C.1

(1) (a) On a les transformations algébriques suivantes :

$2\cdot(x-3)(x-1) = (2\cdot x-6)(x-1)$

$= 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 6\cdot x + 6 = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6 = f(x)$

(b) Utilisons la forme factorisée :

$$f(x) = 0$$

$$2\cdot(x-3)(x-1) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2 = 0$	$x - 3 = 0$	$x - 1 = 0$
Impossible	$x = 3$	$x = 1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{1\,;3\}$

(c) De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2\cdot(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = [1\,;3]$.

(2) (a) • $f(x)+2 = (2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6) + 2 = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$

• $2(x-2)^2 = 2(x^2 - 4\cdot x + 4) = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$

On en déduit l'identité : $f(x)+2 = 2(x-2)^2$

(b) Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, pour tout nombre réel x, on a :

$$(x-2)^2 \geqslant 0$$

$$2\cdot(x-2)^2 \geqslant 0$$

D'après la question précédente :

$$f(x) + 2 \geqslant 0$$

$$f(x) \geqslant -2$$

C.2

(1) (a) On a l'égalité :

$(21-2x)(2x+3) = 42x + 63 - 4x^2 - 6x$

$= -4x^2 + 36x + 63 = f(x)$

(b) Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = 0$$

$$(21-2x)(2x+3) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$21 - 2x = 0$	$2x + 3 = 0$
$-2x = -21$	$2x = -3$
$x = \dfrac{-21}{-2}$	$x = -\dfrac{3}{2}$
$x = \dfrac{21}{2}$	

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{21}{2}\right\}$$

(c) De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{21}{2}$		$+\infty$
$21-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(21-2x)(2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{21}{2}\right[$

(2) (a) • $f(x) - 144 = (-4x^2 + 36x + 63) - 144$

$= -4x^2 + 36x - 81$

• $-4\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2 = -4\left[x^2 - 2\times x\times\dfrac{9}{2} + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2\right]$

$= -4\left(x^2 - 9x + \dfrac{81}{4}\right) = -4\cdot x^2 + 36\cdot x + 81$

On en déduit l'égalité : $f(x) - 144 = -4\cdot\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2$

(b) Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, on en déduit pour tout nombre réel x :

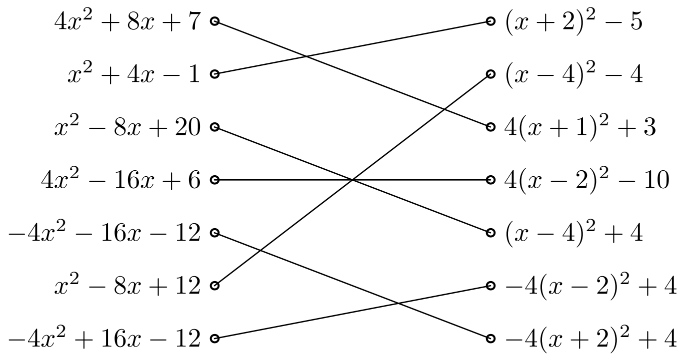
$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

$$-4\cdot\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 \leqslant 0$$

$$f(x) - 144 \leqslant 0$$

$$f(x) \leqslant 144$$

C.3



C.4

(a) Les deux termes en x de l'expression "x^2-4x+1" s'obtiennent par le développement de l'identité remarquable :

$$(x-2)^2 = x^2 - 4\cdot x + 4 \implies x^2 - 4\cdot x = (x-2)^2 - 4$$

On en déduit l'expression de la forme canonique :

$x^2 - 4x + 1 = [x^2 - 4\cdot x] + 1$

$= [(x-2)^2 - 4] + 1$

$= (x-2)^2 - 3$

(b) Les deux termes en x de l'expression "x^2+6x+3" s'obtiennent par le développement de l'identité remarquable :

$$(x+3)^2 = x^2 + 6\cdot x + 9 \implies x^2 + 6\cdot x = (x+3)^2 - 9$$

On en déduit l'expression de la forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2+6x+3 &= \left[x^2+6\cdot x\right]+3 \\ &= \left[(x+3)^2-9\right]+3 \\ &= (x+3)^2-6 \end{aligned}$$

C.5

(a) $x^2+4x-5 = \left[(x+2)^2-4\right]-5 = (x+2)^2-9$

(b) $x^2-2x-1 = \left[(x-1)^2-1\right]-1 = (x-1)^2-2$

C.6

(a) $x^2+2x-3 = \left[(x+1)^2-1\right]-3 = (x+1)^2-4$

(b) $x^2-6x-2 = \left[(x-3)^2-9\right]-2 = (x-3)^2-11$

(c) $x^2+12x+5 = \left[(x+6)^2-36\right]+5 = (x+6)^2-31$

(d) $x^2-10x+5 = \left[(x-5)^2-25\right]+5 = (x-5)^2-20$

C.7

(a) $2x^2+12x-4 = 2\cdot\left(x^2+6x\right)-4$

$= 2\cdot\left[\left(x^2+6x+9\right)-9\right]-4 = 2\cdot\left[\left(x+3\right)^2-9\right]-4$

$= 2\cdot\left(x+3\right)^2-18-4 = 2\cdot\left(x+3\right)^2-22$

(b) $3x^2+30x+12 = 3\cdot\left(x^2+10x\right)+12$

$= 3\cdot\left[\left(x^2+10x+25\right)-25\right]+12 = 3\cdot\left[\left(x+5\right)^2-25\right]+12$

$= 3\cdot\left(x+5\right)^2-75+12 = 3\cdot\left(x+5\right)^2-63$

C.8

(a) $2x^2+8x-6 = 2\cdot\left(x^2+4x\right)-6$

$= 2\cdot\left[\left(x^2+4x+4\right)-4\right]-6 = 2\cdot\left[\left(x+2\right)^2-4\right]-6$

$= 2\cdot\left(x+2\right)^2-8-6 = 2\cdot\left(x+2\right)^2-14$

(b) $3x^2+6x+6 = 3\cdot\left(x^2+2x\right)+6$

$= 3\cdot\left[\left(x^2+2x+1\right)-1\right]+6 = 3\cdot\left[\left(x+1\right)^2-1\right]+6$

$= 3\cdot\left(x+1\right)^2-3+6 = 3\cdot\left(x+1\right)^2+3$

C.9

(a) $x^2+x+2 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+2 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

(b) $x^2-3x-1 = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}-1 = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$

C.10

(a) $x^2+\dfrac{1}{4}x+1 = \left[\left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2-\dfrac{1}{64}\right]+1 = \left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{63}{64}$

(b) $x^2+x+1 = \left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

C.11

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{2\times(-3)} = -\dfrac{9}{-6} = \dfrac{3}{2}$
- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+9\times\dfrac{3}{2}-2 = -3\times\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{2}-2$

  $= \dfrac{-27+54-8}{4} = \dfrac{19}{4}$

La fonction f a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$\frac{19}{4}$	↘ $-\infty$

La fonction f admet un maximum atteint en $\dfrac{3}{2}$ et dont la valeur est $\dfrac{19}{4}$.

(2) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\times3} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$
- $g\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2 = 3\times\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{3}+2$

  $= \dfrac{1-2+6}{3} = \dfrac{5}{3}$

La fonction g a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
Variation de g	$+\infty$ ↘	$\frac{5}{3}$	↗ $+\infty$

La fonction g admet un minimum atteint en $-\dfrac{1}{3}$ et dont la valeur est $\dfrac{5}{3}$.

C.12

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\frac{1}{4}}{2\times\frac{1}{6}} = -\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{1} = -\dfrac{3}{4}$
- $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{6}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)+1$

  $= \dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{16}-\dfrac{3}{16}+1 = \dfrac{3}{32}-\dfrac{6}{32}+\dfrac{32}{32} = \dfrac{29}{32}$

La fonction f a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\frac{29}{32}$	↗ $+\infty$

La fonction f admet un minimum atteint en $-\dfrac{3}{4}$ et dont la valeur est $\dfrac{29}{32}$.

(2) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times(-1)} = \sqrt{3}$
- $g\left(\sqrt{3}\right) = -\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1 = -3+6-1 = 2$

La fonction g a un coefficient du second degré négatif.

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

La fonction g admet un maximum atteint en $\sqrt{3}$ et dont la valeur est 2.

C.13

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{2}{2\times 4} = -\dfrac{1}{4}$
- $h\Big(-\dfrac{1}{4}\Big) = 4\cdot\Big(-\dfrac{1}{4}\Big)^2 + 2\cdot\Big(-\dfrac{1}{4}\Big) + 1$
  $= 4\times\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1-2+4}{4} = \dfrac{3}{4}$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
Variation de h	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(2) La fonction h admet pour minimum $\dfrac{3}{4}$ et il est atteint pour $x=-\dfrac{1}{4}$: la fonction ne peut pas s'annuler.

C.14

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{3}{2\times 2} = -\dfrac{3}{4}$
- $f\Big(-\dfrac{3}{4}\Big) = 2\cdot\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)^2 + 3\cdot\Big(-\dfrac{3}{4}\Big) + 1 = 2\times\dfrac{9}{16} - \dfrac{9}{4} + 1$
  $= \dfrac{9}{8} - \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{9-18+8}{8} = -\dfrac{1}{8}$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

(2) La fonction f admet pour minimum $-\dfrac{1}{8}$ et il est atteint pour $x=-\dfrac{3}{4}$.

D'après le tableau de variation, la fonction f s'annule une fois sur chacun de ces intervalles $\Big]-\infty\,;-\dfrac{3}{4}\Big]$ et $\Big[-\dfrac{3}{4}\,;+\infty\Big[$.

C.15

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{4}{2\times(-4)} = -\dfrac{4}{-8} = \dfrac{1}{2}$
- $g\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = -4\cdot\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 + 4\cdot\Big(\dfrac{1}{2}\Big) - 1 = -4\times\dfrac{1}{4} + 2 - 1$
  $= -1 + 2 - 1 = 0$

Le coefficient du terme du second degré étant négatif, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(2) La fonction g admet pour maximum 0 et il est atteint pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Le tableau de variations indique que la fonction g n'admet qu'un seul antécédent du nombre 0.

C.16 Notons x la mesure du segment $[AM]$. Ainsi, le segment $[MB]$ a pour mesure $1-x$. Les deux disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont respectivement pour aire :

$$\mathcal{A}_1 = \pi\times\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 \quad ; \quad \mathcal{A}_2 = \pi\times\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2$$

Notons f la fonction qui à x, la longueur du segment $[AM]$, associe la somme des aires des disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La fonction f a pour expression :

$$f(x) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \pi\times\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + \pi\times\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2$$

Ainsi, la fonction f a pour expression :

$$f(x) = \pi\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + \pi\cdot\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2 = \pi\cdot\frac{x^2}{4} + \pi\cdot\frac{1-2\cdot x+x^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\Big(\pi\cdot x^2 + \pi - 2\pi\cdot x + \pi\cdot x^2\Big) = \frac{\pi}{2}\cdot x^2 - \frac{\pi}{2}\cdot x + \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, la fonction f est un polynôme du second degré ayant un coefficient du second degré strictement positif. La fonction f admet un minimum atteint en :

$$-\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{2\times\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}$$

L'image de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \pi\times\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2 + \pi\times\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = \pi\times\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 + \pi\times\Big(\frac{1}{4}\Big)^2$$
$$= \pi\times\frac{1}{16} + \pi\times\frac{1}{16} = \pi\times\frac{2}{16} = \frac{1}{8}\cdot\pi$$

C.17

(1) La longueur de la clôture s'exprime en fonction de x et de y par :

$$(x-2) + y + x + (y-5) = 17$$
$$2\cdot x + 2\cdot y - 7 = 17$$
$$2\cdot(x+y) = 17+7$$
$$x+y = \frac{24}{2}$$
$$x+y = 12$$

(2) De l'égalité précédente, on obtient l'expression de y en

fonction de x :

$x+y=12$

$y=12-x$

Pour obtenir l'aire de l'espace extérieur, on effectue la soustraction de l'aire du grand rectangle par l'aire du petit rectangle :

$\mathcal{A}=x\cdot y-5\times 2=x\cdot(12-x)-10=-x^2+12\cdot x-10$

(3) La fonction $\mathcal{A}$ est une expression du second degré. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a}=-\dfrac{12}{2\times(-1)}=\dfrac{12}{2}=6$
- $\mathcal{A}(6)=-6^2+12\times 6-10=-36+72-10=26$

Le coefficient du terme du second degré de l'expression de $\mathcal{A}$ est négatif. On a le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Variation de $\mathcal{A}$	$-\infty$	$\nearrow$	26	$\searrow$	$-\infty$

(4) Le tableau de variations ci-dessus indique que l'aire de la partie extérieure est maximale pour x=6. On en déduit la valeur de y :

$x+y=12$

$6+y=12$

$y=12-6$

$y=6$

La surface du champ a pour mesure :

$\mathcal{A}=-6^2+12\times 6-10=-36+72-10=26\,m^2$

C.18 Déterminons les aires des demi-disques de cette figure :

- Le demi-disque $\mathscr{C}_1$ a pour diamètre le segment $[AB]$ qui mesure $6\,cm$. On en déduit que son aire $\mathcal{A}_1$ a pour mesure :

$$\mathcal{A}_1=\frac{\pi\cdot r^2}{2}=\frac{\pi\times\left(\frac{6}{2}\right)^2}{2}=\frac{9}{2}\cdot\pi$$

- Le demi-disque $\mathscr{C}_2$ a pour diamètre le segment $[AM]$ qui mesure $x\,cm$. On en déduit que son aire $\mathcal{A}_2$ a pour mesure :

$$\mathcal{A}_2=\frac{\pi\cdot r^2}{2}=\frac{\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{8}\pi\cdot x^2$$

- Le demi-disque $\mathscr{C}_3$ a pour diamètre le segment $[MB]$ qui mesure $6-x\,cm$. On en déduit que son aire $\mathcal{A}_3$ a pour mesure :

$$\mathcal{A}_3=\frac{\pi\cdot r^2}{2}=\frac{\pi\times\left(\frac{6-x}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{8}\pi\cdot(6-x)^2$$

On en déduit que l'aire hachurée a pour mesure :

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2-\mathcal{A}_3=\frac{9}{2}\cdot\pi-\frac{1}{8}\pi\cdot x^2-\frac{1}{8}\pi\cdot(6-x)^2$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\pi-\frac{1}{8}\pi\cdot x^2-\frac{1}{8}\pi\cdot(36-12x+x^2)$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\pi-\frac{1}{8}\pi\cdot x^2-\frac{9}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi\cdot x-\frac{1}{8}\pi\cdot x^2=-\frac{1}{4}\pi\cdot x^2+\frac{3}{2}\pi\cdot x$$

Le point M appartenant au segment $[AB]$, on en déduit que les valeurs prises par x appartiennent à l'intervalle $\big[0\,;6\big]$. En particulier, on a :

- $\mathcal{A}(0)=-\dfrac{1}{4}\pi\times 0^2+\dfrac{3}{2}\pi\times 0=0$
- $\mathcal{A}\Big(-\dfrac{b}{2\cdot a}\Big)=\mathcal{A}\left(-\dfrac{3\pi}{2\times\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}\right)=\mathcal{A}(3)$

$$=-\frac{1}{4}\pi\times 3^2+\frac{3}{2}\pi\times 3=-\frac{9}{4}\pi+\frac{9}{2}\pi=\frac{9}{4}\pi$$

- $\mathcal{A}(6)=-\dfrac{1}{4}\pi\times 6^2+\dfrac{3}{2}\pi\times 6=-9+9=0$

La fonction associée à la mesure de l'aire du domaine hachuré en fonction de la valeur de x est une fonction du second degré dont le coefficient du terme du second degré est négatif.
On obtient le tableau de variation ci-dessous :

x	0		3		6
Variation de f	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}\pi$	$\searrow$	0