Première Spécialité - Chapitre 5

E.1 Soit f une fonction f définie sur $\left[-4\,;4\right[$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-4		-2		-1		4
Variation de f	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1 ‖

Déterminer le signe du nombre dérivé de la fonction f en 1.

E.2 On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de signes de sa fonction dérivée :

x	-5		-2		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Quel est le sens de variation de la tangente (T)?

E.3 On considère une fonction f définie sur $\left[-3\,;5\right]$ dont la dérivée admet le tableau de signes suivant :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f							

On a les valeurs et relations suivantes :

- $f(-1)=3$
- $f(5)=-2{\cdot}f(-1)$
- $f(-3)=f(5)+5$
- $f(2)=f(-1){\cdot}f(5)$

Dans le tableau précédent, compléter la ligne des variations de la fonction f.

E.4 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la formule :
$f(x)=x^3-6{\cdot}x^2+9{\cdot}x+3$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Établir le tableau de signes de la fonction f'.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.5 Chacune des fonctions ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de chacune de ces fonctions :

1. $f(x)=x^3-9{\cdot}x^2+15{\cdot}x-7$
2. $g(x)=-x^3-3{\cdot}x^2-3{\cdot}x+3$
3. $h(x)=-\dfrac{1}{3}{\cdot}x^3+\dfrac{1}{2}{\cdot}x^2-\dfrac{1}{2}{\cdot}x-1$

(on indiquera dans le tableau de variations les valeurs des extrémums locaux)

E.6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=-2{\cdot}x^3-4{\cdot}x^2+8{\cdot}x+1$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2 Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Indication : on n'indiquera pas les valeurs dans le tableau de variation

E.7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} - 5$$

1 Établir que la fonction f admet pour fonction dérivée, la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{(2{\cdot}x+1)(2{\cdot}x-1)}{x^2}$

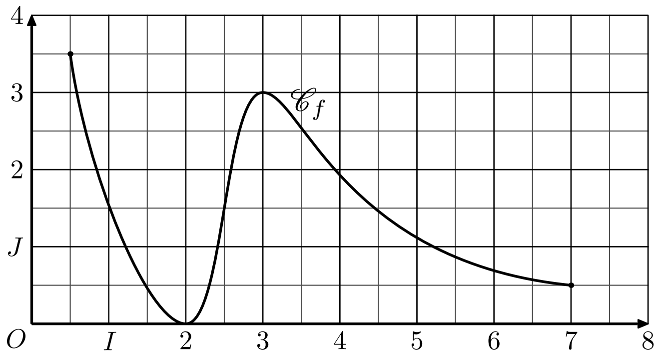
2 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3 a Dresser le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}^*$.

b En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

E.8

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ donné ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $[0{,}5\,;7]$:



Sans justification, dresser le tableau de signes de la fonction f' dérivée de la fonction f

E.9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f(x) = (5x^2 + 5x - 4)\cdot\sqrt{x}$$

1 Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{25{\cdot}x^2 + 15{\cdot}x - 4}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

2 Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 En admettant les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x^2 - x)\cdot\sqrt{x}$$

1 Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{5{\cdot}x^2 - 3x}{2{\cdot}\sqrt{x}}$

2 Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

3 a Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

b Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

E.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (3{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x)\cdot\sqrt{x}$$

1 Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{15x \cdot (x-1)}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

(2) Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(3) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

E.12 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{2x^2 - 2x + 3}$

(1) Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.

Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

(2) Établir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-6x + 3}{\left(2x^2 - 2x + 3\right)^2}$

(3) (a) Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admettra les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

(4) En déduire les extrémums de la fonction f.

E.13 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x + 1}$$

(1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Établir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante : $f'(x) = \dfrac{7x^2 + 14x}{\left(2x^2 + x + 1\right)^2}$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admet les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$

(3) En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

E.14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 1}$$

(1) (a) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

(b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admettra les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$

(3) La fonction f admet-elle des extrémums? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

E.15 Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par :
$C(x) = x^3 - 30 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 100$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

(1) On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;25]$ est :
$B(x) = -x^3 + 30 \cdot x^2 - 153 \cdot x - 100$

(2) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;25]$.

(3) Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		$+\infty$
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;25]$.
5. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

E.16 Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :
$C(x) = 15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 350{\cdot}x + 1\,000$

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.
Pour tout $x \in [0\,;10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;10]$:
   $B(x) = -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 1\,000$
3. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0\,;10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
5. a. Pour quelle longueur de tissu produite et vendue l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal?
   b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal?

E.17

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication de x tonnes, en euros, est modélisé par la fonction C définie par :
$C(x) = x^3 - 105{\cdot}x^2 + 3700{\cdot}x + 4000$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;80]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;80]$, donner l'expression de $R(x)$.
   b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;80]$ par :
   $B(x) = -x^3 + 105{\cdot}x^2 - 1800{\cdot}x - 4000$
2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;80]$.
5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
   Que vaut ce bénéfice?

E.18

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, on a l'information : $f(2)=0$.

   Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée g' vérifiant :
   Pour tout réel x, on a : $g'(x)<0$
   De plus, on sait que : $g(-3)=0$.

   Dresser le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

E.19 Le tableau ci-dessous représente le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-4	-2	-1	2	$+\infty$
Signe de f'						
Variation de f	1	5	0	-2	$-\frac{1}{2}$	-3
Signes de f						

Compléter les lignes du signe de la fonction f' et du signe de la fonction f.

E.20 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x^2 - 2$

1. (a) Établir l'égalité : $f(x)=\big(x+1\big)\big(x^2+2{\cdot}x-2\big)$
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. (a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux).*

E.21 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = -x^3 + 3{\cdot}x^2 + 9{\cdot}x - 2$

1. (a) Établir l'égalité : $f(x)=(x+2)(-x^2+5{\cdot}x-1)$
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. (a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.22 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 5$

1. (a) Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'égalité : $f(x)=(x+5)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. (a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.23 Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x\in\big[100\,;+\infty\big[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300{\times}1{,}5=450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Étude du prix P proposé par le fournisseur.

1. Montrer que : $P'(x)=\dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $\big[100\,;+\infty\big[$.
2. Donner le sens de variations de la fonction P sur $\big[100\,;+\infty\big[$.

Partie B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits *(ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).*

Cette somme est donc égale à :
$S(x) = x \cdot P(x)$ pour $x \in [100\,;+\infty[$.

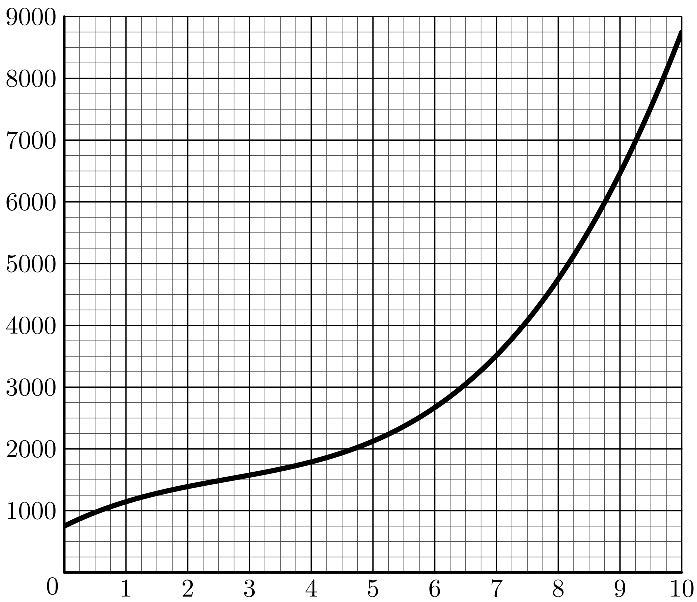
(1) Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:
$$S'(x) = \frac{x^2 + 200\cdot x + 30\,000}{(x+100)^2}$$

(2) Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:
$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x+100}$$

E.24 L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :
$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p\cdot x$.

(1) Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :
$y = 400\cdot x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

(2) Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

(a) Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
$y = 680\cdot x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

(b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10[$ par :
$B(x) = 680\cdot x - C(x)$
Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, on a :
$B'(x) = -45\cdot x^2 + 240\cdot x + 180$

(c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, on a : $C'_M(x) = \dfrac{30\cdot(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

E.25 Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

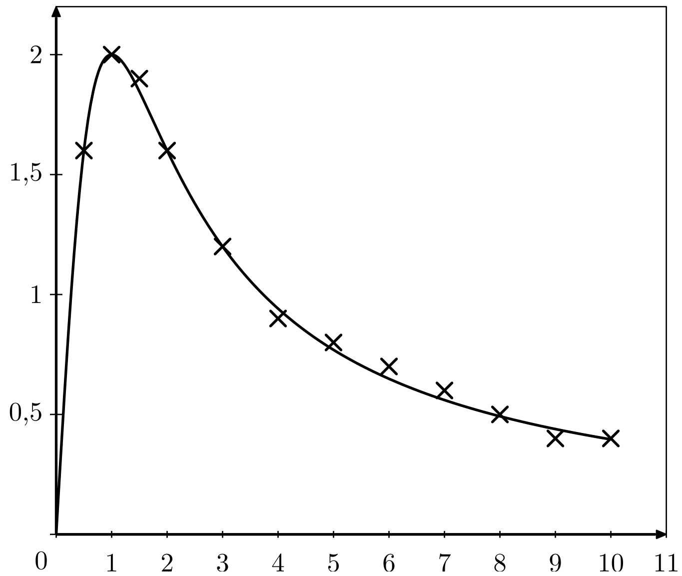
Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en $^{mg}/_{\ell}$	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$g(t) = \frac{4\cdot t}{t^2+1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en $^{mg}/_{\ell}$ de l'antibiotique.

Le graphique ci-dessous représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique, donner sans justification :

   a. les variations de la fonction g sur $[0\,;10]$;

   b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;

   c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1{,}2\,^{mg}/_{\ell}$.

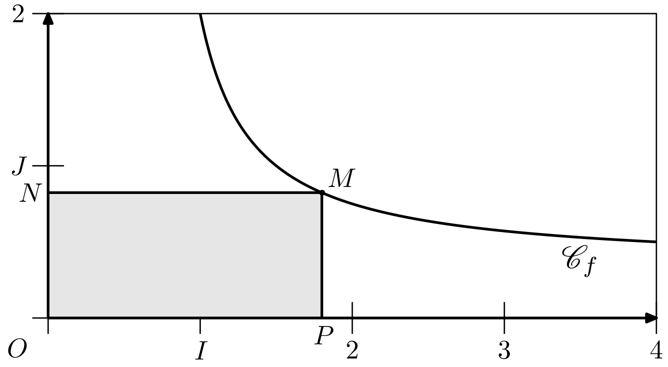
2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et sa dérivée est g'.
   Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4\cdot\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$

   b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

E.26 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$$

La représentation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.
3. Établir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.