# Première Spécialité - Chapitre 4

**C.1**

1. La fonction $f$ admet pour fonction dérivée :
$$f'(x) = 5\times 2x + 2\times 1 + 0$$
$$= 10x + 2$$

2. La fonction $g$ admet pour fonction dérivée :
$$g'(x) = 3\times 4x^3 - 5\times 1 + 0$$
$$= 12x^3 - 5$$

3. La fonction $h$ admet pour fonction dérivée :
$$h'(x) = 0 - 3\times 2x$$
$$= -6x$$

4. La fonction $j$ admet pour fonction dérivée :
$$j'(x) = 3\times 2x - 1 + 0$$
$$= 6x - 1$$

**C.2**

1. La fonction $f$ est une fonction polynôme qui admet pour dérivée :
$$f'(x) = \big(5{\cdot}x^4\big) + 3{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) - 1 + 0$$
$$= 5{\cdot}x^4 + 6{\cdot}x - 1$$

2. La fonction $f$ est une fonction polynomiale qui admet pour dérivée :
$$f'(x) = 2{\cdot}\big(7{\cdot}x^6\big) - \big(2{\cdot}x\big) - 2 + 0$$
$$= 14{\cdot}x^6 - 2{\cdot}x - 2$$

**C.3**

1. La fonction dérivée de la fonction $f$ est :
$$f'(x) = 2$$
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction $f$ en 1 :
$$f'(1) = 2$$

2. La fonction dérivée de la fonction $g$ est :
$$g'(x) = -3$$
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction $g$ en 1 :
$$g'(1) = -3$$

3. La fonction dérivée de la fonction $k$ est :
$$k'(x) = 4x^3 + 2x$$
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction $k$ en 1 :
$$k'(1) = 4\times 1^3 + 2\times 1 = 4 + 2 = 6$$

4. La fonction dérivée de la fonction $\ell$ est :
$$\ell'(x) = 2\times 4x^3 - 2\times 3x^2 - 8 = 8x^3 - 6x^2 - 8$$
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction $\ell$ en 1 :
$$\ell'(1) = 8\times 1^3 - 6\times 1 - 8 = 8 - 6 - 8 = -6$$

**C.4** La dérivée $f'$ de la fonction $f$ a pour expression :
$$f'(x) = \frac{5}{3}{\cdot}(3{\cdot}x^2) - \frac{2}{3}{\cdot}(2{\cdot}x) + 3\times 1 = 5{\cdot}x^2 - \frac{4}{3}{\cdot}x + 3$$

**C.5**

1. La dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :
$$f'(x) = -3 + 0$$

2. La dérivée de la fonction $g$ admet pour expression :
$$g'(x) = 4\times(2x) + 0 = 8{\cdot}x$$

3. La dérivée de la fonction $h$ a pour expression :
$$h(x) = 2\times(2{\cdot}x) + 3 = 4{\cdot}x + 3$$

4. La dérivée de la fonction $j$ admet pour expression :
$$j'(x) = 5\times(3{\cdot}x^2) - 2\times(2{\cdot}x) = 15{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x$$

**C.6**

1. La fonction $f$ admet pour expression :
$$f'(x) = 3 + 0 = 3$$

2. La fonction $g$ admet pour expression :
$$g'(x) = 2x + 0 = 2x$$

3. La fonction $h$ admet pour expression :
$$h'(x) = 2x + 1$$

4. La fonction $j$ admet pour expression :
$$j'(x) = 3x^2 + 2{\cdot}(2x) = 3x^2 + 4x$$

**C.7**

1. La fonction $f$ admet pour dérivée la fonction $f'$ dont l'expression :
$$f'(x) = 3{\cdot}(2{\cdot}x) - 4\times 1 = 6{\cdot}x - 4$$

2. La dérivée de la fonction $g$ admet pour expression :
$$g'(x) = 5{\cdot}(6{\cdot}x^5) - 3{\cdot}(3{\cdot}x^2) = 30{\cdot}x^5 - 9{\cdot}x^2$$

3. La fonction $h'$ admet pour expression :
$$h'(x) = 3\times(2x) + 5\times 1 = 6x + 5$$

4. La fonction $j$ admet pour expression :
$$j(x) = \frac{8{\cdot}x^3 - 2{\cdot}x^2}{x} = 8{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x = 8\times x^2 - 2\times x$$
La fonction $j'$ admet pour expression :
$$j'(x) = 8\times(2x) - 2\times 1 = 16{\cdot}x - 2$$

**C.8**

1. La fonction $f'$ a pour expression :
$$f'(x) = 1{,}5{\cdot}\big(3{\cdot}x^2\big) - 9{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) + 24 = 4{,}5{\cdot}x^2 - 18{\cdot}x + 24$$

2. La fonction $f''$ a pour expression :
$$f''(x) = 4{,}5{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) - 18 = 9{\cdot}x - 18$$

**C.9**

1. La fonction dérivée de la fonction $h$ est :
$$h'(x) = 2\times 2x = 4x$$
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction $h$ en 1 :
$$h'(1) = 4\times 1$$

2. La fonction dérivée de la fonction $j$ est :
$$j'(x) = 5 - 3\times 2x = -6x + 5$$
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction $j$ en 1 :
$$j'(1) = -6\times 1 + 5$$

3. La dérivée de la fonction $k$ admet pour expression :
$$k'(x) = -2\times(2{\cdot}x) + 2 = -4{\cdot}x + 2$$

4. La fonction $k$ admet pour expression :
$$k'(x) = 3{\cdot}(2x) - 2 = 6x - 2$$

**C.10**

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$f(x) = (3{\cdot}x+11)(4-x) = 12x - 3{\cdot}x^2 + 44 - 11x$

$= -3{\cdot}x^2 + x + 44$

Cette expression de la fonction sous la forme d'une somme permet d'obtenir facilement l'expression de sa fonction dérivée :

Ainsi, la dérivée de la fonction $f$ est :

$f'(x) = -3\times 2{\cdot}x + 1 = -6{\cdot}x + 1$

2. On a le développement suivant :

$g(x) = (x+1)(2{\cdot}x-4) = 2x^2 - 4{\cdot}x + 2{\cdot}x - 4$

$= 2x^2 - 2{\cdot}x - 4$

L'expression de la fonction $g$ sous la forme d'une expression permet d'obtenir facilement l'expression de sa dérivée :

$g'(x) = 4{\cdot}x - 2$

## C.11

1. La fonction $f$ a pour expression :

$f(x) = 3\times x^2$

Ainsi, la fonction $f'$ admet pour expression :

$f'(x) = 3\times(2x) = 6{\cdot}x$

2. La fonction $g$ a pour expression :

$$g(x) = \frac{1}{12}x^6 = \frac{1}{12}\times x^6$$

Ainsi, la fonction $g'$ admet pour expression :

$$g'(x) = \frac{1}{12}\times(6{\cdot}x^5) = \frac{1}{2}{\cdot}x^5$$

3. La fonction $h$ a pour expression :

$h(x) = 4\sqrt{x} = 4\times\sqrt{x}$

Ainsi, la fonction $h'$ admet pour expression :

$$h'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

4. La fonction $j$ a pour expression :

$$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}\times\sqrt{x}$$

Ainsi, la fonction $j'$ admet pour expression :

$$j'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

5. La fonction $k$ a pour expression :

$$k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction $k'$ admet pour expression :

$$k'(x) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$$

6. La fonction $\ell$ a pour expression :

$$l(x) = -\frac{2}{x} = -2\times\frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction $\ell'$ admet pour expression :

$$\ell'(x) = -2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$$

## C.12

1. La fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2{\cdot}x = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2{\cdot}x){\cdot}x^2}{x^2} = \frac{-1-2{\cdot}x^3}{x^2}$$

2. La fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :

$$f'(x) = 1 + 2{\cdot}x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2} + \frac{(2{\cdot}x){\cdot}x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2{\cdot}x^3 - 1}{x^2} = \frac{2{\cdot}x^3 + x^2 - 1}{x^2}$$

3. La fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :

$$f'(x) = 2{\cdot}x + \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{(2{\cdot}x){\cdot}(2{\cdot}\sqrt{x})}{2{\cdot}\sqrt{x}} + \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{4{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}+1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

## C.13

1. On a :

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{x^2-1}{x^2}$$

2. On a :

$$g'(x) = \frac{2}{3}{\cdot}3{\cdot}x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2{\cdot}x^2 - \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{4{\cdot}x^2\sqrt{x} - 1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

3. On a :

$$h'(x) = 3{\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} - 2\times 4{\cdot}x^3 = \frac{3}{2{\cdot}\sqrt{x}} - 8x^3$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{3 - 16{\cdot}x^3{\cdot}\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

4. On a la simplification :

$$j(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} = 2{\cdot}\frac{1}{x}$$

On a :

$$j'(x) = 2{\cdot}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

## C.14

1. Pour $f(x)=x-2\sqrt{x}$, on a :

$$f'(x) = 1 - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

2. La fonction dérivée de $g(x)=2\times\frac{1}{x}$ est :

$$g'(x) = 2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

3. Soit $h(x)=\frac{-5}{x}+\sqrt{x}$, la fonction dérivée de $h$ est :

$$h'(x) = -5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{10}{2x^2} + \frac{x\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{10+x\sqrt{x}}{2x^2}$$

4. On considère la fonction $k$ définie par : $k(x)=x^2-\frac{1}{x}$.

Sa fonction dérivée est :

$$k'(x) = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

## C.15

1. La dérivée de la fonction $f$ a pour expression :

$$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

2. La fonction $g$ admet pour expression :
$g(x) = 2\cdot\sqrt{x} = 2\times\sqrt{x}$

Ainsi, sa dérivée $g'$ admet pour expression :
$g'(x) = 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. La fonction $h$ admet pour expression :
$h(x) = \frac{3}{x} - 2\cdot\sqrt{x} = 3\times\frac{1}{x} - 2\times\sqrt{x}$

Ainsi, sa dérivée $h'$ admet pour expression :
$h'(x) = 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= -\frac{3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3\sqrt{x}-x^2}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}+x^2}{x^2\sqrt{x}}$$

4. La fonction $j$ admet pour expression :
$j(x) = 2\cdot x^3 + \frac{2}{x} = 2\times x^3 + 2\times\frac{1}{x}$

Ainsi, sa dérivée $j'$ admet pour expression :
$j'(x) = 2\times(3x^2) + 2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 6\cdot x^2 - \frac{2}{x^2}$

$$= \frac{6\cdot x^4}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{6\cdot x^4 - 2}{x^2}$$

## C.16

1. La fonction $f$ admet la fonction $f'$ pour dérivée dont l'expression est :
$f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

2. La fonction $g$ admet pour expression :
$g(x) = \frac{3}{x} + 2\cdot\sqrt{x} = 3\times\frac{1}{x} + 2\times\sqrt{x}$

La fonction $g'$ admet pour expression :
$g'(x) = 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{-3\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}} + \frac{x^2}{x^2\cdot\sqrt{x}} = \frac{x^2-3\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}$$

Il est également possible d'exprimer la fonction $g'$ de la manière suivante :
$$g'(x) = \frac{x^2-3\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}} = \frac{\left(x^2-3\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}}{\left(x^2\cdot\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}} = \frac{x^2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2}{x^2\cdot x}$$

$$= \frac{x^2\cdot\sqrt{x}-3\cdot x}{x^3} = \frac{x\cdot\left(x\cdot\sqrt{x}-3\right)}{x^3} = \frac{x\cdot\sqrt{x}-3}{x^2}$$

3. La fonction $h$ admet pour expression :
$h(x) = 5\cdot x^3 - \frac{3}{x} = 5\times x^3 - 3\times\frac{1}{x}$

La fonction $h'$ admet pour expression :
$h'(x) = 5\times(3x^2) - 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 15\cdot x^2 + \frac{3}{x^2}$

$$= \frac{15\cdot x^4}{x^2} + \frac{3}{x^2} = \frac{15\cdot x^4+3}{x^2}$$

## C.17

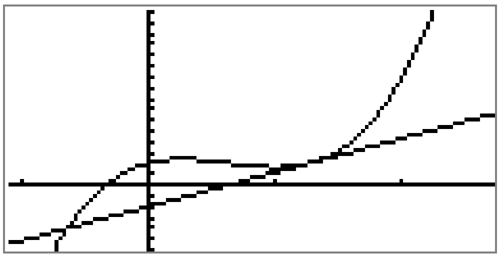
1. a. La fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(3\cdot x^2) - \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x) + 1 = \frac{3}{2}\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$$

b. On en déduit le nombre dérivé en 2 de la fonction $f$ :
$$f'(2) = \frac{3}{2}\times 2^2 - 3\times 2 + 1 = 6 - 6 + 1 = 1$$

2. a. Le point de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2 a pour coordonnées $(2\,;f(2))$.
Déterminons l'image du nombre 2 par la fonction $f$ :
$f(2) = \frac{1}{2}\times 2^3 - \frac{3}{2}\times 2^2 + 2 + 1 = 4 - 6 + 2 + 1 = 1$
Ainsi, le point $A$ a pour coordonnées $A(2\,;1)$.

b. La formule donnant l'équation réduite d'une tangente permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente $(T)$ :
$y = f'(2)\cdot(x-2) + f(2)$
$y = 1\cdot(x-2) + 1$
$y = x - 2 + 1$
$y = x - 1$

3. Voici la représentation des deux courbes de ces fonctions à l'aide d'une calculatrice :



## C.18

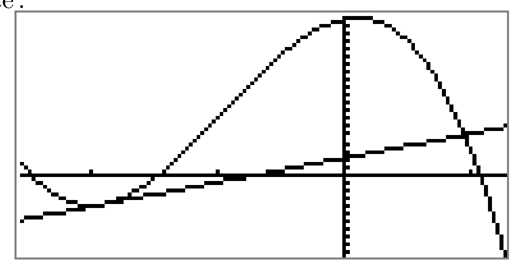
1. a. La fonction $f'$ admet pour expression :
$f'(x) = -\frac{2}{3}\cdot(3\cdot x^2) - 3\cdot(2\cdot x) + 1 = -2\cdot x^2 - 6\cdot x + 1$

b. Le nombre dérivé de la fonction $f$ en $-3$ a pour valeur :
$f'(-3) = -2\cdot(-3)^2 - 6\cdot(-3) + 1 = -18 + 18 + 1 = 1$

2. a. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point ayant $-3$ pour abscisse. celui-ci a pour coordonnées : $(-3\,;f(-3))$
Pour donner ses coordonnées, déterminons l'image du nombre $-3$ par la fonction $f$ :
$f(-3) = -\frac{2}{3}\cdot(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 + (-3) + 10$
$= 18 - 27 - 3 + 10 = -2$
Le point $A$ a pour coordonnées : $A(-3\,;-2)$

b. D'après la formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe, on a l'équation réduite de la tangente $(T)$ au point d'abscisse $-3$ :
$y = f'(-3)\cdot\left[x-(-3)\right] + f(-3)$
$y = 1\cdot(x+3) + (-2)$
$y = x + 3 - 2$
$y = x + 1$

3. Voici la représentation obtenue à l'aide d'une calculatrice :



## C.19

1. a. La fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet l'expression :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^2 - 2x + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + \frac{5}{2}$$

(b) Le nombre dérivé de la fonction $f$ au point d'abscisse $-2$ a pour valeur :

$$f'(-2) = -\frac{3}{2}\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) + \frac{5}{2}$$
$$= -\frac{3}{2}\times 4 + 4 + \frac{5}{2} = -6 + 4 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) (a) L'image du nombre 2 par la fonction $f$ a pour valeur :

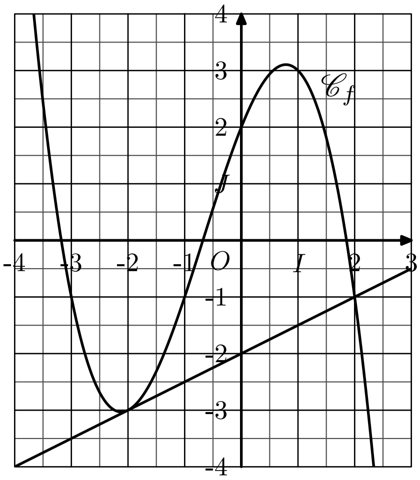
$$f(-2) = -\frac{1}{2}\cdot(-2)^3 - (-2)^2 + \frac{5}{2}\cdot(-2) + 2$$
$$= -\frac{1}{2}\times(-8) - 4 - 5 + 2 = 4 - 4 - 5 + 2 = -3$$

Ainsi, le point de coordonnées $(-2\,;-3)$ est le point de contact de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente $(T)$ :

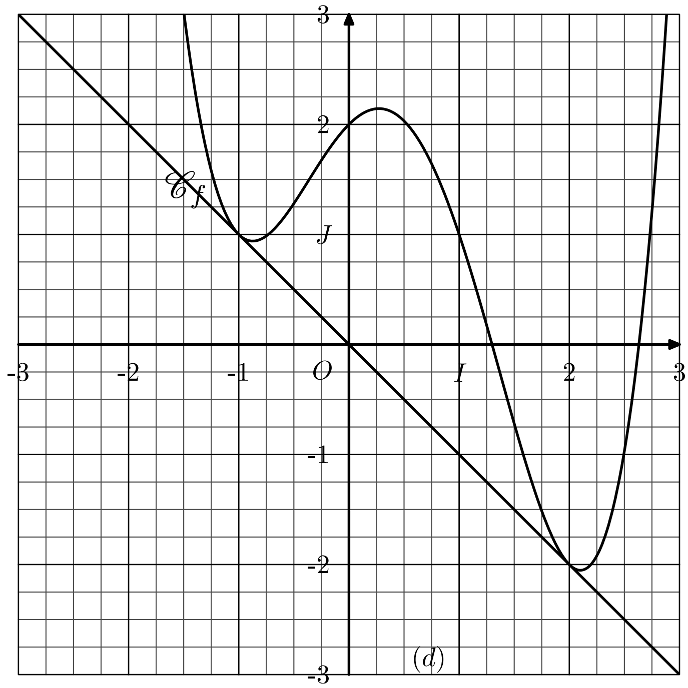
$$y = f'(-2)\cdot\big[x - (-2)\big] + f(-2)$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot\big(x + 2\big) - 3$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot x + 1 - 3$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot x - 2$$

(b) On a le tracé suivant :




C.20

(1) (a) Voici la représentation de la droite $(d)$ :




(b) Il semble que la droite $(d)$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse $-1$ et 2.

(2) Les points d'abscisses $-1$ et 2 de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées :

- $f(-1) = \frac{1}{2}\cdot x^4 - x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 2$
  $= \frac{1}{2}\times 1^4 - 1^3 - \frac{3}{2}\times 1^2 + 1 + 2$
  $= \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} + 1 + 2 = -1 - 1 + 1 + 2 = 1$
  On en déduit : $(-1\,;1)\in\mathscr{C}_f$
- $f(2) = \frac{1}{2}\times 2^4 - 2^3 - \frac{3}{2}\times 2^2 + 2 + 2$
  $= \frac{1}{2}\times 16 - 8 - \frac{3}{2}\times 4 + 2 + 2$
  $= 8 - 8 - 6 + 2 + 2 = -2$
  On en déduit : $(2\,;-2)\in\mathscr{C}_f$

Montrons que la droite $(d)$ passe par ces deux points :

- $y = -(-1) = 1 \implies (-1\,;1)\in(d)$
- $y = -2 \implies (2\,;-2)\in(d)$

La droite $(d)$ a pour coefficient directeur $-1$ ; pour montrer que la droite $(d)$ est tangente aux points d'abscisse $-1$ et 2, il faut que les nombres dérivés de la fonction $f$ en $-1$ et 2 vaille $-1$.

La fonction $f$ admet pour fonction dérivée la fonction $f$ dont l'expression est :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(4\cdot x^3) - 3\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x) + 1$$
$$= 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$$

On a les valeurs des nombres dérivés :

- $f'(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) + 1$
  $= -2 - 3 + 3 + 1 = -1$
- $f'(2) = 2\times 2^3 - 3\times 2^2 - 3\times 2 + 1$
  $= 2\times 8 - 3\times 4 - 3\times 2 + 1$
  $= 16 - 12 - 6 + 1 = -1$

On en déduit que la droite $(d)$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse $-1$ et 2.

C.21

1. La fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :
$f'(x)=2{\cdot}x-6$

2. La droite $(d)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

L'image du nombre 2 par la fonction $f$ a pour valeur :
$f(2)=2^2-6{\times}2+5=4-12+5=-3$
Ainsi, la droite $(d)$ doit passer par le point de coordonnées $(2\,;-3)$

Le nombre dérivé de la fonction $f$ en 2 a pour valeur :
$f'(2)=2{\times}2-6=-2$

Ainsi, la droite $(d)$ a son expression de la forme :
$y=-2{\cdot}x+b$ où $b$ est un nombre réel

Le couple $(2\,;-3)$ doit vérifier cette équation :
$$-3=-2{\times}2+b$$
$$b=-3+4$$
$$b=1$$
L'équation de la droite $(d)$ est : $y=-2{\cdot}x+1$

3. La droite $(\Delta)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.

L'image du nombre 5 par la fonction $f$ a pour valeur :
$f(5)=5^2-6{\times}5+5=25-30+5=0$
Ainsi, la droite $(d)$ doit passer par le point de coordonnées $(5\,;0)$

Le nombre dérivé de la fonction $f$ en 2 a pour valeur :
$f'(5)=2{\times}5-6=4$

Ainsi, la droite $(d)$ a son expression de la forme :
$y=4x+b$

Le couple $(5\,;0)$ doit vérifier cette équation :
$$0=4{\times}5+b$$
$$b=-20$$
L'équation de la droite $(d)$ est : $y=4{\cdot}x-20$

4. Les deux droites s'interceptent en un point dont l'abscisse vérifie l'équation :
$$-2{\cdot}x+1=4{\cdot}x-20$$
$$-2{\cdot}x-4{\cdot}x=-20-1$$
$$-6{\cdot}x=-21$$
$$x=\frac{-21}{-6}$$
$$x=\frac{7}{2}$$
En utilisant la droite $(\Delta)$, l'ordonnée du point d'abscisse $\frac{7}{2}$ vaut :
$$y=4{\cdot}x-20=4{\times}\frac{7}{2}-20=14-20=-6$$
Ainsi, le point d'intersection des droites $(d)$ et $(\Delta)$ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2}\,;-6\right)$

C.22

1. a. La fonction $f$ est une fonction polynomiale qui admet pour dérivée la fonction $f'$ dont l'expression est :
$$f'(x)=3{\cdot}x^2-2{\cdot}\big(2{\cdot}x\big)+3$$
$$=3{\cdot}x^2-4{\cdot}x+3$$

b. On a l'image et le nombre dérivé de 1 par la fonction $f$ :
- $f(1)=1^3-2{\times}1^2+3{\times}1-2=1-2+3-2=0$
- $f'(1)=3{\times}1^2-4{\times}1+3=3-4+3=2$

La formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 :
$$y=f'(1){\cdot}\big(x-1\big)+f(1)$$
$$y=2{\cdot}\big(x-1\big)$$
$$y=2{\cdot}x-2$$

2. a. On remarque la factorisation :
$x{\cdot}\big(x^2-2{\cdot}x+1\big)=x{\cdot}\big(x-1\big)^2$
On a le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\big(x-1\big)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $x{\cdot}\big(x-1\big)^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

b. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $(T)$, résolvons l'inéquation :
$$f(x)\leqslant 2{\cdot}x-2$$
$$x^3-2{\cdot}x^2+3{\cdot}x-2\leqslant 2{\cdot}x-2$$
$$x^3-2{\cdot}x^2+3{\cdot}x-2-2{\cdot}x+2\leqslant 0$$
$$x^3-2{\cdot}x^2+x\leqslant 0$$
$$x{\cdot}\big(x^2-2{\cdot}x+1\big)\leqslant 0$$
D'après la question précédente, on en déduit que cette inéquation admet pour ensemble de solutions $\big]-\infty\,;0\big]$.
On conclut ainsi :
- la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la tangente $(T)$ sur $\big]-\infty\,;0\big]$ ;
- la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la tangente $(T)$ sur $\big[0\,;+\infty\big[$ ;

C.23

1. a. La fonction $f$ est une fonction polynomiale qui admet pour dérivée :
$$f'(x)=2{\cdot}\big(3{\cdot}x^2\big)-4{\cdot}\big(2{\cdot}x\big)+0$$
$$=6{\cdot}x^2-8{\cdot}x$$

b. On a l'image et le nombre dérivé du nombre 1 par la fonction $f$ :
- $f(1)=2{\times}1^3-4{\times}1^2+1=2-4+1=-1$
- $f'(1)=6{\times}1^2-8{\times}1=6-8=-2$

c. La formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente $(T)$ :
$$y=f'(1){\cdot}\big(x-1\big)+f(1)$$
$$y=-2{\cdot}\big(x-1\big)+(-1)$$
$$y=-2{\cdot}x+2-1$$
$$y=-2{\cdot}x+1$$

2. a. On a la factorisation :
$2{\cdot}x{\cdot}\big(x^2-2{\cdot}x+1\big)=2{\cdot}x{\cdot}\big(x-1\big)^2$
On en déduit le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2{\cdot}x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-1)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $2{\cdot}x{\cdot}(x-1)^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

b) Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $(T)$, résolvons l'inéquation :

$$f(x) \leqslant 2{\cdot}x - 2$$
$$2{\cdot}x^3 - 4{\cdot}x^2 + 1 \leqslant -2{\cdot}x + 1$$
$$2{\cdot}x^3 - 4{\cdot}x^2 + 1 + 2{\cdot}x - 1 \leqslant 0$$
$$2{\cdot}x^3 - 4{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x \leqslant 0$$
$$2{\cdot}x{\cdot}\big(x^2 - 2{\cdot}x + 1\big) \leqslant 0$$

D'après la question précédente, on en déduit que cette inéquation admet pour ensemble de solutions $\big]-\infty\,;0\big]$. On conclut ainsi :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la tangente $(T)$ sur $\big]-\infty\,;0\big]$ ;
- la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la tangente $(T)$ sur $\big]-\infty\,;0\big]$ ;

## C.24

1) L'expression de la fonction $f$ étant donnée sous la forme d'une somme, on en déduit facilement l'expression de sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{8}\times(3x^2) - \frac{1}{2}\times(2x) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{8}{\cdot}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

2) a) Le coefficient directeur de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $2$ est la valeur du nombre dérivée de la fonction $f$ en $2$ :

$$f'(2) = \frac{3}{8}\times2^2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

b) La droite $(T)$ ayant pour coefficient directeur, son équation réduite admet pour expression :

$(T)\,:\ y = -x + b \quad$ où $b\in\mathbb{R}$.

L'image de $2$ par la fonction $f$ a pour valeur :

$$f(2) = \frac{1}{8}\times2^3 - \frac{1}{2}\times2^2 - \frac{1}{2}\times2 + 3$$
$$= 1 - 2 - 1 + 3 = 1$$

On en déduit que le point de coordonnées $A(2\,;3)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ; étant le point de contact de la tangente $(T)$ avec la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit que le point $A$ appartient aussi à la droite $(T)$.

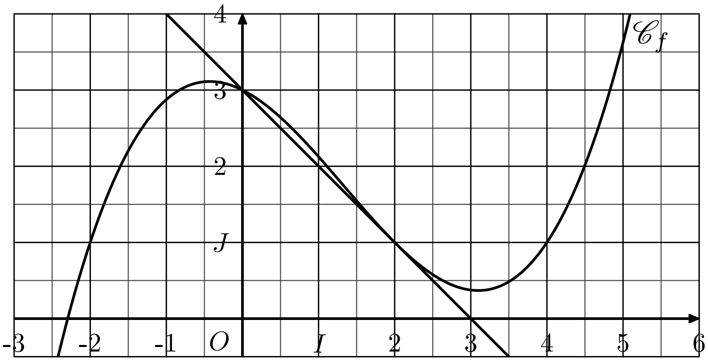
Ainsi, les coordonnées du point $A$ vérifient l'équation réduite de la tangente $(T)$ :

$$y = -x + b$$
$$1 = -2 + b$$
$$1 + 2 = b$$
$$b = 3$$

Ainsi, la droite $(T)$ admet pour équation réduite :

$y = -x + 3$

c) Voici la représentation de la droite $(T)$ :




3) Les abscisses des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $(d)$ vérifient l'équation :

$$f(x) = -x + 3$$
$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}{\cdot}x^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x + 3 = -x + 3$$

Multiplions par $8$ les deux membres de cette équation :

$$x^3 - 4{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 24 = -8{\cdot}x + 24$$
$$x^3 - 4{\cdot}x^2 - 4x + 8{\cdot}x = 0$$
$$x^3 - 4{\cdot}x^2 + 4{\cdot}x = 0$$
$$x{\cdot}\big(x^2 - 4{\cdot}x + 4\big) = 0$$

En reconnaissant la seconde identité remarquable :

$$x{\cdot}(x-2)^2 = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

Cette équation admet pour ensemble de solution :

$\mathcal{S} = \big\{0\,;\,2\big\}$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $(d)$ admettent deux points d'intersection ayant pour abscisse $0$ et $1$. Ces deux points d'intersection ont pour coordonnées :

$A(0\,;3) \quad ; \quad B(2\,;1)$

## C.25

- La fonction $f$ est une fonction polynomiale qui admet pour dérivée :

$$f'(x) = -1{\cdot}\big(3{\cdot}x^2\big) + 2{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) - 2 + 0$$
$$= -3{\cdot}x^2 + 4{\cdot}x - 2$$

- On a l'image et le nombre dérivé du nombre $1$ par la fonction $f$ :

  - $f(1) = -1^3 + 2\times1^2 - 2\times1 + 1 = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$
  - $f'(1) = -3\times1^2 + 4\times1 - 2 = -3 + 4 - 2 = -1$

- La formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente $(T)$ :

$$y = f'(1){\cdot}\big(x-1\big) + f(1)$$
$$y = -1{\cdot}\big(x-1\big) + 0$$
$$y = -x + 1$$

- Étudions la différence :

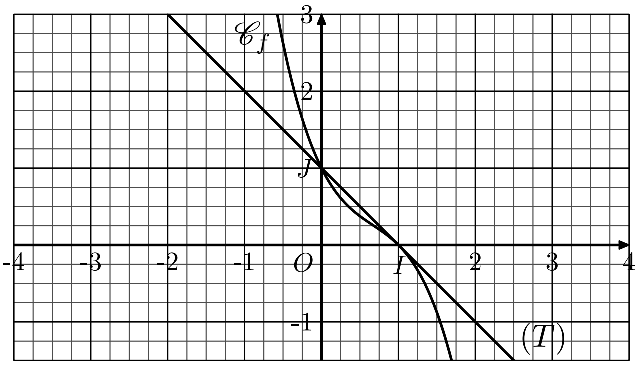
$$f(x) - \big(-x+1\big) = \big(-x^3 + 2{\cdot}x^2 - 2x + 1\big) - \big(-x+1\big)$$
$$= -x^3 + 2{\cdot}x^2 - 2x + 1 + x - 1 = -x^3 + 2{\cdot}x^2 - x$$
$$= -x{\cdot}\big(x^2 - 2{\cdot}x + 1\big) = -x{\cdot}\big(x-1\big)^2$$

- On en déduit le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-1)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-(-x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

- On en déduit :
  - la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la tangente $(T)$ sur $\big]-\infty\,;0\big]$ ;
  - la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la tangente $(T)$ sur $\big]-\infty\,;0\big]$ ;

Voici la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $(T)$ :




**C.26**

(1) L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs $u$ et $v$ dont les expressions sont :
$u(x) = x^2 - 3{\cdot}x + 1 \quad ; \quad v(x) = 1 - 2x$
qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :
$u'(x) = 2{\cdot}x - 3 \quad ; \quad v'(x) = -2$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :
$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$
$= (2x - 3){\cdot}(1 - 2{\cdot}x) + (x^2 - 3{\cdot}x + 1){\cdot}(-2)$
$= 2{\cdot}x - 4{\cdot}x^2 - 3 + 6{\cdot}x - 2{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x - 2$
$= -6{\cdot}x^2 + 14{\cdot}x - 5$

(2) L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs $u$ et $v$ dont les expressions sont :
$u(x) = -x^3 + 2{\cdot}x + 3 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$
qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :
$u'(x) = -3{\cdot}x^2 + 2 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :
$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$
$= (-3{\cdot}x^2 + 2)(x^2 + 1) + (-x^3 + 2{\cdot}x + 3){\cdot}2x$
$= -3{\cdot}x^4 - 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x^2 + 2 - 2{\cdot}x^4 + 4{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x$
$= -5{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x + 2$

**C.27**

(1) L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ où :
$u(x) = x^5 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 1$
qui admettent les fonctions dérivées :
$u'(x) = 5{\cdot}x^4 \quad ; \quad v'(x) = 2x$

Ainsi, la fonction $g$ admet pour dérivée la fonction $g'$ dont l'expression est :
$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 5{\cdot}x^4{\cdot}\big(x^2 - 1\big) + x^5{\cdot}(2x)$
$= 5{\cdot}x^6 - 5{\cdot}x^4 + 2{\cdot}x^6 = 7{\cdot}x^6 - 5{\cdot}x^4$

(2) L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$u(x) = 2{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 1 \quad ; \quad v(x) = 1 - x^2$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 4{\cdot}x - 5 \quad ; \quad v'(x) = -2{\cdot}x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :
$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$
$= \big(4{\cdot}x - 5\big)\big(1 - x^2\big) + \big(2{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 1\big)\big(-2{\cdot}x\big)$
$= 4{\cdot}x - 4{\cdot}x^3 - 5 + 5{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x^3 + 10{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x$
$= -8{\cdot}x^3 + 15{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 5$

**C.28**

- L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$u(x) = x^2 - 1 \quad ; \quad v(x) = \dfrac{1}{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 2{\cdot}x \quad ; \quad v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $f$ :
$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$
$= 2{\cdot}x{\cdot}\dfrac{1}{x} + \big(x^2 - 1\big){\cdot}\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) = 2 - \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$
$= \dfrac{2{\cdot}x^2 - \big(x^2 - 1\big)}{x^2} = \dfrac{2{\cdot}x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

- L'expression de la fonction $g$ est définie par le produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$u(x) = 2 - 3{\cdot}x^2 \quad ; \quad v(x) = \dfrac{1}{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -6{\cdot}x \quad ; \quad v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :
$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = -6{\cdot}x{\cdot}\dfrac{1}{x} + \big(2 - 3{\cdot}x^2\big){\cdot}\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$
$= -6 - \dfrac{2 - 3{\cdot}x^2}{x^2} = \dfrac{-6{\cdot}x^2 - \big(2 - 3{\cdot}x^2\big)}{x^2}$
$= \dfrac{-6{\cdot}x^2 - 2 + 3{\cdot}x^2}{x^2} = \dfrac{-3{\cdot}x^2 - 2}{x^2}$

**C.29**

(1) L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions $u$ et $v$ définies par :
$u(x) = 3 - x \quad ; \quad v(x) = \dfrac{1}{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :

$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$
$= -1{\times}\dfrac{1}{x} + (3 - x){\cdot}\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) = \dfrac{-1}{x} - \dfrac{3 - x}{x^2}$
$= \dfrac{-x}{x^2} - \dfrac{3 - x}{x^2} = \dfrac{-x - (3 - x)}{x^2} = \dfrac{-x + x - 3}{x^2} = \dfrac{-3}{x^2}$

(2) L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs $u$ et $v$ dont les expressions sont :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x + \dfrac{1}{x}$

qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :

$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + x\cdot\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2\cdot x$$

**C.30**

(a) La fonction $f$ admet pour dérivée :

$$f'(x) = 2\cdot x + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x\times 2\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{4\cdot x\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

(b) L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :

$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{x}{2\cdot\sqrt{x}} = \sqrt{x}\times\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}} + \frac{x}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x}} + \frac{x}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{3\cdot x}{2\cdot\sqrt{x}}$$

**C.31** L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :

$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 2\cdot x\cdot\sqrt{x} + (x^2-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4\cdot x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4\cdot x^2 + x^2 - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{5\cdot x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$$

**C.32**

(1) L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des deux fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad v(x) = x + \dfrac{1}{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad ; \quad v'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'exprimer l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\Big(x+\frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{x}\cdot\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= -\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^3}$$

(2) (a) Déterminer l'image et le nombre dérivé de 2 par la fonction $f$ :

- $f(2) = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(2 + \dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(\dfrac{4}{2} + \dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{4}$
- $f'(2) = -\dfrac{2}{2^3} = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$

(b) L'équation réduite de la tangente $(T)$ est obtenue par la formule :

$$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

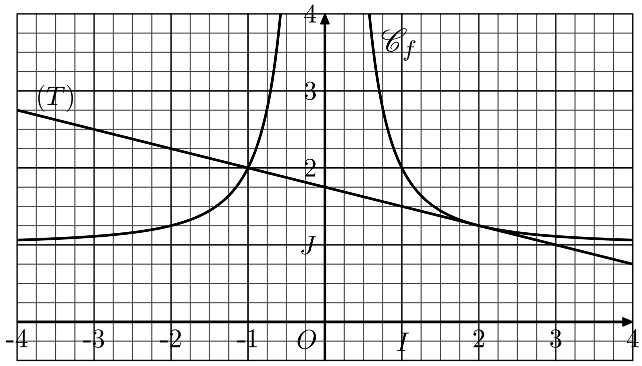
$$y = -\frac{1}{4}\cdot(x-2) + \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}\cdot x + \frac{1}{2} + \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}\cdot x + \frac{2}{4} + \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}\cdot x + \frac{7}{4}$$

(c) Voici la représentation de la tangente $(T)$ :




**C.33**

(1) L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des deux fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = 2\cdot x - 3 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 2\times\sqrt{x} + (2x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2\cdot\sqrt{x} + \frac{2\cdot x - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4\cdot x}{2\sqrt{x}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4\cdot x + (2x-3)}{2\sqrt{x}} = \frac{6\cdot x - 3}{2\sqrt{x}}$$

(2) (a) Pour déterminer l'équation réduite de la tangente $(T)$ au point d'abscisse 1. Calculons l'image de 1 par la fonction $f$ et le nombre dérivée de la fonction $f$ en 1 :

- $f(1) = (2\times 1 - 3)\cdot\sqrt{1} = (2-3)\times 1 = -1$
- $f'(1) = \dfrac{6\times 1 - 3}{2\sqrt{1}} = \dfrac{6-3}{2\times 1} = \dfrac{3}{2}$

La tangente $(T)$ admet pour expression :

$y = f'(1)\cdot\big(x-1\big) + f(1)$

$y = \dfrac{3}{2}\cdot(x-1) + (-1)$

$y = \dfrac{3}{2}\cdot x - \dfrac{3}{2} - 1$

$y = \dfrac{3}{2}\cdot x - \dfrac{5}{2}$

(b) Traçons la courbe représentative de la tangente $(T)$. Pour cela considérons les deux points :

- Considérons $M$ le point de $(T)$ ayant pour abscisse 1. Les coordonnées de $M$ sont de la forme $(1\,;yM)$ :

$y_M = \dfrac{3}{2}\cdot x_M - \dfrac{5}{2}$

$y_M = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}$

$y_M = -\dfrac{2}{2}$

$y_M = -1$

Le point $M$ a pour coordonnées $(1\,;-1)$

- Considérons $N$ le point de $(T)$ ayant pour abscisse 3. Les coordonnées de $N$ sont de la forme $(3\,;y_N)$ :

$y_N = \dfrac{3}{2}\cdot 3 - \dfrac{5}{2}$

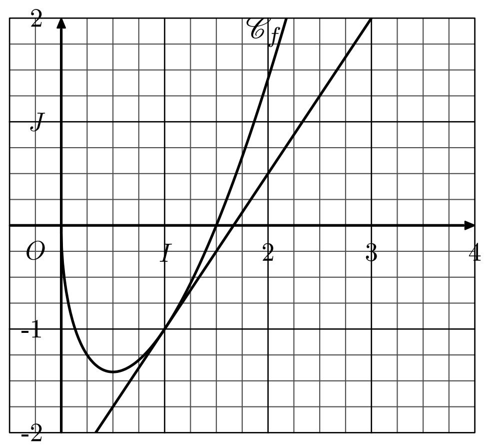
$y_N = \dfrac{9}{2} - \dfrac{5}{2}$

$y_N = \dfrac{4}{2}$

$y_N = 2$

Le point $N$ a pour coordonnées $(3\,;2)$

Voici la représentation de la tangente $(T)$ :




C.34

(1)
- L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des deux fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = x-4 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\times\sqrt{x} + (x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\cdot x + (x-4)}{2\sqrt{x}} = \frac{3\cdot x - 4}{2\sqrt{x}}$$

- On a les deux valeurs :
  - $f(4) = (4-4)\cdot\sqrt{4} = 0\times 2 = 0$
  - $f'(4) = \dfrac{3\times 4 - 4}{2\sqrt{4}} = \dfrac{12-4}{2\times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$
- On en déduit l'équation réduite de la tangente $(T_1)$ :

$y = f'(4)\cdot\big(x-4\big) + f(4)$

$y = 2\cdot(x-4) + 0$

$y = 2\cdot x - 8$

- Déterminons deux points appartenant à la tangente $(T_1)$ :
  - $f(3) = 2\times 3 - 8 = 6 - 8 = -2$
    Le point $A(3\,;-2)$ appartient à $(T_1)$.
  - $f(4) = 2\times 4 - 8 = 8 - 8 = 0$
    Le point $B(4\,;0)$ appartient à $(T_2)$.

(2)
- On a les deux valeurs particulières suivantes :
  - $f(1) = (1-4)\cdot\sqrt{1} = -3\times 1 = -3$
  - $f'(1) = \dfrac{3\times 1 - 4}{2\sqrt{1}} = \dfrac{3-4}{2} = -\dfrac{1}{2}$
- On en déduit l'équation réduite de la tangente $(T_2)$ :

$y = f'(1)\cdot\big(x-1\big) + f(1)$

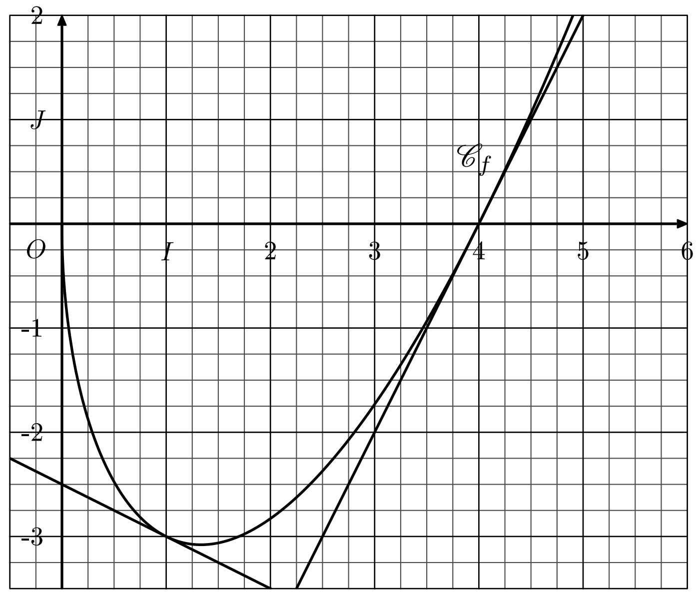
$y = -\dfrac{1}{2}\cdot(x-1) + (-3)$

$y = -\dfrac{1}{2}\cdot x + \dfrac{1}{2} - 3$

$y = -\dfrac{1}{2}\cdot x - \dfrac{5}{2}$

- Déterminons deux points appartenant à la tangente $(T_2)$ :
  - $g(0) = -\dfrac{1}{2}\times 0 - \dfrac{5}{2} = 0 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{5}{2}$
    Le point $C\left(0\,;-\dfrac{5}{2}\right)$ appartient à $(T_2)$.
  - $g(1) = -\dfrac{1}{2}\times 1 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3$
    Le point $D(1\,;-3)$ appartient à $(T_2)$.

Voici le tracé des deux tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$ :




C.35 La fonction $f$ est définie par le quotient des deux fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = 3\cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = 2\cdot x - 1$

qui admettent pour dérivées les fonctions :

$u'(x)=3 \quad ; \quad v'(x)=2$

L'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ est donnée par :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{3\cdot(2\cdot x-1)-(3\cdot x+1)\cdot 2}{(2\cdot x-1)^2}$$
$$=\frac{6\cdot x-3-6\cdot x-2}{(2\cdot x-1)^2}=\frac{-5}{(2\cdot x-1)^2}$$

**C.36** L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions $u$ et $v$ telles que :

$u(x)=3 \quad ; \quad v(x)=2-x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=0 \quad ; \quad v'(x)=-1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{0\times(2-x)-3\times(-1)}{(2-x)^2}$$
$$=\frac{3}{(2-x)^2}$$

**C.37**

1. L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du quotient de la fonction $u$ par la fonction $v$ où ces deux fonctions sont définies par : :

   $u(x)=1 \quad ; \quad v(x)=x^5+1$

   qui admettent pour dérivée :

   $u'(x)=0 \quad ; \quad v'(x)=5\cdot x^4$

   La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :

   $$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{0\times\big(x^5+1\big)-1\times 5x^4}{\big(x^5+1\big)^2}$$
   $$=\frac{-5x^4}{\big(x^5+1\big)^2}$$

2. L'expression de la fonction $g$ est définie par le quotient des fonctions $u$ et $v$ :

   $u(x)=5\cdot x-2 \quad ; \quad v(x)=3\cdot x+1$

   qui admettent pour dérivée :

   $u'(x)=5 \quad ; \quad v'(x)=3$

   La fonction $g$ admet pour dérivée la fonction $g'$ dont l'expression est :

   $$g'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{5\cdot(3\cdot x+1)-(5\cdot x-2)\cdot 3}{\big(3\cdot x+1\big)^2}$$
   $$=\frac{15\cdot x+5-15\cdot x+6}{\big(3\cdot x+1\big)^2}=\frac{11}{\big(3\cdot x+1\big)^2}$$

**C.38** La fonction $f$ est définie par le produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x)=x^2+x+1 \quad ; \quad v(x)=2\cdot x^2-1$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x)=2x+1 \quad ; \quad v'(x)=4\cdot x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=\frac{(2\cdot x+1)\cdot(2\cdot x^2-1)-(x^2+x+1)\cdot 4\cdot x}{(2x^2-1)^2}$$
$$=\frac{4\cdot x^3-2\cdot x+2\cdot x^2-1-4\cdot x^3-4\cdot x^2-4\cdot x}{(2\cdot x^2-1)^2}$$
$$=\frac{-2\cdot x^2-6\cdot x-1}{(2\cdot x^2-1)^2}$$

**C.39** la fonction $f$ est définie par le produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x)=4 \quad ; \quad v(x)=x^2-2\cdot x+3$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=0 \quad ; \quad v'(x)=2\cdot x-2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{0\cdot(x^2-2\cdot x+3)-4\cdot(2\cdot x-2)}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$
$$=\frac{-8\cdot x+8}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$

**C.40** La fonction $f$ est définie par le quotient des fonctions $u$ et $v$ où :

$u(x)=x^2-3x+1 \quad ; \quad v(x)=2\cdot x+1$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x)=2\cdot x-3 \quad ; \quad v'(x)=2$

Ainsi, la dérivée $f'$ de la fonction $f$ admet pour dérivée :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=\frac{\big(2\cdot x-3\big)\cdot\big(2\cdot x+1\big)-\big(x^2-3\cdot x+1\big)\cdot 2}{\big(2\cdot x+1\big)^2}$$
$$=\frac{4x^2+2x-6x-3-2x^2+6x-2}{\big(2\cdot x+1\big)^2}=\frac{2x^2+2x-5}{\big(2\cdot x+1\big)^2}$$

**C.41**

1. Pour qu'un quotient soit défini, il faut que son dénominateur soit non-nul.

   Étudions le polynôme $x^2-5\cdot x+6$. Ce polynôme admet pour discriminant :

   $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-5)^2-4\times 1\times 6=25-24=1$

   Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les racines suivantes :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-5)-1}{2\times 1}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$
   $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-5)+1}{2\times 1}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

   On en déduit l'ensemble de définition de la fonction $h$ :

   $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}\backslash\big\{2\,;3\big\}$

2. L'expression de la fonction $h$ est donnée sous la forme

d'un quotient où :

$u(x) = x^2 - 2\cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 5\cdot x + 6$

qui admettent pour dérivées les deux fonctions :

$u'(x) = 2\cdot x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x - 5$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $h'$ :

$$h'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2-5\cdot x+6) - (x^2-2\cdot x+1)(2\cdot x-5)}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

$$= \frac{2x^3\text{-}10x^2\text{+}12x - 2x^2\text{+}10x\text{-}12\text{-}(2x^3\text{-}5x^2\text{-}4x^2\text{+}10x\text{+}2x\text{-}5)}{(x^2\text{-}5x\text{+}6)^2}$$

$$= \frac{2\cdot x^3 - 12\cdot x^2 + 22\cdot x - 12 - (2\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 12\cdot x - 5)}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

$$= \frac{2\cdot x^3 - 12\cdot x^2 + 22\cdot x - 12 - 2\cdot x^3 + 9\cdot x^2 - 12\cdot x + 5)}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

$$= \frac{-3\cdot x^2 + 10\cdot x - 7}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

C.42

1 La fonction $f$ est définie par :

$f(x) = \big(x^2 - 3\cdot x\big)\cdot\sqrt{x}$

L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = x^2 - 3\cdot x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 2\cdot x - 3 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = (2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x} + (x^2-3\cdot x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3\cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x\cdot(2\cdot x-3) + x^2-3\cdot x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4\cdot x^2 - 6\cdot x + x^2 - 3\cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{5\cdot x^2 - 9\cdot x}{2\sqrt{x}}$$

2 L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un quotient des deux fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x) = x + 1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée $g'$ :

$$g'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{1\cdot\sqrt{x} - (x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{2\cdot x}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\dfrac{2\cdot x - (x+1)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

C.43

2 a La fonction $f$ est définie par le quotient des deux fonctions $u$ et $v$ définie par :

$u(x) = 4\cdot x + 2 \quad ; \quad v(x) = 2\cdot x^2 + x + 1$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 4 \quad ; \quad v'(x) = 4\cdot x + 1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :

$$f(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{4(2x^2+x+1) - (4x+2)(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{8\cdot x^2 + 4\cdot x + 4 - (16\cdot x^2 + 4\cdot x + 8\cdot x + 2)}{(2\cdot x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{8\cdot x^2 + 4\cdot x + 4 - 16\cdot x^2 - 12\cdot x - 2}{(2\cdot x^2 + x + 1)^2} = \frac{-8\cdot x^2 - 8\cdot x + 2}{(2\cdot x^2 + x + 1)^2}$$

b On a les valeurs suivantes :

- Le nombre dérivé de la fonction $f$ en $-1$ a pour valeur :

$$f'(-1) = \frac{-8\cdot(-1)^2 - 8\cdot(-1) + 2}{\big[2\cdot(-1)^2 + (-1) + 1\big]^2} = \frac{-8+8+2}{(2-1+1)^2}$$

$$= \frac{2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Le nombre dérivé de la fonction $f$ en $0$ a pour valeur :

$$f'(0) = \frac{-8\times 0^2 - 8\times 0 + 2}{\big(2\times 0^2 + 0 + 1\big)^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

- Le nombre dérivé de la fonction $f$ en $0$ a pour valeur :

$$f'\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{-8\times\big(12\big)^2 - 8\times\Big(\dfrac{1}{2}\Big) + 2}{\Big[2\times\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 + \dfrac{1}{2} + 1\Big]^2} = \frac{-2-4+2}{\Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1\Big)^2}$$

$$= \frac{-4}{2^2} = -1$$