Première Spécialité - Chapitre 2

C.1

	a	b	c	Δ
$2x^2+5x+1$	2	5	1	17
$-x^2+7x+3$	-1	7	3	61
x^2-5x+4	1	-5	4	9
$2x^2-4x-1$	2	-4	-1	24
$-x^2-x-1$	-1	-1	-1	-3
x^2+7	1	0	7	-28

C.2

a) Le polynôme $3{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 5^2 - 4\times3\times2 = 25 - 24 = 1$

b) Le polynôme $-x^2-3{\cdot}x+2$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2 - 4\times(-1)\times2 = 9 + 8 = 17$

c) Le polynôme $2{\cdot}x^2-\dfrac{1}{3}{\cdot}x+1$ a pour discriminant :
$$\Delta = \Big(-\frac{1}{3}\Big)^2 - 4\times2\times1 = \frac{1}{9} - 8 = \frac{1}{9} - \frac{72}{9} = \frac{1-72}{9} = -\frac{71}{9}$$

C.3

a) Le polynôme $2x^2-3x-2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 9 + 16 = 25$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-5}{2\times2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+5}{2\times2} = \frac{8}{4} = 2$$

b) Le polynôme $-4x^2+12x-9$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2 - 4\times(-4)\times(-9) = 144 - 144 = 0$

Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme admet une unique racine :
$$x = -\frac{b}{2{\cdot}a} = -\frac{12}{2\times(-4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

c) L'expression $3x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times3\times2 = 16 - 24 = -8$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine.

C.4

a) Le polynôme du second degré $3x^2-5x+6$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times6 = 25 - 72 = -47 < 0$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine :
$S = \varnothing$

b) Déterminons le discriminant du trinôme $3x^2-24x+48$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4\times3\times48 = 0$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant nul, ce polynôme admet une unique racine :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{6} = 4$$

c) Le polynôme $-2{\cdot}x^2+x+6$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4\times(-2)\times6 = 1 + 48 = 49$
On remarque la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1-7}{2\times(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1+7}{2\times(-2)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

C.5

a) Le discriminant du polynôme $x^2+2x-15$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times(-15) = 64$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant est strictement positif ; ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = -5$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = 3$$

b) Le discriminant du polynôme $3x^2-5x+7$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times7 = 25 - 84 = -59$

Le discriminant étant strictement négatif, le polynôme $3x^2-5x+7$ n'admet aucune racine.

C.6

a) Le discriminant du polynôme $-2{\cdot}x^2-5{\cdot}x-3$ a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-5\big)^2 - 4\times(-2)\times(-3) = 25 - 24 = 1$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines du polynôme :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-5)-1}{2\times(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-5)+1}{2\times(-2)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

On en déduit que les racines de ce polynôme sont :
$-\dfrac{3}{2}$ et -1.

(b) Le polynôme $2\cdot x^2+5\cdot x+2$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 5^2-4\times2\times2 = 25-16 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines du polynôme :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-5-3}{2\times2} \\ &= \frac{-8}{4} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-5+3}{2\times2} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Les solutions sont : -2 ou $-\frac{1}{2}$.

C.7

(a) Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 1^2-4\times\frac{2}{3}\times(-3) = 1+8 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-1-3}{2\times\frac{2}{3}} \\ &= \frac{-4}{\frac{4}{3}} \\ &= -4\times\frac{3}{4} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-1+3}{2\times\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{\frac{4}{3}} \\ &= 2\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Le polynôme $\frac{2}{3}\cdot x^2+x-3$ admet pour ensemble de racines :

$$\mathcal{S} = \left\{-3\,;\,\frac{3}{2}\right\}$$

(b) Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4\cdot a\cdot c = \left(-\frac{11}{3}\right)^2-4\times(-2)\times(-1) = \frac{121}{9}-8 \\ &= \frac{121}{9}+\frac{72}{9} = \frac{49}{9} \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-\left(-\frac{11}{3}\right)-\frac{7}{3}}{2\times(-2)} \\ &= \frac{\frac{11}{3}-\frac{7}{3}}{2\times(-2)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}}{2\times(-2)} \\ &= \frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-\left(-\frac{11}{3}\right)+\frac{7}{3}}{2\times(-2)} \\ &= \frac{\frac{11}{3}+\frac{7}{3}}{2\times(-2)} \\ &= \frac{\frac{18}{3}}{2\times(-2)} \\ &= \frac{6}{-4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Le polynôme $-2\cdot x^2-\frac{11}{3}\cdot x-1$ admet pour ensemble de racines :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{3}{2}\right\}$$

(c) Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-3)^2-4\times3\times\frac{2}{3} = 9-4\times2 = 9-8 = 1$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-(-3)-1}{2\times3} \\ &= \frac{3-1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-(-3)+1}{2\times3} \\ &= \frac{3+1}{6} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le polynôme $3\cdot x^2-3\cdot x+\frac{2}{3}$ admet pour ensemble de racines :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right\}$$

C.8

(a) Le polynôme $\frac{2}{7}\cdot x^2-\frac{5}{3}\cdot x-\frac{7}{3}$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4\cdot a\cdot c = \left(-\frac{5}{3}\right)^2-4\times\frac{2}{7}\times\left(-\frac{7}{3}\right) \\ &= \frac{25}{9}+\frac{8}{3} = \frac{25}{9}+\frac{24}{9} = \frac{49}{9} \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines.

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}}=\frac{7}{3}$

Les deux racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{5}{3}-\frac{7}{3}}{2\times\frac{2}{7}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} = -\frac{2}{3}\times\frac{7}{4} = -\frac{7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}}{2\times\frac{2}{7}} = \frac{\frac{12}{3}}{\frac{4}{7}} = 4\times\frac{7}{4} = 7$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \Big\{ -\frac{7}{6}\,;\,7 \Big\}$$

b Le polynôme $-\frac{1}{2}{\cdot}x^2-\frac{4}{5}{\cdot}x+\frac{2}{5}$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \Big(-\frac{4}{5}\Big)^2-4\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)\times\frac{2}{5}$$
$$= \frac{16}{25}+\frac{8}{10} = \frac{16}{25}+\frac{20}{25} = \frac{36}{25}$$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines.

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

Les deux racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{4}{5}-\frac{6}{5}}{2\times\big(-\frac{1}{2}\big)} = \frac{-\frac{2}{5}}{-1} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}{2\times\big(-\frac{1}{2}\big)} = \frac{\frac{10}{5}}{-1} = -2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \Big\{ -2\,;\,\frac{2}{5} \Big\}$$

C.9

- La réponse a est fausse :

$$-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+3\times(-2) = -\frac{-8}{3}+4-6$$
$$= \frac{8+12-18}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Le nombre -2 n'est pas une solution de l'équation.

- On a la factorisation suivante :

$$-\frac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x = -\frac{1}{3}{\cdot}x{\cdot}\big(x^2-3{\cdot}x-9\big)$$

Ainsi, l'équation proposée se traduit par une équation-produit :

$$-\frac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x = 0$$
$$-\frac{1}{3}{\cdot}x{\cdot}\big(x^2-3{\cdot}x-9\big) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$$-\frac{1}{3}{\cdot}x = 0 \qquad x^2-3{\cdot}x-9=0$$
$$x = 0$$

Le nombre 0 n'est pas une racine du second facteur. Étudions le nombre de racines du polynôme définissant le second facteur. Pour cela, regardons le signe de son discriminant :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times1\times(-9) = 9+36 = 45 > 0$

Son discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines distinctes.

Ces deux racines étant distinctes de 0, au total l'équation de l'énoncé admet trois solutions distinctes.

Ainsi, la réponse exacte est b.

C.10

1 On considère un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement positif :

a Calculer la somme des racines :

$$x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{\big(-b-\sqrt{\Delta}\big)+\big(-b+\sqrt{\Delta}\big)}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

b Calculons le produit des racines de ce polynôme :

$$x_1{\cdot}x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{\big(-b-\sqrt{\Delta}\big)\big(-b+\sqrt{\Delta}\big)}{4a^2} = \frac{-\big(\sqrt{\Delta}+b\big)\big(\sqrt{\Delta}-b\big)}{4a^2}$$
$$= \frac{-\big(\Delta-b^2\big)}{4a^2} = \frac{-\big[(b^2-4ac)-b^2\big]}{4a^2} = \frac{-(-4ac)}{4a^2}$$
$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

2 a On remarque facilement que 2 est une racine de ce polynôme :

$$2x^2+4x-16 = x\times2^2+4\times2-16 = 8+8-16 = 0$$

- Déterminons la seconde racine en utilisant la somme des racines :

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$2+x_2 = -\frac{4}{2}$$
$$x_2 = -2-2$$
$$x_2 = -4$$

Il est facile de vérifier que $2\big(x-2\big)(x+4)$ est la forme factorisée de ce polynôme.

- Il est également possible de déterminer la seconde racine en utilisant la valeur du produit des racines :

$$x_1{\cdot}x_2 = \frac{c}{a}$$
$$2{\cdot}x_2 = \frac{-16}{2}$$
$$x_2 = \frac{-8}{2}$$
$$x_2 = -4$$

Par cette méthode, on trouve également la même valeur pour cette seconde racine.

b En lien avec la question 1 et en notant x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme, on a les relations suivantes sur les coefficients de ce polynôme :

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1{\cdot}x_2 = \dfrac{c}{a}\end{cases} \iff \begin{cases} 3 = -\dfrac{b}{a} \\ -10 = \dfrac{c}{a}\end{cases} \iff \begin{cases} -3a = b \\ -10a = c\end{cases}$$

En choisissant 1 pour valeur de a, le polynôme recherché est :

$x^2-3x-10$

Facultatif :

Ce polynôme du second degré a pour valeur :

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times(-10) = 9+40 = 49$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-7}{2\times1} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad\Big|\qquad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+7}{2\times1} = \frac{10}{2} = 5$$

Les deux racines sont : -2 ; 5.

C.11

(a) Déterminons le discriminant de ce polynôme :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times3\times(-6) = 9+72$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-9}{2\times3} = \frac{3-9}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad\Big|\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+9}{2\times3} = \frac{3+9}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Ainsi, on obtient la forme factorisée :

$3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-6 = 3{\cdot}\big[x-(-1)\big]\big(x-2\big) = 3{\cdot}\big(x+1\big)\big(x-2\big)$

(b) Étudions le discriminant du polynôme $2{\cdot}x^2+12{\cdot}x+18$:

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2-4\times2\times18 = 144-144 = 0$

Le discriminant étant nul, le polynôme admet une unique racine dont la valeur est :

$-\dfrac{b}{2{\cdot}a} = -\dfrac{12}{2\times2} = -\dfrac{12}{4} = -3$

Ainsi, ce polynôme admet la forme factorisée :

$2{\cdot}x^2+12{\cdot}x+3 = 2{\cdot}\big[x-(-3)\big]^2 = 2{\cdot}\big(x+3\big)^2$

C.12

(a)
- Un moyen rapide était de reconnaitre l'identité remarquable connue depuis le collège :

  $x^2+2x+1 = \big(x+1\big)^2$

- Sinon, on factorise avec les nouveaux outils :

  L'expression $-4x^2+12x-9$ a pour discriminant :

  $\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times1\times1 = 4-4 = 0$

  On a la factorisation :

  $x^2+2{\cdot}x+1 = 1{\cdot}\Big(x+\dfrac{2}{2\times1}\Big)^2 = \big(x+1\big)^2$

(b) L'expression $3x^2-4x+2$ a pour discriminant :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-4)^2-4\times3\times2 = 16-24 = -8$

Le discriminant étant strictement négatif, cette expression n'admet pas de racine : elle ne peut se factoriser en produit de facteurs de premier degré.

(c) L'expression $-3x^2+4x-1$ a pour discriminant :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2-4\times(-3)\times(-1) = 16-12 = 4$

On a la simplification : $\sqrt{4} = 2$

Le discriminant étant strictement positif, cette expression admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{2\times(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1 \qquad\Big|\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{2\times(-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

On a la factorisation suivante :

$-3x^2+4x-1 = (-3)\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)\big(x-1\big)$

$= \big(-3x+1\big)\big(x-1\big)$

C.13

(a) Le polynôme $8x^2-24x+18$ admet pour discriminant :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-24)^2-4\times8\times18 = 576-576 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique solution :

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{2\times8} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$

Ce polynôme admet la factorisation suivante :

$8x^2-24x+18 = 8\Big(x-\dfrac{3}{2}\Big)^2 = 2\times2^2\times\Big(x-\dfrac{3}{2}\Big)^2$

$= 2\Big[2^2\times\Big(x-\dfrac{3}{2}\Big)^2\Big] = 2\Big[2\times\Big(x-\dfrac{3}{2}\Big)\Big]^2$

$= 2\Big(2x-2\times\dfrac{3}{2}\Big)^2 = 2\big(2x-3\big)^2$

(b) Le polynôme $3x^2+x+1$ admet le discriminant suivant :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4\times3\times1 = 1-12 = -11$

Le discriminant étant strictement négatif, on ne déduit que ce polynôme n'admet pas de forme factorisée.

(c) Le polynôme $-4x^2+x+3$ admet le discriminant suivant :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4\times(-4)\times3 = 1+48 = 49$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-7}{2\times(-4)} = \frac{-8}{-8} = 1 \qquad\Big|\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+7}{2\times(-4)} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

On a la factorisation suivante :

$-4x^2+x+3 = -4\Big[x-\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)\Big]\big(x-1\big)$

$= -4\Big(x+\dfrac{3}{4}\Big)\big(x-1\big) = \Big[4{\cdot}\Big(x+\dfrac{3}{4}\Big)\Big]\big(1-x\big)$

$= \big(4{\cdot}x+3\big)\big(1-x\big)$

C.14

(a) Le polynôme $6{\cdot}x^2{-}7{\cdot}x{-}3$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-7)^2 - 4{\times}6{\times}(-3) = 49 + 72 = 121$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-7)-11}{2{\times}6} = \frac{7-11}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-7)+11}{2{\times}6} = \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Ce polynôme admet pour forme factorisée :

$$6{\cdot}x^2 - 7{\cdot}x - 3 = a{\cdot}\big(x-x_1\big)\big(x-x_2\big)$$

$$= 6{\cdot}\Big[x - \Big(-\frac{1}{3}\Big)\Big]\Big(x-\frac{3}{2}\Big) = 3{\times}2{\cdot}\Big(x+\frac{1}{3}\Big)\Big(x-\frac{3}{2}\Big)$$

$$= \big(3{\cdot}x+1\big)\big(2{\cdot}x-3\big)$$

(b) Le polynôme $4{\cdot}x^2{+}12{\cdot}x{+}9$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2 - 4{\times}4{\times}9 = 144 - 144 = 0$$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet pour forme factorisée :

$$4{\cdot}x^2 + 12{\cdot}x + 9 = a{\cdot}\Big(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2 = 4{\cdot}\Big(x+\frac{12}{2{\times}4}\Big)^2$$

$$= 4{\cdot}\Big(x+\frac{12}{8}\Big)^2 = 4{\cdot}\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2 = 2^2{\cdot}\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2$$

$$= \Big[2{\cdot}\Big(x+\frac{3}{2}\Big)\Big]^2 = \Big(2{\cdot}x+3\Big)^2$$

C.15

(a) L'expression $4x^2{+}4x{-}5$ est un polynôme du second degré admettant pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4{\times}4{\times}(-5) = 96$$

On remarque que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{96} = \sqrt{16{\times}6} = 4\sqrt{6}$

Il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-4\sqrt{6}}{2{\times}4} = -\frac{1+\sqrt{6}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+4\sqrt{6}}{2{\times}4} = -\frac{1-\sqrt{6}}{2}$$

Ce polynôme du second degré admet pour forme factorisée :

$$4x^2+4x-5 = 4\Big(x+\frac{1-\sqrt{6}}{2}\Big)\Big(x+1+\frac{1+\sqrt{6}}{2}\Big)$$

$$= \big(2x+1-\sqrt{6}\big)\big(2x+1+\sqrt{6}\big)$$

(b) Le polynôme $x^2{-}2x{-}4$ du second degré admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4{\times}1{\times}(-4) = 4 + 16 = 20$$

On remarque que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4{\times}5} = 2\sqrt{5}$

Ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-2\sqrt{5}}{2} = 1-\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+2\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}$$

Ce polynôme admet la forme factorisée :

$$x^2 - 2x - 4 = \big(x-1+\sqrt{5}\big)\big(x-1-\sqrt{5}\big)$$

C.16

(1) Le polynôme $-2{\cdot}x^2{-}3{\cdot}x{+}5$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-3\big)^2 - 4{\times}(-2){\times}5 = 9 + 40 = 49$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-7}{2{\times}(-2)} = \frac{3-7}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+7}{2{\times}(-2)} = \frac{3+7}{-4} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

On en déduit la forme factorisée du polynôme :

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 = -2\Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(x-1\big)$$

$$= -\big(2{\cdot}x+5\big)\big(x-1\big) = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

(2) (a) La bonne réponse est $\Big(x{+}\dfrac{5}{2}\Big)\big(1{-}x\big)$:

Car :

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

$$\frac{1}{2}{\cdot}\big(-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5\big) = \frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

$$-x^2 - \frac{3}{2}{\cdot}x + \frac{5}{2} = \Big[\frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x+5\big)\Big]\big(1-x\big)$$

$$-x^2 - \frac{3}{2}{\cdot}x + \frac{5}{2} = \Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(1-x\big)$$

(b) La bonne réponse est $\big(2{\cdot}x{+}5\big)\big(2{-}x\big)$:

Car :

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 + \big(1-x\big) = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big) + \big(1-x\big)$$

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 + \big(1-x\big) = \big[\big(2{\cdot}x+5\big)+1\big]\big(1-x\big)$$

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 + \big(1-x\big) = \big(2{\cdot}x+6\big)\big(1-x\big)$$

(c) La bonne réponse est $\big(2{\cdot}x{+}7\big){\cdot}x$:

Car de la factorisation :

$$-2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

On en déduit :

$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2 - 3{\cdot}\big(x{+}1\big) + 5 = \Big[2{\cdot}\big(x{+}1\big)+5\Big]\Big[1-\big(x{+}1\big)\Big]$$

$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2 - 3{\cdot}\big(x{+}1\big) + 5 = \big(2{\cdot}x+2+5\big)\big(1-x-1\big)$$

$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2 - 3{\cdot}\big(x{+}1\big) + 5 = \big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}\big(-x\big)$$

$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2 - 3{\cdot}\big(x{+}1\big) + 5 = -\big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}x$$

C.17

(a) Cherchons les racines de $x^2{+}3x{+}4$
L'étude du discriminant donne :
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4{\times}1{\times}4 = -7 < 0$

Le discriminant de ce polynôme est strictement négatif ; il n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2{+}3x{+}4$		$+$	

(b) Cherchons les racines de $4x^2{+}3x{-}10$.
L'étude du discriminant donne :
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4{\times}4{\times}(-10) = 169 > 0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Les racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-13}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3+13}{8} = \frac{5}{4}$$

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x^2{+}3x{-}10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) Cherchons les racines de $4x^2{-}16x{+}16$.
L'étude du discriminant donne :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4{\times}4{\times}16 = 0$

Ce polynôme est nul ; il admet une unique racine :
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{8} = 2$
Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4x^2{-}16x{+}16$		$+$	0	$+$	

C.18

(a) Le polynôme $3x^2{+}4x{-}4$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2 - 4{\times}3{\times}(-4) = 16 + 48 = 64$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4-8}{2{\times}3} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4+8}{2{\times}3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2+4x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Le polynôme $-4x^2{+}2x{+}6$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}(-4){\times}6 = 4 + 96 = 100$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-10}{2{\times}(-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+10}{2{\times}(-4)} = \frac{8}{-8} = -1$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+2x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

C.19

(a) Le polynôme $2{\cdot}x^2{+}9{\cdot}x{+}10$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 9^2 - 4{\times}2{\times}10 = 81 - 80 = 1$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-9-1}{2{\times}2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-9+1}{2{\times}2} = \frac{-8}{4} = -2$$

Le signe du coefficient du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
$2{\cdot}x^2{+}9x{+}10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Le polynôme $12x^2{-}31x{+}20$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-31\big)^2 - 4{\times}12{\times}20 = 961 - 960 = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-31)-1}{2{\times}12} = \frac{31-1}{24} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-31)+1}{2{\times}12} = \frac{31+1}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

En remarquant que $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$12x^2-31+20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) Cherchons les racines de $-5x^2-3x-1$.
Le calcul du discriminant donne :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times(-5)\times(-1) = -11 < 0$$

Le discriminant est strictement négatif ; ce polynôme n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme de coefficient 2 est négatif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-5x^2-3x-1$		$-$	

C.20

(a) Le polynôme x^2-x-2 a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 1+8 = 9$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-3}{2\times1} = \frac{-2}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+3}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$$\mathcal{S} = \left]-1\,;\,2\right[$$

(b) Le polynôme $-9x^2+12x-4$ a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 12^2 - 4\times(-9)\times(-4) = 144-144 = 0$$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique racine :
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\times(-9)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$
Puisque le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif, o a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+12x-4$		$-$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

C.21

(1) Le polynôme $-4x^2+2x+2$ a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times(-4)\times2 = 4+32 = 36$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6}{2\times(-4)} = \frac{-8}{-8} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+6}{2\times(-4)} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-4x^2+2x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}\,;\,1\right]$$

(2) Étudions le polynôme du second degré $3\cdot x^2+x+1$ dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times3\times1 = 1-12 = -11$$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine. Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$3\cdot x^2+x+1$		$+$	

Ainsi, l'inéquation $3\cdot x^2+x+1<0$ admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \varnothing$$

C.22

(a) Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times(-2)\times3 = 1+24 = 25$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme du second degré admet pour racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1-5}{2\times(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1+5}{2\times(-2} = \frac{4}{-4} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, le membre de gauche admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2\cdot x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-1\right[\cup\left]-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$$

(b) Le membre de gauche est un polynôme du second degré admettant pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-6)^2 - 4\times3\times(-3) = 36+36 = 72$$

On a : $\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)-6\sqrt{2}}{2\times3}=\frac{6-6\sqrt{2}}{2\times3}=\frac{6\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{6}=1-\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)+6\sqrt{2}}{2\times3}=\frac{6+6\sqrt{2}}{2\times3}=\frac{6\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{6}=1+\sqrt{2}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit que le membre de gauche admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$3\cdot x^2-6\cdot x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble des solutions de cette inéquation :

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2}\,;+\infty\right[$

C.23

(a) Étudions le discriminant du polynôme $6\cdot x^2+x-1$:

$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times6\times(-1)=1+24=25$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit qu'il admet deux racines dont les valeurs sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-1-5}{2\times6}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-1+5}{2\times6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6\cdot x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'inéquation $6\cdot x^2+x-1\geqslant0$ admet pour ensemble de solution :

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

(b) Le polynôme $-x^2+x-3>0$ a pour discriminant :

$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times(-1)\times(-3)=1-12=-11$

Le discriminant étant strictement négatif et le coefficient du terme du second degré étant négatif, ce polynôme admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+x-3$		$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$\mathcal{S}=\varnothing$. *(l'ensemble vide)*

C.24

(a) Étudions le signe de $-10x^2-13x+3$. Le discriminant de ce trinôme vaut :

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times(-10)\times3$

$=169+120=289>0$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{289}=17$

Le discriminant est strictement positif ; ce trinôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-17}{-20}=\frac{-4}{-20}=\frac{1}{5}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+17}{-20}=\frac{30}{-20}=-\frac{3}{2}$$

Le coefficient du second degré est négatif. Voici le tableau de signes de ce trinôme :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$-10x^2-13x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'équation $-10x^2-13x+3\geqslant0$ admet pour solutions, les nombres de l'ensemble :

$S=\left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{5}\right]$

(b) Étudions le signe du facteur x^2+x+1. Le discriminant de ce trinôme est :

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=-3<0$

Le discriminant est strictement négatif ; ce polynôme n'admet aucune racine et possède le signe de son coefficient du second degré : ce trinôme est toujours positif.

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$(3x+1)(x^2+x+1)$		$-$	0	$+$	

L'inéquation $(3x+1)(x^2+x+1)<0$ admet pour ensemble de solutions :

$S=\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[$

C.25 Étudions le trinôme $2x^2-8x+2$. Son discriminant vaut :

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times2\times2=64-16=48$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

Le discriminant de cette expression est strictement positif ; ce polynôme admet deux racines de ce trinôme du second degré sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré est positif. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x^2-8x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation sont :

$S=\big]-\infty\,;2-\sqrt{3}\big]\cup\big[2+\sqrt{3}\,;+\infty\big[$

C.26 Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ vérifient l'équation :

$$f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4\cdot x-3=\frac{7}{2}x^2-5x+1$$
$$-x^2+4\cdot x-3-\Big(\frac{7}{2}x^2-5x+1\Big)=0$$
$$-x^2+4\cdot x-3-\frac{7}{2}x^2+5x-1=0$$
$$-\frac{9}{2}\cdot x^2+9\cdot-4=0$$

Le membre de gauche est un polynôme de degré 2 qui admet pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=9^2-4\cdot\Big(-\frac{9}{2}\Big)\cdot(-4)=81-72=9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-9-3}{2\times\Big(-\frac{9}{2}\Big)}=\frac{-12}{-9}=\frac{4}{3}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-9+3}{2\times\Big(-\frac{9}{2}\Big)}=\frac{-6}{-9}=\frac{2}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré de l'expression étudiée étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-\frac{9}{2}\cdot x^2+9\cdot x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Voici la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

- $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble :
  $\Big]-\infty\,;\frac{2}{3}\Big[\cup\Big]\frac{4}{3}\,;+\infty\Big[$
- $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble : $\Big]\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\Big[$

C.27 Pour déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, étudions l'inéquation ci-dessous :

$$f(x)\geqslant g(x)$$
$$-2\cdot x^2-5\cdot x+1\geqslant 6\cdot x^2+x-4$$
$$-2\cdot x^2-5\cdot x+1-6\cdot x^2-x+4\geqslant 0$$
$$-8\cdot x^2-6\cdot x+5\geqslant 0$$

Le polynôme du membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-6)^2-4\times(-8)\times 5=36+160=196$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{196}=14$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-6)-14}{2\times(-8)}=\frac{6-14}{-16}=\frac{-8}{-16}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-6)+14}{2\times(-8)}=\frac{6+14}{-16}=\frac{20}{-16}=-\frac{5}{4}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-8\cdot x^2-6\cdot x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

- Sur $\Big]-\infty\,;-\frac{5}{4}\Big]\cup\Big[\frac{1}{2}\,;+\infty\Big[$, on a la comparaison : $f(x)\leqslant g(x)$
  On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.
- Sur $\Big[-\frac{5}{4}\,;\frac{1}{2}\Big]$, on a la comparaison : $f(x)\geqslant g(x)$
  on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

C.28

- Le nombre x correspondant à la longueur du segment $[AD]$, sa valeur est positive : $x\geqslant 0$
  Le point B appartenant au côté $[AE]$, on doit avoir : $2x\leqslant 4$.
  On en déduit que l'indéterminé x appartient à l'intervalle $[0\,;2]$.
- Le rectangle $ABCD$ a pour dimension x et $2x$. Son aire $\mathcal{A}_1$ a pour valeur :
  $\mathcal{A}_1=x\times 2x=2x^2$
- Le rectangle $CIFH$ a pour dimension $4-2x$ et $4-x$. Son aire $\mathcal{A}_2$ a pour valeur :
  $$\mathcal{A}_2=\big(4-2x\big)\big(4-x\big)=16-4x-8x+2x^2$$
  $$=2x^2-12x+16$$
- Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisé, s'exprime par :
  $$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$$
  $$=2x^2+\big(2x^2-12x+16\big)=4x^2-12x+16$$
- Résolvons l'inéquation :
  $$\mathcal{A}\geqslant\frac{37}{4}$$
  $$4x^2-12x+16\geqslant\frac{37}{4}$$
  $$4x^2-12x+16-\frac{37}{4}\geqslant 0$$
  $$4x^2-12x+\frac{64}{4}-\frac{37}{4}\geqslant 0$$
  $$4x^2-12x+\frac{27}{4}\geqslant 0$$
  Le polynôme du membre de gauche est du second degré et dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-12\big)^2 - 4\times4\times\frac{27}{4} = 144 - 108 = 36$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-12)-6}{2\times4} = \frac{12-6}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-12)+6}{2\times4} = \frac{12+6}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$4x^2-12x+\dfrac{27}{4}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- La valeur de x étant comprise dans l'intervalle $\big[0\,;2\big]$, les solutions sont pour :
  $\mathcal{S} = \Big[0\,;\frac{3}{4}\Big]$