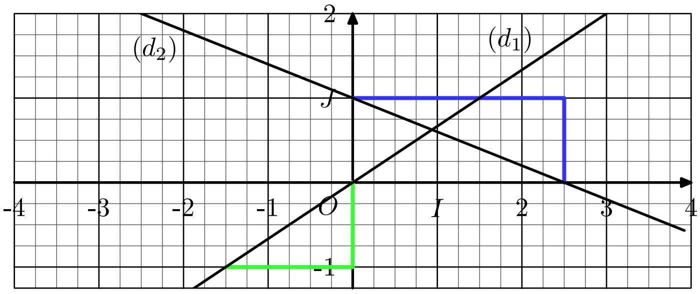
C.1 On a fait ressortir en couleurs les triangles rectangles permettant de calculer facilement le coefficient directeur de chacune des droites :



(a) Calcul du coefficient directeur de (d_1) :

La droite (d_1) passe par les points $(-1{,}5\,;-1)$ et $(0\,;0)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

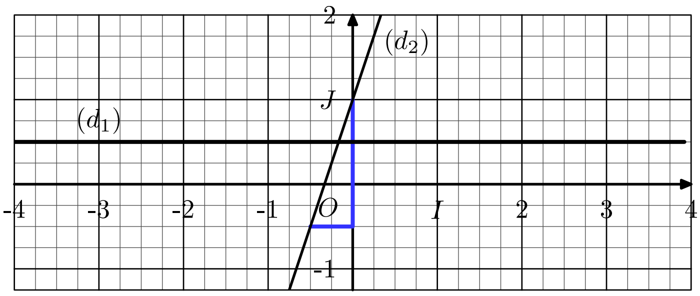
$$c_1 = \frac{0-(-1)}{0-(-1{,}5)} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$$

(b) Calcul du coefficient directeur de (d_2) :

La droite (d_2) passe par les points $(0\,;1)$ et $(2{,}5\,;0)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$$c_2 = \frac{0-1}{2{,}5-0} = \frac{-1}{2{,}5} = -\frac{2}{5}$$

C.2 On a fait ressortir en couleurs les triangles rectangles permettant de calculer facilement le coefficient directeur de chacune des droites :



(a) Calcul du coefficient directeur de (d_1) :

La droite (d_1) est parallèle à l'axe des abscisses : son coefficient directeur est nul.

$$c_1 = 0$$

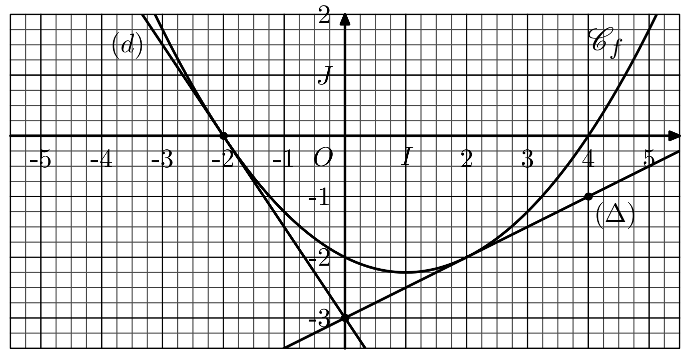
(b) Calcul du coefficient directeur de (d_2) :

La droite (d_2) passe par les points $(-0{,}5\,;-0{,}5)$ et $(0\,;1)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$$c_2 = \frac{1-(-0{,}5)}{0-(-0{,}5)} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$$

C.3

(1) Voici les tracés de ces deux droites :



(a) Déterminons les coordonnées de deux points appartenant à la droite (d) :

x	0	4
y	-3	-1

(b) Déterminons les coordonnées de deux points appartenant à la droite (Δ) :

x	-2	0
y	0	-3

(2) Les droites viennent "*frôler*" la courbe en 1 seul point de contact.

C.4

(1) Par la fonction f, on a les images de nombres :

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - 1 - 1 = -\frac{7}{4}$

  Ainsi, le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{7}{4}\right)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- $f(2) = 2^2 - 2\times2 - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$

  Ainsi, le point de coordonnées $(2\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$

(2) (a) La droite (d) passe par les points de coordonnées :

$$\left(-\frac{5}{4}\,;0\right) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\,;-\frac{7}{4}\right)$$

Ainsi, la droite (d) a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{0-\left(-\frac{7}{4}\right)}{-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{-\frac{7}{4}} = -1$$

La droite (d) admet une équation réduite de la forme :

$(d) : y = -x + b \quad$ où $b\in\mathbb{R}$

(b) La droite (d) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{7}{4}\right)$. Ainsi, les coordonnées de ce point vérifient l'équation réduite de cette droite :

$$y = -x + b$$
$$-\frac{7}{4} = -\frac{1}{2} + b$$
$$b = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}$$
$$b = -\frac{7}{4} + \frac{2}{4}$$
$$b = -\frac{5}{4}$$

Ainsi, la droite (d) admet pour équation réduite :

$(d) : y = -x - \dfrac{5}{4}$

c La droite (Δ) passe par les points de coordonnées :
$(2\,;-1)\quad;\quad(1\,;-3)$
Ainsi, la droite (Δ) a pour coefficient directeur :
$$a' = \frac{-1-(-3)}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$
La droite (d) et (Δ) admet une équation réduite de la forme :
$(\Delta) : y = 2x + b' \quad$ où $b' \in \mathbb{R}$
La droite (Δ) passe par le point de coordonnées $(2\,;-1)$. Ainsi, les coordonnées de ce point vérifient l'équation réduite de cette droite :
$$\begin{aligned} y &= 2x + b' \\ -1 &= 2\times2 + b' \\ -1 &= 4 + b' \\ b &= -1-4 \\ b &= -5 \end{aligned}$$
Ainsi, la droite (Δ) admet pour équation réduite :
$(\Delta) : y = 2x - 5$

C.5

1 On a les transformations algébriques suivantes :
$$f(2{+}h) = 3{\cdot}(2+h)^2 - 2{\cdot}(2+h) = 3{\cdot}(4+4{\cdot}h+h^2) - 4 - 2h$$
$$= 12 + 12{\cdot}h + 3{\cdot}h^2 - 4 - 2{\cdot}h = 3{\cdot}h^2 + 10{\cdot}h + 8$$

2 a
- On a :
$f(2) = 3\times2^2 - 2\times2 = 3\times4 - 4 = 12 - 4 = 8$
- On a la simplification du quotient :
$$\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h} = \frac{\big(3{\cdot}h^2+10{\cdot}h+8\big)-8}{h} = \frac{3{\cdot}h^2+10{\cdot}h}{h}$$
$$= \frac{h{\cdot}(3{\cdot}h+10)}{h} = 3{\cdot}h + 10$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto0}\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto0} 3{\cdot}h + 10 = 10$$

b On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$f'(2) = 10$

C.6

1 On a :
- $f(2{+}h) = \big(2+h\big)^2 - 3{\cdot}\big(2+h\big) + 1$
$= \big(4+4h+h^2\big) - 6 - 3{\cdot}h + 1 = h^2 + h - 1$
- $f(2) = 2^2 - 3\times2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$

On en déduit la simplification :
$$\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+h-1-(-1)}{h} = \frac{h^2+h-1+1}{h}$$
$$= \frac{h^2+h}{h} = \frac{h{\cdot}\big(h+1\big)}{h} = h+1$$

2 On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$$f'(2) = \lim_{h\mapsto0}\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto0} h+1 = 1$$

C.7 Avant de déterminer la valeur du nombre dérivée en -1, effectuons les calculs suivants :

- On a les transformations algébriques suivantes :
$$f\big(-1{+}h\big) = \big(-1+h\big)^2 + 3\times(-1+h) + 1$$
$$= \big(-1\big)^2 + 2\times(-1)\times h + h^2 - 3 + 3{\cdot}h + 1$$
$$= 1 - 2{\cdot}h + h^2 - 3 + 3{\cdot}h + 1 = h^2 + h - 1$$
- $f(-1) = (-1)^2 + 3\times(-1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

Le nombre dérivé $f'(-1)$ de la fonction f en -1 a pour valeur :
$$f'(-1) = \lim_{h\mapsto0}\frac{f(-1{+}h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+h-1-(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\mapsto0}\frac{h{\cdot}\big(h+1\big)}{h} = \lim_{h\mapsto0} h+1 = 1$$

C.8

- Simplifions l'expression suivante :
$$\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{2{\cdot}\big(1{+}h\big)+1}{\big(1{+}h\big)+2} - \dfrac{2\times1+1}{1+2}}{h}$$
$$= \Big(\frac{2+2{\cdot}h+1}{h+3} - \frac{2+1}{3}\Big)\times\frac{1}{h} = \Big(\frac{2{\cdot}h+3}{h+3} - \frac{3}{3}\Big)\times\frac{1}{h}$$
$$= \Big(\frac{2{\cdot}h+3}{h+3} - 1\Big)\times\frac{1}{h} = \Big(\frac{2{\cdot}h+3}{h+3} - \frac{h+3}{h+3}\Big)\times\frac{1}{h}$$
$$= \Big(\frac{\big(2{\cdot}h+3\big)-\big(h+3\big)}{h+3}\Big)\times\frac{1}{h} = \frac{2{\cdot}h+3-h-3}{h+3}\times\frac{1}{h}$$
$$= \frac{h}{h+3}\times\frac{1}{h} = \frac{1}{h+3}$$
- On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto0}\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto0}\frac{1}{h+3} = \frac{1}{3}$$
- Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f pour $x{=}1$ a pour valeur $\dfrac{1}{3}$.

C.9 Déterminons les expressions suivantes :

- $f(4{+}h) = \big(4+h\big){\cdot}\sqrt{4+h}$
- $f(4) = 4{\cdot}\sqrt{4} = 4\times2 = 8$

On a les manipulations algébriques suivantes :
$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h} = \frac{\big(h+4\big)\sqrt{h+4}-8}{h}$$
$$= \frac{\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}-8\Big]\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\Big]}{h{\cdot}\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\Big]}$$
$$= \frac{\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}\Big]^2-8^2}{h{\cdot}\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\Big]} = \frac{\big(h+4\big)^2{\cdot}\big(\sqrt{h+4}\big)^2-64}{h{\cdot}\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\Big]}$$
$$= \frac{\big(h+4\big)^2{\cdot}\big(h+4\big)-64}{h{\cdot}\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\Big]} = \frac{\big(h+4\big)^3-64}{h{\cdot}\Big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\Big]}$$
On a le développement :
$$\big(h+4\big)^3 = \big(h+4\big)^2{\cdot}\big(h+4\big) = \big(h^2+8{\cdot}h+16\big){\cdot}\big(h+4\big)$$
$$= h^3 + 8{\cdot}h^2 + 16{\cdot}h + 4{\cdot}h^2 + 32{\cdot}h + 64$$
$$= h^3 + 12{\cdot}h^2 + 48{\cdot}h + 64$$
Reprenons l'expression du quotient :

$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\frac{h^3+12{\cdot}h^2+48{\cdot}h+64-64}{h{\cdot}\big[(h+4)\sqrt{h+4}+8\big]}$$
$$=\frac{h^3+12{\cdot}h^2+48{\cdot}h}{h{\cdot}\big[(h+4)\sqrt{h+4}+8\big]}=\frac{h{\cdot}(h^2+12{\cdot}h+48)}{h{\cdot}\big[(h+4)\sqrt{h+4}+8\big]}$$
$$=\frac{h^2+12{\cdot}h+48}{(h+4)\sqrt{h+4}+8}$$

On a les deux limites :
$$\lim_{h\mapsto 0} h^2+12{\cdot}h+48=48 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0}(h+4)\sqrt{h+4}+8=16$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 4 :
$$f'(4)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^2+12{\cdot}h+48}{(h+4)\sqrt{h+4}+8}$$
$$=\frac{48}{16}=3$$

C.10

1. On a :

- $f(1{+}h)=\dfrac{(1+h)+3}{(1+h)+1}=\dfrac{h+4}{h+2}$
- $f(1)=\dfrac{1+3}{1+1}=\dfrac{4}{2}=2$

On en déduit :
$$\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{h+4}{h+2}-2}{h}=\frac{\frac{h+4}{h+2}-\frac{2{\cdot}(h+2)}{h+2}}{h}$$
$$=\frac{\frac{h+4}{h+2}-\frac{2{\cdot}h+4}{h+2}}{h}=\frac{\frac{h+4-(2{\cdot}h+4)}{h+2}}{h}$$
$$=\frac{\frac{h+4-2{\cdot}h-4}{h+2}}{h}=\frac{\frac{-h}{h+2}}{h}=\frac{-h}{h+2}\times\frac{1}{h}=-\frac{1}{h+2}$$

2. On en déduit la valeur du nombre dérivée :
$$f'(1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}-\frac{1}{h+2}=-\frac{1}{2}$$

3. On a :
$$f(1)=\frac{1+3}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$
la tangente (T) la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :
$$y=f'(a){\cdot}(x-a)+f(a)$$
$$y=-\frac{1}{2}{\cdot}(x-1)+2$$
$$y=-\frac{1}{2}{\cdot}x+\frac{1}{2}+2$$
$$y=-\frac{1}{2}{\cdot}x+\frac{5}{2}$$

C.11

1. a. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$f(4{+}h){-}f(4){=}\Big[\frac{1}{2}{\cdot}(4{+}h)^2{-}2(4{+}h){+}1\Big]-\Big(\frac{1}{2}{\times}4^2{-}2{\times}4{+}1\Big)$$
$$=\frac{1}{2}{\cdot}(16+8h+h^2)-8-2h+1-\Big(\frac{1}{2}{\times}16-8+1\Big)$$
$$=8+4h+\frac{1}{2}h^2-8-2h+1-(8-8+1)$$
$$=\frac{1}{2}h^2+2h+1-1=\frac{1}{2}h^2+2h$$

b. Ainsi, le quotient a pour valeur :
$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^2+2h}{h}=\frac{h{\cdot}\Big(\frac{1}{2}h+2\Big)}{h}=\frac{1}{2}h+2$$
On en déduit que lorsque h tend vers 0, cette expression tend vers 2. On obtient la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{2}h+2=2$$

2. Le coefficient directeur c de la tangente (T) est le nombre dérivé en 4 de la fonction f.
On en déduit : $f'(4)=2$

C.12

1. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$f(2{+}h)-f(2)=\frac{3(2+h)-1}{(2+h)+1}-\frac{3{\times}2-1}{2+1}$$
$$=\frac{6+3{\cdot}h-1}{h+3}-\frac{6-1}{3}=\frac{3{\cdot}h+5}{h+3}-\frac{5}{3}$$
$$=\frac{3{\cdot}(3{\cdot}h+5)}{3{\cdot}(h+3)}-\frac{5{\cdot}(h+3)}{3{\cdot}(h+3)}=\frac{9{\cdot}h+15}{3{\cdot}(h+3)}-\frac{5{\cdot}h+15}{3{\cdot}(h+3)}$$
$$=\frac{9{\cdot}h+15-(5{\cdot}h+15)}{3{\cdot}(h+3)}=\frac{9{\cdot}h+15-5{\cdot}h-15}{3{\cdot}(h+3)}=\frac{4{\cdot}h}{3{\cdot}(h+3)}$$
Simplifions l'expression du quotient :
$$\frac{f(2{+}h)-f((2)}{h}=\frac{\frac{4{\cdot}h}{3{\cdot}(h+3)}}{h}=\frac{4{\cdot}h}{3{\cdot}(h+3)}\times\frac{1}{h}=\frac{4}{3{\cdot}(h+3)}$$

2. On a les deux limites :
$$\lim_{h\mapsto 0}4=4 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0}3{\cdot}(h+3)=3{\times}(0+3)=9$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2{+}h)-f((2)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{4}{3{\cdot}(h+3)}=\frac{4}{9}$$

C.13

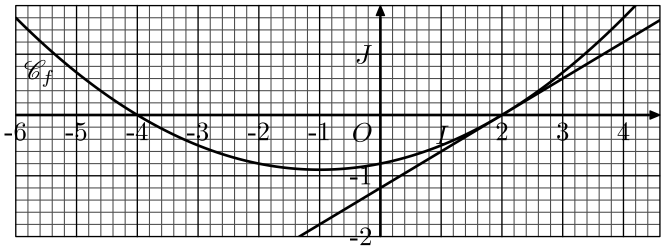
1. a.
- $f(2{+}h)=0{,}1{\cdot}(h+2)^2+0{,}2{\cdot}(2+h)-0{,}8$
$=0{,}1{\cdot}(h^2+4{\cdot}h+4)+0{,}2{\cdot}h+0{,}4-0{,}8$
$=0{,}1{\cdot}h^2+0{,}4{\cdot}h+0{,}4+0{,}2{\cdot}h-0{,}4$
$=0{,}1{\cdot}h^2+0{,}6{\cdot}h$
- $f(2)=0{,}1{\times}2^2+0{,}2{\times}2-0{,}8=0{,}1{\times}4+0{,}4-0{,}8$
$=0{,}4-0{,}4=0$

On a les transformations algébriques :
$$\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}=\frac{0{,}1{\cdot}h^2+0{,}6{\cdot}h}{h}=\frac{h{\cdot}(0{,}1{\cdot}h+0{,}6)}{h}$$
$$=0{,}1{\cdot}h+0{,}6$$

b. Le nombre dérivé de la fonction f en 2 a pour valeur :
$$f'(2)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}0{,}1{\cdot}h+0{,}6=0{,}6$$

2. a. La tangente (T) a pour équation réduite :
$$y=f'(2){\cdot}(x-2)+f(2)$$
$$y=0{,}6{\cdot}(x-2)+0$$
$$y=0{,}6{\cdot}x-1{,}2$$

b. Pour tracer la droite (T), nous pouvons utiliser les deux points suivants :
- le point de contact de coordonnées $(2\,;0)$
- l'ordonnée à l'origine $(0\,;-1{,}2)$



C.14

1. On a :

- $f(1+h) = 2\cdot(1+h)^2 - 3\cdot(1+h) + 1$
$= 2\cdot(1 + 2\cdot h + h^2) - 3 - 3\cdot h + 1$
$= 2 + 4\cdot h + 2\cdot h^2 - 3 - 3\cdot h + 1 = 2\cdot h^2 + h$
- $f(1) = 2\times1^2 - 3\times1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

On en déduit l'expression du quotient :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2\cdot h^2 + h - 0}{h} = \frac{h\cdot(2\cdot h + 1)}{h} = 2\cdot h + 1$$

Le nombre dérivé de la fonction f en 1 a pour valeur :

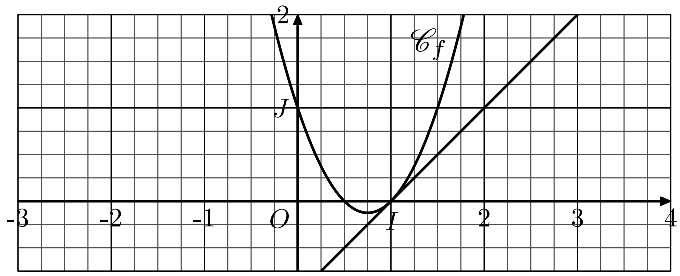
$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} 2\cdot h + 1 = 1$$

2. La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$

$y = 1\cdot(x-1) + 0$

$y = x - 1$



C.15

1. On utilisera les expressions suivantes :

- $f(1+h) = \dfrac{3\cdot(1+h)+1}{2\cdot(1+h)+2} = \dfrac{3 + 3\cdot h + 1}{2 + 2\cdot h + 2} = \dfrac{3\cdot h + 4}{2\cdot h + 4}$
- $f(1) = \dfrac{3\times1+1}{2\times1+2} = \dfrac{3+1}{2+2} = \dfrac{4}{4} = 1$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{3\cdot h+4}{2\cdot h+4} - 1}{h} = \frac{\dfrac{3\cdot h+4}{2\cdot h+4} - \dfrac{2\cdot h+4}{2\cdot h+4}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{(3\cdot h+4) - (2\cdot h+4)}{2\cdot h+4}}{h} = \frac{\dfrac{3\cdot h + 4 - 2\cdot h - 4}{2\cdot h+4}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{h}{2\cdot h+4}}{h} = \frac{h}{2\cdot h+4}\times\frac{1}{h} = \frac{1}{2\cdot h+4}$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1 :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{2\cdot h+4} = \frac{1}{4}$$

2. a. La tangente (T) a pour équation réduite :

$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$

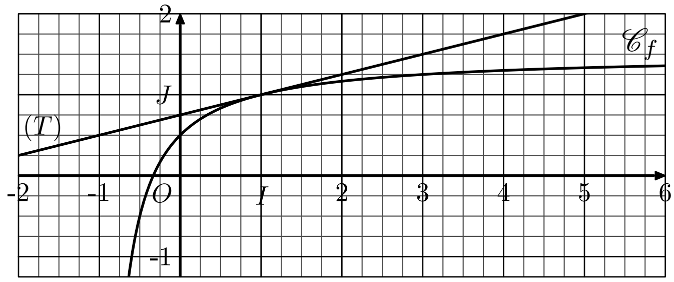
$y = \dfrac{1}{4}\cdot(x-1) + 1$

$y = \dfrac{1}{4}\cdot x - \dfrac{1}{4} + 1$

$y = \dfrac{1}{4}\cdot x + \dfrac{3}{4}$

b. Pour tracer la tangente, on utilise :

- le point de contact qui a pour coordonnées $(1\,;1)$
- l'ordonnée à l'origine qui définit le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{4}\right)$



C.16

1.
- $f(1+h) = \dfrac{3\cdot(1+h)^2 - 2}{(1+h)^2+1} = \dfrac{3\cdot(h^2 + 2\cdot h + 1) - 2}{(h^2 + 2\cdot h + 1) + 1}$
$= \dfrac{3\cdot h^2 + 6\cdot h + 3 - 2}{(h^2 + 2\cdot h + 1) + 1} = \dfrac{3\cdot h^2 + 6\cdot h + 1}{h^2 + 2\cdot h + 2}$
- $f(1) = \dfrac{3\times1^2 - 2}{1^2 + 1} = \dfrac{3-2}{1+1} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{3\cdot h^2 + 6\cdot h + 1}{h^2 + 2\cdot h + 2} - \dfrac{1}{2}}{h}$

$$= \frac{\dfrac{(3\cdot h^2 + 6\cdot h + 1)\cdot 2}{(h^2 + 2\cdot h + 2)\cdot 2} - \dfrac{1\cdot(h^2 + 2\cdot h + 2)}{2\cdot(h^2 + 2\cdot h + 2)}}{h}$$

$$= \frac{6\cdot h^2 + 12\cdot h + 2 - h^2 - 2\cdot h - 2}{2\cdot(h^2 + 2\cdot h + 2)}\times\frac{1}{h}$$

$$= \frac{5\cdot h^2 + 10\cdot h}{2\cdot h\cdot(h^2 + 2\cdot h + 2)} = \frac{h\cdot(5\cdot h + 10)}{h\cdot(2\cdot h^2 + 4\cdot h + 4)}$$

$$= \frac{5\cdot h + 10}{2\cdot h^2 + 4\cdot h + 4}$$

On en déduit la valeur de la limite :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{5\cdot h + 10}{2\cdot h^2 + 4\cdot h + 4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

2. a. De la question précédente, on en déduit que le coefficient directeur de la tangente (T) a pour valeur $\dfrac{5}{2}$. Son équation réduite est de la forme :

$$y = \frac{5}{2}\cdot x + b \qquad \text{où } b \in \mathbb{R}$$

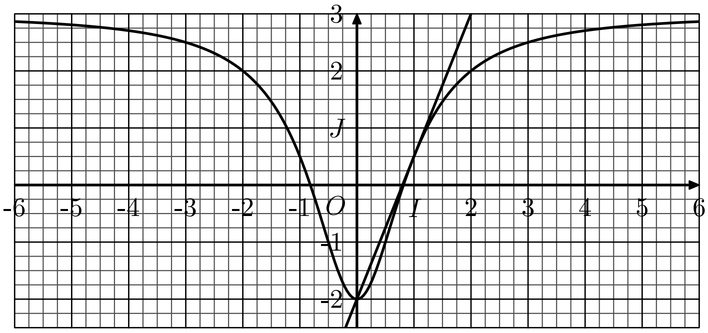
Le point de coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$ étant le point de contact, il appartient à $\mathscr{C}_f$ et à (T).

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\times 1 + b$$
$$b = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$$
$$b = -2$$

On en déduit l'équation réduite de (T) :

$$y = \frac{5}{2}\cdot x - 2$$

(b) Voici la représentation de la tangente (T) :



(3) Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = \frac{5}{2}x - 2$$
$$\frac{3\cdot x^2 - 2}{x^2+1} - \frac{5\cdot x - 4}{2} = 0$$
$$\frac{2\cdot\left(3\cdot x^2 - 2\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} - \frac{\left(5\cdot x - 4\right)\left(x^2+1\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{6\cdot x^2 - 4 - \left(5\cdot x^3 + 5\cdot x - 4\cdot x^2 - 4\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{6\cdot x^2 - 4 - 5\cdot x^3 - 5x + 4\cdot x^2 + 4}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{-5\cdot x^3 + 10\cdot x^2 - 5\cdot x}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{-5\cdot x\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 1\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{-5\cdot x\cdot\left(x-1\right)^2}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul ; on en déduit les solutions de l'équation précédente :

$\mathcal{S} = \{0\,;1\}$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente (T) s'interceptent en deux points de coordonnées :

$(0\,;-2) \quad ; \quad \left(1\,;\frac{1}{2}\right)$

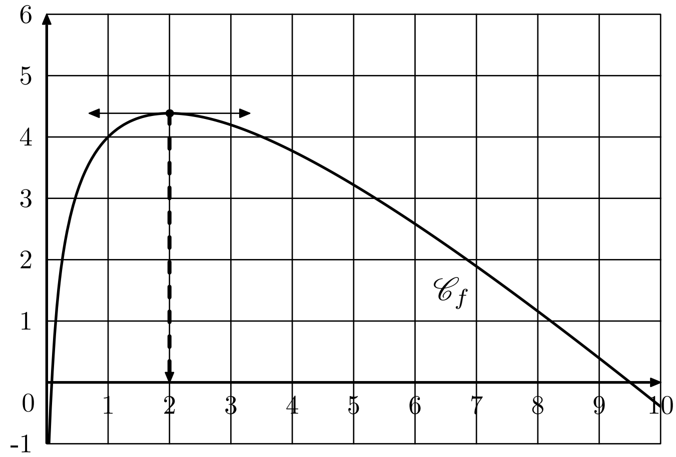
C.17

- La réponse (a) est fausse :
  La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses. On en déduit que le nombre dérivé de la fonction f en 0 vaut 0.
- La réponse (b) est fausse :
  Un nombre dérivé de 0 en -1 entraînerait une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 de la courbe $\mathscr{C}_f$.
  Or, on voit que la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas une telle tangente au point d'abscisse -1.
- La réponse correcte est (c) :
  La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 est une droite passant par les points $A(-4\,;4)$ et $B(-2\,;2)$.
  Le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur :
  $$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-4}{(-2)-(-4)} = \frac{-2}{-2+4} = \frac{-2}{2} = -1$$
- La réponse (d) est fausse :
  On voit que pour $x = -3$, la fonction f est décroissante. Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f en -3 est négatif et ne peut donc être égal à 3.

C.18 La réponse correcte est (b) :

Lorsque le nombre dérivé en x de la fonction f est nul : le coefficient directeur de la tangente de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x est nul.
Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Or, sur la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$, celle-ci n'accepte une tangente parallèle à l'axe des abscisses qu'en *un point* d'abscisse d'environ 2.



C.19

(1) La réponse correcte est (a) :
La tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale : son coefficient directeur est nul.
On en déduit que le nombre dérivé de la fonction f en 1 prend la valeur 0.

(2) La réponse correcte est (b) :
La tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 passe par les points :
$A(0\,;1) \quad ; \quad C(3\,;2)$
Le coefficient directeur de la droite T_0 a pour valeur :
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$
On en déduit le nombre dérivé de la fonction f en 0 :
$f'(0) = 1$.

(3) La réponse correcte est (d) :
Le point B est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1. Son ordonnée est donc l'image de B.
Graphiquement, on peut affirmer que : $1 < f(1) \leqslant 1{,}5$