Première Spécialité - Chapitre 2

E.1

Définition : le **discriminant** d'un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$
$2x^2+5x+1$				
$-x^2+7x+3$				
x^2-5x+4				
$2x^2-4x-1$				
$-x^2-x-1$				
x^2+7				

E.2 Déterminer le discriminant de chacun des polynômes du second degré ci-dessous :

a $3{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$ b $-x^2-3{\cdot}x+2$ c $2{\cdot}x^2-\dfrac{1}{3}{\cdot}x+1$

E.3 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a $2x^2-3x-2$ b $-4x^2+12x-9$ c $3x^2-4x+2$

E.4 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a $3x^2-5x+6$ b $3x^2-24x+48$ c $-2{\cdot}x^2+x+6$

E.5 Déterminer les racines des polynômes suivants :

a $x^2+2x-15$ b $3x^2-5x+7$

E.6 Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a $-2{\cdot}x^2-5{\cdot}x-3$ b $2{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$

E.7 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a $\dfrac{2}{3}{\cdot}x^2+x-3$ b $-2{\cdot}x^2-\dfrac{11}{3}{\cdot}x-1$ c $3{\cdot}x^2-3{\cdot}x+\dfrac{2}{3}$

E.8 Résoudre les équations suivantes :

a $\dfrac{2}{7}{\cdot}x^2-\dfrac{5}{3}{\cdot}x-\dfrac{7}{3}=0$ b $-\dfrac{1}{2}{\cdot}x^2-\dfrac{4}{5}{\cdot}x+\dfrac{2}{5}=0$

E.9 Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est correcte?

L'équation $-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

(a) la solution est -2 (b) trois solutions distinctes

(c) aucune solution (d) une unique solution

E.10

(1) **Étude théorique :**

On admet que pour un trinôme ax^2+bx+c du second degré dont le discriminant Δ est strictement positif, ces deux racines s'expriment sous la forme :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(a) Montrer que la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$.

(b) Montrer que le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$

(2) **Application :**

En utilisant les propriétés établies à la question précédentes, répondre aux questions suivantes :

(a) On considère le polynôme $2x^2+4x-16$. Après avoir vérifié que 2 est une racine de ce polynôme, déterminer la valeur de l'autre racine.

(b) Déterminer un trinôme du second degré admettant deux racines dont la somme des racines vaut 3 et le produit des racines vaut -10.

E.11 Donner la forme factorisée des expressions suivantes :

(a) $3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-6$ (b) $2{\cdot}x^2+12{\cdot}x+18$

E.12 Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

(a) x^2+2x+1 (b) $3x^2-4x+2$ (c) $-3x^2+4x-1$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$\big(a{\cdot}x+b\big)\big(c{\cdot}x+d\big)$ ou $\big(a{\cdot}x+b\big)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.13 Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

(a) $8x^2-24x+18$ (b) $3x^2+x+1$ (c) $-4x^2+x+3$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$\big(a{\cdot}x+b\big)\big(c{\cdot}x+d\big)$ ou $\big(a{\cdot}x+b\big)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.14 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $6{\cdot}x^2-7{\cdot}x-3$ (b) $4{\cdot}x^2+12{\cdot}x+9$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$\big(a{\cdot}x+b\big)\big(c{\cdot}x+d\big)$ ou $\big(a{\cdot}x+b\big)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.15 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $4x^2+4x-5$ (b) x^2-2x-4

Indication : on simplifiera au maximum l'expression factorisée de ces polynômes, notamment en portant un soin sur l'expression de leurs racines.

E.16

(1) Factoriser l'expression : $-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5$.

(2) Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte. Cochez la case correspondante.

Indication : on utilisera le résultat de la question (1)

(a) La forme de factorisée de $-x^2-\dfrac{3}{2}\cdot x+\dfrac{5}{2}$ est :

☐ $(x+5)(1-x)$ ☐ $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(1-x)$

☐ $(x+5)\left(1-\dfrac{1}{2}\cdot x\right)$ ☐ $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x\right)$

(b) La forme de factorisée de $-2\cdot x^2-3\cdot x+5+(1-x)$ est :

☐ $(2\cdot x+5)(1-x)$ ☐ $(2\cdot x+5)\cdot x$

☐ $(2\cdot x+6)(1-x)$ ☐ $(2\cdot x+6)(2-x)$

(c) La forme de factorisée de $-2\cdot(x+1)^2-3\cdot(x+1)+5$ est :

☐ $(2\cdot x+6)(1-x)$ ☐ $(2\cdot x+6)(2-x)$

☐ $-(2\cdot x+7)\cdot x$ ☐ $(2\cdot x+7)(2-x)$

E.17

Le tableau de signes d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.
Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$ α et β sont les deux racines
$a>0$	x : $-\infty$ … $+\infty$ Signe : $+$	x : $-\infty$ … $-b/2a$ … $+\infty$ Signe : $+$ 0 $+$	x : $-\infty$ … α … β … $+\infty$ Signe : $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a<0$	x : $-\infty$ … $+\infty$ Signe : $-$	x : $-\infty$ … $-b/2a$ … $+\infty$ Signe : $-$ 0 $-$	x : $-\infty$ … α … β … $+\infty$ Signe : $-$ 0 $+$ 0 $-$

Établir le tableau de signes des polynômes du second degré suivant :

(a) x^2+3x+4 (b) $4x^2+3x-10$ (c) $4x^2-16x+16$

E.18 Établir le tableau de signes des expressions suivantes :

(a) $3x^2+4x-4$ (b) $-4x^2+2x+6$

E.19 Dresser le tableau de signes de chacune des expressions ci-dessous :

(a) $2\cdot x^2+9\cdot x+10$ (b) $12x^2-31x+20$ (c) $-5x^2-3x-1$

E.20 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2-x-2<0$ (b) $-9x^2+12x-4\leqslant 0$

E.21 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ (b) $3\cdot x^2+x+1<0$

E.22 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-2\cdot x^2+x+3<0$ (b) $3\cdot x^2-6\cdot x-3\geqslant 0$

E.23 Résoudre les inéquations :

(a) $6\cdot x^2+x-1\geqslant 0$ (b) $-x^2+x-3>0$

E.24 Résoudre les inéquations suivantes :

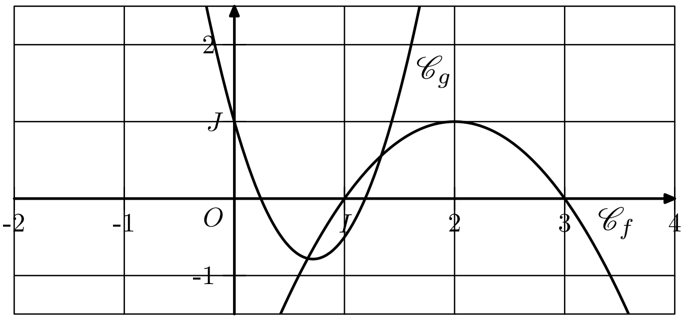
(a) $-10x^2-13x+3\geqslant 0$ (b) $(3x+1)(x^2+x+1)<0$

E.25 Résoudre l'inéquation :

$2x^2 - 8x + 2 \geqslant 0$

E.26 Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$f(x) = -x^2 + 4{\cdot}x - 3 \quad ; \quad g(x) = \dfrac{7}{2}{\cdot}x^2 - 5x + 1$

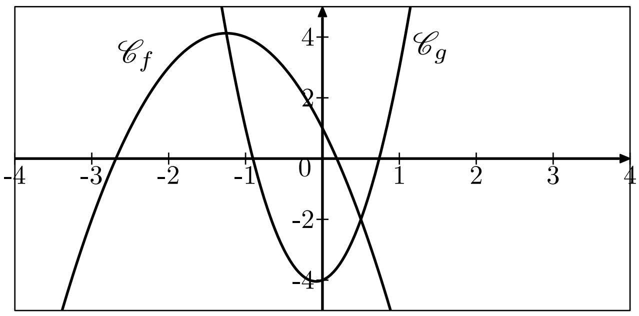


Déterminer la position relative de ces deux courbes.

E.27 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$f(x) = -2{\cdot}x^2 - 5x + 1 \quad ; \quad g(x) = 6{\cdot}x^2 + x - 4$

Ci-dessous est donnée la représentation graphique de ces deux courbes :



Déterminer la position relative de ces deux courbes.

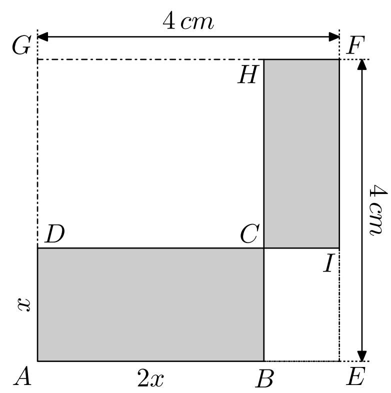
E.28

On considère la figure ci-dessous composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.

Les points B, D, I, H appartiennent aux côtés du carré $AEFG$.

On considère le domaine grisé représenté ci-contre et on note son aire $\mathcal{A}$:



(les mesures sont exprimées en centimètre)

Déterminer l'ensemble des valeurs de x réalisant l'inéquation :

$\mathcal{A} \geqslant \dfrac{37}{4}$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.