

2. Ainsi, le bénéfice a pour valeur :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 530{\cdot}x - \big(15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 350{\cdot}x + 1000\big) \\ &= 530{\cdot}x - 15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 - 350{\cdot}x - 1000 \\ &= -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 1000 \end{aligned}$$

3. L'expression de la fonction B' dérivée de la fonction B a pour expression :

$$\begin{aligned} B'(x) &= 3\times(-15){\cdot}x^2 + 2\times 120{\cdot}x + 180 \\ &= -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180 \end{aligned}$$

4. L'expression de $B'(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 240^2 - 4\times(-45)\times 180 \\ &= 57600 + 32400 = 90000 \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement positif, la fonction B' admet les deux zéros ci-dessous :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-240-300}{2\times(-45)} = \frac{-540}{-90} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-240+300}{2\times(-45)} = \frac{60}{-90} = -\frac{2}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
$-45{\cdot}x^2{+}240{\cdot}x{+}180$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de signes de la fonction B' :

x	0		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit les variations de la fonction B :

- Sur $\big[0\,;6\big]$, la fonction B est croissante.
- Sur $\big[6\,;10\big]$, la fonction B est décroissante.

5. a. D'après l'étude des variations de la fonction B, on en déduit que le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise vend $6\,km$ de tissu.

b. La valeur du bénéfice maximal est :

$$\begin{aligned} B(6) &= -15\times 6^3 + 120\times 6^2 + 180\times 6 - 1000 \\ &= -15\times 216 + 120\times 36 + 180\times 6 - 1000 \\ &= -3240 + 4320 + 1080 - 1000 = 1160 \end{aligned}$$

C.17

1. a. Pour x tonnes de croquettes vendues, le montant de la recette est :

$$R(x) = 1900\times x$$

b. Le bénéfice exprimé en euros lorsque x tonnes de croquettes vendues s'exprime par :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 1900\times x - \left(x^3 - 105\cdot x^2 + 3700\cdot x + 4000\right) \\ &= 1900\cdot x - x^3 + 105\cdot x^2 - 3700\cdot x - 4000 \\ &= -x^3 + 105\cdot x^2 - 1800\cdot x - 4000 \end{aligned}$$

2. La fonction B' dérivée de la fonction B a pour expression :
$$\begin{aligned} B'(x) &= 3\times(-1)\cdot x^2 + 2\times 105\cdot x - 1800 \\ &= -3\cdot x^2 + 210\cdot x - 1800 \end{aligned}$$

3. Ce polynôme du second degré a pour discriminant :
$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4\cdot a\cdot c = 210^2 - 4\times(-3)\times(-1800) \\ &= 44\,100 - 21\,600 = 22\,500 \end{aligned}$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{22\,500} = 150$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme du second degré admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-210 - 150}{2\times(-3)} = \frac{-360}{-6} = 60$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-210 + 150}{2\times(-3)} = \frac{-60}{-6} = 10$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, le polynôme $-3\cdot x^2+210\cdot x-1800$ admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		10		60		$+\infty$
$-3\cdot x^2+210\cdot x-1800$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le signe de la fonction B' :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Par la fonction B, on a les images suivantes :
- $B(0) = -0^3 + 105\times 0^2 - 1800\times 0 - 4000$
  $= 0 + 0 - 0 - 4000 = -4000$
- $B(10) = -10^3 + 105\times 10^2 - 1800\times 10 - 4000$
  $= -1000 + 10\,500 - 18000 - 4000 = -12\,500$
- $B(60) = -60^3 + 105\times 60^2 - 1800\times 60 - 4000$
  $= -216\,000 + 378\,000 - 10\,8000 - 4000 = 50\,000$
- $B(80) = -80^3 + 105\times 80^2 - 1800\times 80 - 4000$
  $= 512\,000 + 672\,000 - 14\,4000 - 4000 = 12\,000$

On a le tableau de variations :

x	0		10		60		80
Variation de B	-4000	$\searrow$	$-12\,500$	$\nearrow$	$50\,000$	$\searrow$	$12\,000$

5. Pour obtenir un bénéfice maximal, l'entreprise doit vendre 60 tonnes de croquettes. Le bénéfice alors réalisé est de $50\,000$ €.

C.18

1. La dérivée de la fonction f étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de variations ci-dessous :

x	-∞		2		$+\infty$
Signe de f'			$+$		
Variation de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. La dérivée de la fonction f étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de variations ci-dessous :

x	-∞		-3		$+\infty$
Signe de g'			-		
Variation de g		$\searrow$	0	$\searrow$	

On déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

C.19

x	-∞		-4		-2		-1		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0		-		0	$+$	0	-	
Variation de f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
Signes de f			$+$		0			$-$			

C.20

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\begin{aligned} &(x+1)(x^2+2\cdot x-2) \\ &= x^3 + 2\cdot x^2 - 2\cdot x + x^2 + 2\cdot x - 2 \\ &= x^3 + 3\cdot x^2 - 2 = f(x) \end{aligned}$$

b. Étudions le signe du polynôme $x^2+2\cdot x-2$. Ce polynôme a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times 1\times(-2) = 4 + 8 = 12$$
On a la simplification suivante :

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\times 1} = \frac{2\cdot(-1-\sqrt{3})}{2} = -1-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\times 1} = \frac{2\cdot(-1+\sqrt{3})}{2} = -1+\sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x^2+2\cdot x-2$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2 a La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$f'(x) = 3x^2 + 3\cdot(2x) = 3\cdot x^2 + 6\cdot x$

b À l'aide de la factorisation suivante :

$f'(x) = 3\cdot x^2 + 6\cdot x = x\cdot(3\cdot x+6)$

Ainsi, la dérivée f' admet pour racine : -2 et 0.

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme permet d'obtenir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c On a les deux images suivantes :

- $f(-2) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 2 = -8+12-2 = 2$
- $f(0) = 0^3 + 3\times 0^2 - 2 = -2$

Le signe de la fonction dérivée f' permet de déterminer les variations de la fonction f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-∞		-2		0		$+\infty$
Variation de f		↗	2	↘	-2	↗	

C.21

1 a On a les transformations algébriques suivantes :

$(x+2)(-x^2+5\cdot x-1)$

$= -x^3 + 5\cdot x^2 - x - 2\cdot x^2 + 10\cdot x - 2$

$= -x^3 + 3\cdot x^2 + 9\cdot x - 2 = f(x)$

b Étudions le polynôme x^2-5x+1. Ce polynôme a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 5^2 - 4\times(-1)\times(-1) = 25-4 = 21$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-5-\sqrt{21}}{2\times(-1)} = \frac{-5-\sqrt{21}}{-2} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-5+\sqrt{21}}{2\times(-1)} = \frac{-5+\sqrt{21}}{-2} = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme est strictement positif. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+5x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2 a La fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :

$f'(x) = -(3x^2) + 3\cdot(2x) + 9 = -3x^2 + 6x + 9$

b L'expression de la fonction dérivée f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 6^2 - 4\cdot(-3)\cdot 9 = 36+108 = 144$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12$

Le discriminant du second degré est strictement positif ; ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6-12}{2\times(-3)} = \frac{-18}{-6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6+12}{2\times(-3)} = \frac{6}{-6} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c On a les deux suivantes images par la fonction f :

- $f(-1) = -(-1)^3 + 3\times(-1)^2 + 9\times(-1) - 2$
  $= 1+3-9-2 = -7$
- $f(3) = -3^3 + 3\times 3^2 + 9\times 3 - 2$
  $= -27+27+27-2 = 25$

Le signe de la fonction dérivée f' permet de déterminer le signe de variation de la fonction f :

x	-∞		-1		3		$+\infty$
Variation de f		↘	-7	↗	25	↘	

C.22

1 a On a le développement suivant :

$(x+5)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$
$= a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x+5a{\cdot}x^2+5b{\cdot}x+5c$
$= a{\cdot}x^3+(b+5a){\cdot}x^2+(c+5b){\cdot}x+5c$

En identifiant les coefficients de cette expression avec celle définissant la fonction f, on en déduit le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b+5a = 3 \\ c+5b = -9 \\ 5c = 5 \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces trois nombres ont pour valeur :
$a=1$; $b=-2$; $c=1$

On a ainsi l'identité :
$x^3+3{\cdot}x^2-9{\cdot}x+5=(x+5)(x^2-2x+1)$

(b) On remarque la factorisation suivante :
$f(x)=(x+5)(x^2-2{\cdot}x+1)=(x+5)(x-1)^2$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

(2) (a) La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x)=3{\cdot}x^2+3{\cdot}(2x)-9=3{\cdot}x^2+6{\cdot}x-9$

(b) Le polynôme du second degré définissant la fonction f' a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=6^2-4{\times}3{\times}(-9)=36+108=144$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{144}=12$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-6-12}{2{\times}3}=\frac{-18}{6}=-3$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-6+12}{2{\times}3}=\frac{6}{6}=1$$

Le coefficient du terme du second degré est strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) On a les deux images suivantes par la fonction f :

- $f(-3)=(-3)^3+3{\times}(-3)^2-9{\times}(-3)+5$
  $=-27+27+27+5=32$
- $f(1)=1^3+3{\times}1^2-9{\times}1+5$
  $=1+3{\times}1-9+5=1+3-9+5=0$

Le sens de variation de la fonction f est obtenu à l'aide du signe de sa fonction dérivée f' :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
Variation de f	$\nearrow$	32	$\searrow$ 0	$\nearrow$

C.23 Partie A

(1) L'expression de la fonction P est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+300$; $v(x)=x+100$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1$; $v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction P' dérivée de la fonction P :

$$P'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{1{\cdot}(x+100)-(x+300){\cdot}1}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x+100-x-300}{(x+100)^2}=\frac{-200}{(x+100)^2}$$

(2) Le quotient définissant l'expression de la fonction P' est strictement négatif sur $\big[100\,;+\infty\big[$.
On en déduit que la fonction P est strictement décroissante sur $\big[100\,;+\infty\big[$.

Partie B

(1) La fonction S est définie comme le produit de la fonction u et P où la fonction u est définie par :
$u(x)=x$; $u'(x)=1$
La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction S' dérivée de la fonction S :

$$S(x)=u'(x){\cdot}P(x)+u(x){\cdot}P'(x)$$

$$=1{\cdot}\frac{x+300}{x+100}+x{\cdot}\Big[-\frac{200}{(x+100)^2}\Big]=\frac{x+300}{x+100}-\frac{200{\cdot}x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{(x+300)(x+100)}{(x+100)^2}-\frac{200{\cdot}x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x^2+100{\cdot}x+300{\cdot}x+30\,000}{(x+100)^2}-\frac{200{\cdot}x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x^2+400{\cdot}x+30\,000}{(x+100)^2}-\frac{200{\cdot}x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x^2+400{\cdot}x+30\,000-200{\cdot}x}{(x+100)^2}=\frac{x^2+200{\cdot}x+30\,000}{(x+100)^2}$$

(2) On a les transformations algébriques suivantes :

$$x+200-20\,000{\times}\frac{1}{x+100}=x+200-\frac{20\,000}{x+100}$$

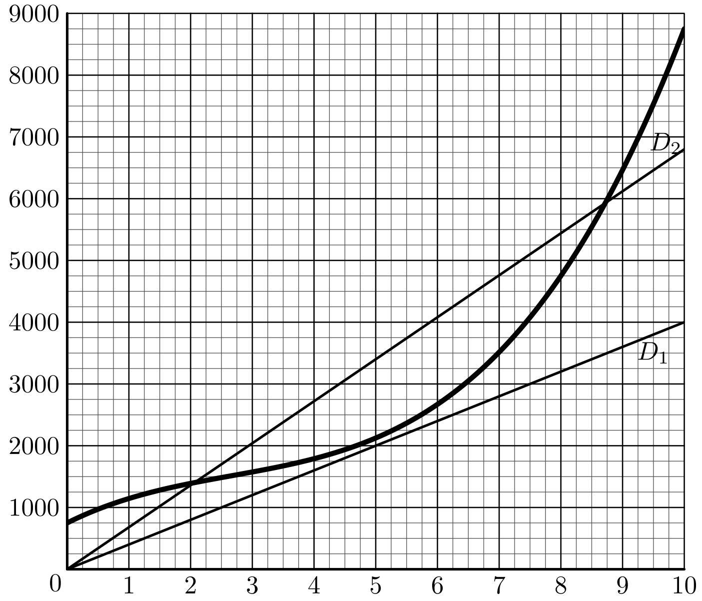
$$=\frac{(x+200)(x+100)}{x+100}-\frac{20\,000}{x+100}$$

$$=\frac{x^2+100{\cdot}x+200{\cdot}x+20\,000}{x+100}-\frac{20\,000}{x+100}$$

$$=\frac{x^2+300{\cdot}x+20\,000-20\,000}{x+100}=\frac{x^2+300{\cdot}x}{x+100}$$

$$=\frac{x{\cdot}(x+300)}{x+100}=x{\cdot}\frac{x+300}{x+100}=x{\cdot}P(x)$$

C.24 Partie A



1. En traçant la droite D_1, on observe que la courbe de la recette reste toujours inférieure au coût de production : aucun bénéfice ne sera réalisé.

2. a. Des bénéfices seront réalisés lorsque la courbe des coûts de production se situe sous la courbe des coûts des recettes.

   Ainsi, l'entreprise va réaliser des bénéfices lorsqu'il produira entre 2 et 8,75 kilomètre de tissu.

   b. La fonction B admet pour expression :

$$B(x) = 680{\cdot}x - C(x)$$
$$= 680{\cdot}x - \big(15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x + 750\big)$$
$$= 680{\cdot}x - 15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 - 500{\cdot}x - 750$$
$$= -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 750$$

   Ainsi, la fonction B admet pour dérivée la fonction B' dont l'expression est :

$$B'(x) = -15{\cdot}(3{\cdot}x^2) + 120{\cdot}(2{\cdot}x) + 180$$
$$= -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180$$

   c. Le polynôme du second degré définissant la fonction B' admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 240^2 - 4\times(-45)\times 180$$
$$= 57\,600 + 32\,400 = 90\,000$$

   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{90\,000} = 300$.

   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-240-300}{2\times(-45)} = \frac{-540}{-90} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-240+300}{2\times(-45)} = \frac{60}{-90} = -\frac{2}{3}$$

   Le coefficient du second degré étant strictement négatif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
$-45x^2+240x+180$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On a les images suivantes par la fonction B :

   - $B(0) = 680\times 0 - C(0) = -750$
   - $B(6) = 680\times 6 - \big(15\times 6^3 - 120\times 6^2 + 500\times 6 + 750\big)$
     $= 4080 - (3240 - 4320 + 3000 + 750)$
     $= 1410$
   - $B(10) = 680\times 10 - \big(15\times 10^3 - 120\times 10^2 + 500\times 10 + 750\big)$
     $= 6800 - 15000 + 12000 - 5000 - 750$
     $= -1950$

   On en déduit le tableau de signes de la fonction B' sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ ainsi que le sens de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

x	0		6		10
Signe de B'		$+$	0	-	
Variation de B	-750	$\nearrow$	1410	$\searrow$	-1950

Partie B

1. La fonction C_M admet pour expression :

$$C_M(x) = \frac{15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x + 750}{x}$$

   Ainsi, la fonction C_M est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x + 750 \quad ; \quad v(x) = x$$

   qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 45{\cdot}x^2 - 240{\cdot}x + 500 \quad ; \quad v'(x) = 1$$

   En utilisant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient l'expression de la fonction C'_M :

$$C'_M(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(45{\cdot}x^2-240{\cdot}x+500)\times x-(15{\cdot}x^3-120{\cdot}x^2+500{\cdot}x+750)\times 1}{x^2}$$
$$= \frac{45{\cdot}x^3 - 240{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x - 15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 - 500{\cdot}x - 750}{x^2}$$
$$= \frac{30{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 - 750}{x^2}$$

   Montrons que cette expression coïncide avec celle proposée :

$$\frac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} = \frac{(30{\cdot}x-150)(x^2+x+5)}{x^2}$$
$$= \frac{30{\cdot}x^3 + 30{\cdot}x^2 + 150{\cdot}x - 150{\cdot}x^2 - 150{\cdot}x - 750}{x^2}$$
$$= \frac{30{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 - 750}{x^2}$$
$$= C'_M(x)$$

2. a. Le polynôme x^2+x+5 admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4\times 1\times 5 = 1 - 20 = -19$$

   Le discriminant étant strictement négatif et son coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

   Les facteurs 30, x^2+x+5 et x^2 étant strictement positif, on en déduit que le signe de C'_M ne dépend que du signe du facteur $x-5$.

   Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant de la fonction C'_M qui permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction C_M :

x	0		5		10
Signe de C'_M	‖	-	0	+	
Variation de C_M	‖	↘	425	↗	875

(b) • D'après le tableau de variation, le coût moyen de production est minimum obtenu lorsque l'entreprise produit 5 kilomètres de tissu et vaut alors 425.
$C_M(5) = 425$

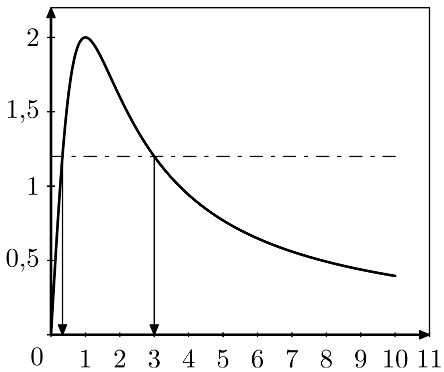
• Le coût total de production a alors pour valeur :
$$C(5) = 15\times5^3 - 120\times5^2 + 500\times5 + 750$$
$$= 1875 - 3000 + 2500 + 750 = 2125$$

C.25

(1) (a) Sur l'intervalle $[0\,;10]$:
- la fonction g est croissante sur $[0\,;1]$;
- la fonction g est décroissante sur $[1\,;10]$.

(b) La concentration maximale d'antibiotique est de $2\,{}^{mg}\!/\!_{\ell}$.
Remarque : elle est atteinte au bout d'une heure.

(c) Graphiquement, on peut dire que la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1{,}2\,{}^{mg}\!/\!_{\ell}$ est réalisée sur l'intervalle $[0{,}2\,;3]$:



(2) (a) L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 4{\cdot}t \quad ; \quad v(x) = x^2+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 4 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{4{\cdot}(x^2+1) - (4{\cdot}x){\cdot}(2{\cdot}x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4{\cdot}x^2+4-8{\cdot}x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-4{\cdot}x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{4{\cdot}(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

(b) La fonction g étant dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$, elle est continue et les abscisses x de ses extrémums vérifient :
$$g'(t) = 0$$
$$\frac{4{\cdot}(1-t^2)}{(t^2+1)^2} = 0$$
Si Un quotient est nul alors son numérateur est nul :
$$4{\cdot}(1-t^2) = 0$$
Si un produit est nul alors un de ses facteurs est nul :
$$1-t^2 = 0$$
$$(1+t)(1-t) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$1+t=0$	$1-t=0$
$t=-1$	$t=1$

Ainsi, sur l'intervalle $[0\,;10]$, la concentration atteindra un unique extrémum au bout d'1 heure. D'après les variations obtenues à la question (1)(a), la concentration est maximale au bout d'une heure.

C.26

(1) En notant x l'abscisse du point M, la longueur du rectangle $OPMN$ a pour valeur :
$OP = x$

Le point M appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ et a pour coordonnée :
$$M(x\,;f(x)) = \Big(x\,;\frac{x+1}{3x-2}\Big)$$
Ainsi, le rectangle $OPMN$ a pour largeur :
$$ON = \frac{x+1}{3x-2}$$
Ainsi, le rectangle $OPMN$ a pour aire :
$$\mathcal{A}(x) = ON\times OP = \frac{x+1}{3x-2}\times x = \frac{x^2+x}{3x-2}$$

(2) La fonction $\mathcal{A}$ associant à chaque nombre x l'aire du rectangle $OPMN$ a son expression définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x^2+x \quad ; \quad v(x) = 3x-2$
qui admettent pour dérivée :
$u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v'(x) = 3$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$:
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(2x+1){\cdot}(3x-2) - (x^2+x){\cdot}3}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{(6x^2-4x+3x-2) - (3x^2+3x)}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{6x^2-x-2-3x^2-3x}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2-4x-2}{(3x-2)^2}$$

(3) Le dénominateur de la fonction $\mathcal{A}'$ est positif sur $\Big[\frac{2}{3}\,;+\infty\Big[$. Le signe de $\mathcal{A}'$ ne dépend que de son numérateur.

Étudions le polynôme du second degré $3x^2-4x-2$ qui admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-4)^2 - 4\times3\times(-2) = 16+24 = 40$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = \sqrt{4\times10} = 2\sqrt{10}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-4)-2\sqrt{10}}{2\times 3} = \frac{4-2\sqrt{10}}{6} = \frac{2{\cdot}(2-\sqrt{10})}{2\times 3} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-4)+2\sqrt{10}}{2\times 3} = \frac{4+2\sqrt{10}}{6} = \frac{2{\cdot}(2+\sqrt{10})}{2\times 3} = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, ce polynôme admet le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x-2$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	

On obtient l tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$

x	$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

4 À l'aide du tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$, on en déduit que l'aire minimale du rectangle $OPMN$ est atteinte lorsque le point M a pour abscisse $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$