Première Spécialité - Chapitre 4

E.1

Proposition : les tableaux ci-dessous donnent les dérivées des monômes :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$	$f(x) = a \rightsquigarrow f'(x) = 0$
$f(x) = 1 \rightsquigarrow f'(x) = 0$	$f(x) = 5 \rightsquigarrow f'(x) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = x^n \rightsquigarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$g(x) = x \rightsquigarrow g'(x) = 1$	$j(x) = x^3 \rightsquigarrow j'(x) = 3x^2$
$h(x) = x^2 \rightsquigarrow h'(x) = 2x$	$k(x) = x^4 \rightsquigarrow k'(x) = 4x^3$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = a \cdot x^n \rightsquigarrow f'(x) = a \times n \cdot x^{n-1}$
$g(x) = 2x \rightsquigarrow g'(x) = 2$	$j(x) = 7x^3 \rightsquigarrow j'(x) = 21x^2$
$h(x) = -2x^2 \rightsquigarrow h'(x) = -4x$	$k(x) = -x^4 \rightsquigarrow k'(x) = -4x^3$

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$
2. $g(x) = 3x^4 - 5x + 2$
3. $h(x) = 5 - 3x^2$
4. $j(x) = 3x^2 - x + 1$

E.2 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = x^5 + 3 \cdot x^2 - x + 10$
2. $f(x) = 2 \cdot x^7 - x^2 - 2 \cdot x + 1$

E.3 Déterminer les nombres dérivés en 1 pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 2x + 4$
2. $g : x \longmapsto 5 - 3x$
3. $k : x \longmapsto x^4 + x^2 + 1$
4. $\ell : x \longmapsto 2x^4 - 2x^3 - 8x$

E.4 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{5}{3} \cdot x^3 - \frac{2}{3} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4$$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

E.5 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \longmapsto -3 \cdot x + 2$
2. $g : x \longmapsto 4 \cdot x^2 - 4$
3. $h : x \longmapsto 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$
4. $j : x \longmapsto 5 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$

E.6 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : \longmapsto 3 \cdot x + 2$
2. $g : \longmapsto x^2 + 4$
3. $h : \longmapsto x^2 + x$
4. $j : \longmapsto x^3 + 2 \cdot x^2$

E.7 Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$
2. $g : x \longmapsto 5 \cdot x^6 - 3 \cdot x^3 - 4$
3. $h : x \longmapsto 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{8 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2}{x}$

E.8 La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1 ; 7]$ par :

$f(x)=1{,}5\cdot x^3-9\cdot x^2+24\cdot x+48$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;7]$. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;7]$:

1. Calculer $f'(x)$
2. Calculer $f''(x)$.

E.9

Déterminer les nombres dérivés en 1 pour chacune des fonctions suivantes :

1. $h : x \longmapsto 2x^2+3$
2. $j : x \longmapsto 5x-3x^2-1$
3. $k\colon x \longmapsto -2\cdot x^2+2\cdot x$
4. $k\colon x \longmapsto 3x^2-2\cdot x$

E.10

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto (3\cdot x+11)(4-x)$
2. $g\colon x \longmapsto (x+1)(2\cdot x-4)$

E.11

Proposition : ci-dessous les dérivées de la fonction inverse et de la fonction racine carrée.

Formule générale : $f(x)=\dfrac{1}{x} \rightsquigarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	
$g(x)=\dfrac{5}{x} \rightsquigarrow g'(x)=-\dfrac{5}{x^2}$	$h(x)=-\dfrac{7}{3x} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{7}{3x^2}$

Formule générale : $f(x)=\sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$g(x)=3\sqrt{x} \rightsquigarrow g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$	$h(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{3} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x^2$
2. $g(x)=\dfrac{1}{12}\cdot x^6$
3. $h(x)=4\sqrt{x}$
4. $j(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$
5. $k(x)=\dfrac{1}{2x}$
6. $l(x)=-\dfrac{2}{x}$

E.12 Pour chaque question, une fonction f est proposée ainsi que l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f. Établir l'expression de la fonction f' proposée :

	$f(x)$	$f'(x)$
1	$\dfrac{1}{x}-x^2$	$\dfrac{-2\cdot x^3-1}{x^2}$
2	$x+x^2+\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{2\cdot x^3+x^2-1}{x^2}$
3	$x^2+\sqrt{x}$	$\dfrac{4\cdot x\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}}$

E.13 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f : x \longmapsto x+\dfrac{1}{x}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{2}{3}\cdot x^3-\sqrt{x}$
3. $h : x \longmapsto 3\cdot\sqrt{x}-2x^4$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}$

E.14 Déterminer les fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto x - 2\sqrt{x}$
2. $g\colon x \longmapsto 2\times\dfrac{1}{x}$
3. $h\colon x \longmapsto \dfrac{-5}{x} + \sqrt{x}$
4. $k\colon x \longmapsto x^2 - \dfrac{1}{x}$

E.15 Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f\colon x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$
2. $g\colon x \longmapsto 2\cdot\sqrt{x}$
3. $h\colon x \longmapsto \dfrac{3}{x} - 2\sqrt{x}$
4. $j\colon x \longmapsto 2\cdot x^3 + \dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

E.16 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto 5 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$
2. $g\colon x \longmapsto \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x}$
3. $h\colon x \longmapsto 5\cdot x^3 - \dfrac{3}{x}$

Les dérivées des fonctions g et h seront présentées sous forme de quotient.

E.17

Proposition : soit a un nombre réel et f une fonction dérivable en a.
La tangente (T) au point d'abscisse a à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f a pour équation réduite :
$y = f'(a)\cdot\big(x-a\big) + f(a)$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 1$$

Dans un repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(2)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{2}{3}\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x + 10$$

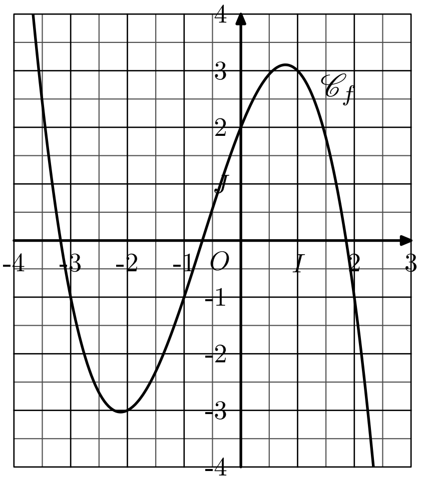
Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(-3)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse -3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^3 - x^2 + \frac{5}{2}\cdot x + 2$$

Dans un repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$ orthonormé, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1 a Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

b Donner la valeur de $f'(-2)$.

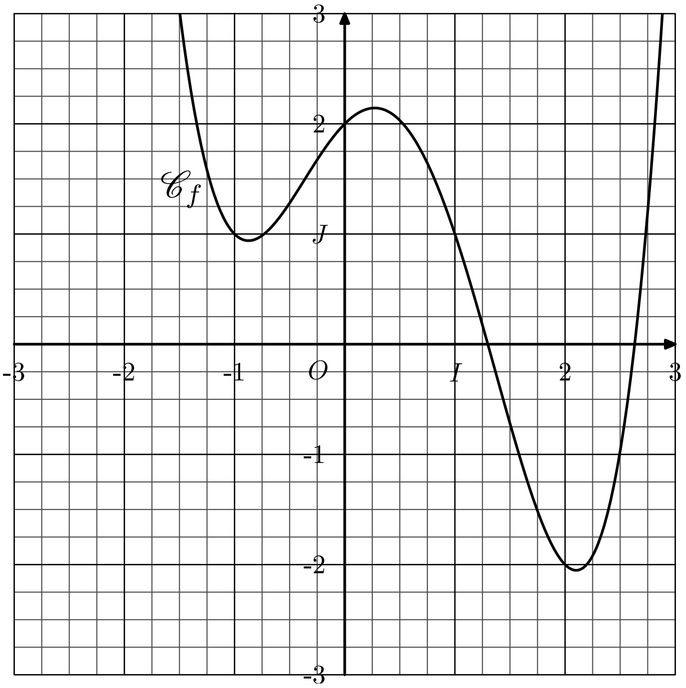
2 a Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

b Effectuer le tracé de la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.20 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^4 - x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 2$$

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé dans lequel est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1 a Tracer la droite (d) d'équation $y = -x$.

b Quelle conjecture peut-on établir sur la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2 Établir la conjecture précédente.

E.21 On considère la fonction définie par la relation :

$$f(x) = x^2 - 6\cdot x + 5$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

On note (d) et (Δ) les deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses 2 et 5.

1 Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2 Déterminer l'équation de la tangente (d).

3 Déterminer l'équation de la tangente (Δ).

(4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

E.22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3 - 2{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x - 2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\;J\big)$

(1) (a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(b) En déduire l'expression de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(2) (a) Étudier le signe du polynôme $x{\cdot}\big(x^2{-}2{\cdot}x{+}1\big)$.

(b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et (T).

E.23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = 2{\cdot}x^3 - 4{\cdot}x^2 + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\;J\big)$

(1) (a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

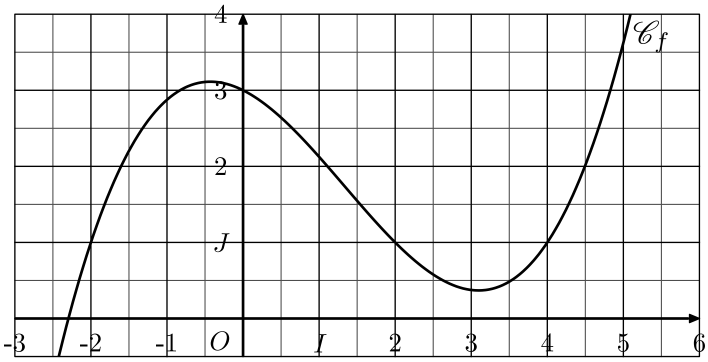
(b) En déduire l'expression de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(2) (a) Étudier le signe du polynôme $2{\cdot}x{\cdot}\big(x^2{-}2{\cdot}x{+}1\big)$.

(b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et (T).

E.24 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$f(x) = \frac{1}{8}{\cdot}x^3 - \frac{1}{2}{\cdot}x^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x + 3$



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

(1) Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

(a) Donner la valeur du coefficient directeur de (T).

(b) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).

(c) Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T).

(3) On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
$(d) :\; y = -x + 3$
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

E.25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = -x^3 + 2{\cdot}x^2 - 2x + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\;J\big)$

On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et (T).

E.26 Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de sa fonction dérivée :

1. $f : x \longmapsto (x^2-3{\cdot}x+1)(1-2{\cdot}x)$
2. $g : x \longmapsto (-x^3+2{\cdot}x+3){\cdot}(x^2+1)$

E.27 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto x^5{\cdot}\big(x^2-1\big)$ 2. $g\colon x \longmapsto \big(2{\cdot}x^2-5x+1\big)\big(1-x^2\big)$

E.28 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ dont les expressions sont données dans le tableau ci-dessous. Établir les expressions de leurs fonctions dérivées données dans le tableau :

$f(x) = \big(x^2-1\big){\cdot}\dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$
$g(x) = \big(2-3{\cdot}x^2\big){\cdot}\dfrac{1}{x}$	$g'(x) = \dfrac{-3{\cdot}x^2-2}{x^2}$

E.29 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto (3-x){\cdot}\dfrac{1}{x}$ 2. $g : x \longmapsto x{\cdot}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.30 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f : x \longmapsto x^2+\sqrt{x}$ b. $g : x \longmapsto x{\cdot}\sqrt{x}$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.31 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie ci-dessous :

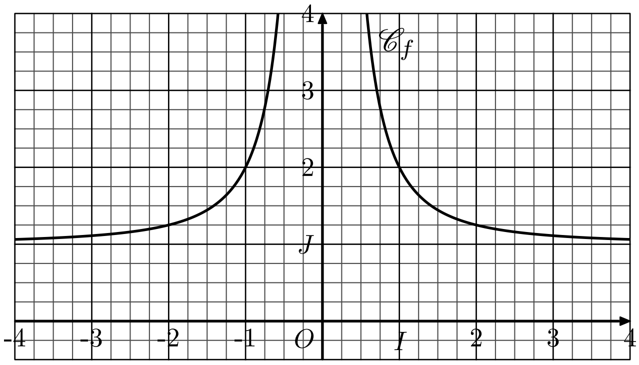
$g\colon x \longmapsto \big(x^2-3\big){\cdot}\sqrt{x}$

On donnera l'expression de la fonction dérivée g' sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.32 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{x}{\cdot}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)$

1. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$
2. On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$:

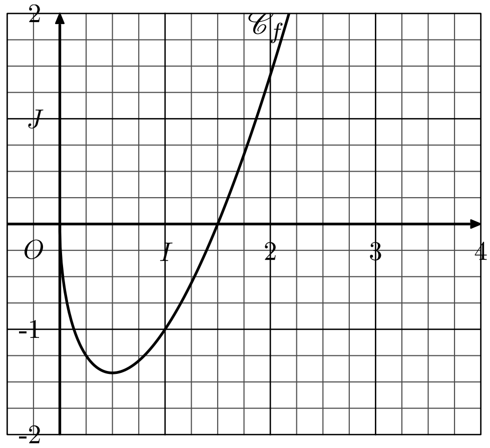


a. Donner la valeur des nombres $f(2)$ et $f'(2)$.
b. En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
c. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.33 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$f(x) = (2{\cdot}x-3){\cdot}\sqrt{x}$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé :



(1) Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{6x-3}{2\sqrt{x}}$$

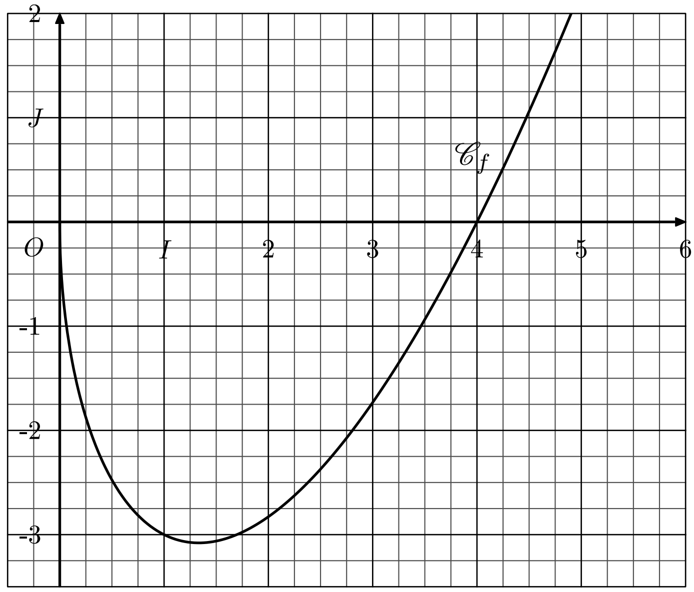
(2) (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(b) Tracer dans le repère ci-dessus la tangente (T).

E.34 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = (x-4)\cdot\sqrt{x}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé :



(1) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4. Tracer la tangente (T_1) dans le repère.

(2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_2) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. Tracer la tangente (T_2) dans le repère.

E.35 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3\cdot x+1}{2\cdot x-1}$$

Établir l'égalité suivante : $f'(x) = \dfrac{-5}{(2\cdot x-1)^2}$

E.36 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.37 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^5+1}$ (2) $g(x) = \dfrac{5\cdot x-2}{3\cdot x+1}$

E.38 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2{\cdot}x^2 - 1}$$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x - 1}{(2{\cdot}x^2 - 1)^2}$

E.39 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 3}$$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

E.40 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2{\cdot}x + 1}$$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.41 On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation : $h(x) = \dfrac{x^2 - 2{\cdot}x + 1}{x^2 - 5{\cdot}x + 6}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que le nombre dérivé de h en x s'exprime par : $h'(x) = \dfrac{-3{\cdot}x^2 + 10{\cdot}x - 7}{(x^2 - 5{\cdot}x + 6)^2}$

E.42 On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

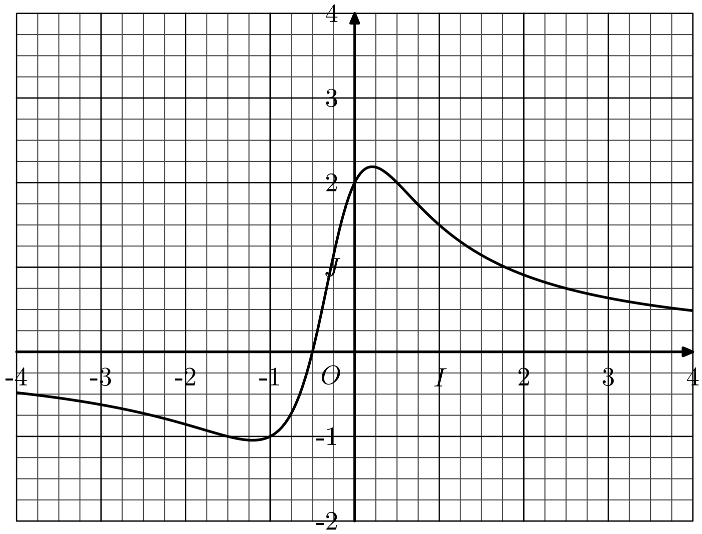
$$f(x) = \left(x^2 - 3{\cdot}x\right){\cdot}\sqrt{x} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

E.43 On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{4{\cdot}x + 2}{2{\cdot}x^2 + x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d_1) dont l'équation est :
   $y = \dfrac{1}{2}{\cdot}x - \dfrac{1}{2}$

   b. Effectuer le tracé de la droite (d_2) dont l'équation est :
   $y = 2{\cdot}x + 2$

   c. Effectuer le tracé de la droite (d_3) dont l'équation est :
   $y = -x + \dfrac{5}{2}$

(2) (a) Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

(b) Donner les valeurs des nombres dérivées de la fonction f en -1, 0 et $\dfrac{1}{2}$.