Première Spécialité - Chapitre 1

E.1 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

1. a. Établir l'égalité : $f(x)=2\cdot(x-3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)\leqslant 0$.
2. a. Établir l'égalité : $f(x)+2=2\big(x-2\big)^2$
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a :
      $f(x) \geqslant -2$

E.2 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x) = -4x^2 + 36x + 63$

1. a. Établir l'égalité : $f(x)=(21-2\cdot x)(2\cdot x+3)$
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
      $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)>0$
2. a. Établir l'égalité : $f(x)-144=-4\cdot\Big(x-\dfrac{9}{2}\Big)^2$.
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a :
      $f(x) \leqslant 144$

E.3

Proposition-Définition : tout polynôme du second degré $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ admet une expression de la forme :
$f : x \mapsto \alpha\cdot\big(x-\beta\big)^2+\gamma$
où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha\neq 0$.
Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

$4x^2+8x+7$ ∘	∘ $(x+2)^2-5$
x^2+4x-1 ∘	∘ $(x-4)^2-4$
$x^2-8x+20$ ∘	∘ $4(x+1)^2+3$
$4x^2-16x+6$ ∘	∘ $4(x-2)^2-10$
$-4x^2-16x-12$ ∘	∘ $(x-4)^2+4$
$x^2-8x+12$ ∘	∘ $-4(x-2)^2+4$
$-4x^2+16x-12$ ∘	∘ $-4(x+2)^2+4$

E.4 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. x^2-4x+1 b. x^2+6x+3

E.5 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+4x-5 b. x^2-2x-1

E.6 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+2x-3 b. x^2-6x-2

c. $x^2+12x+5$ d. $x^2-10x+5$

E.7 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

(a) $2x^2+12x-4$ (b) $3x^2+30x+12$

E.8 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

(a) $2x^2+8x-6$ (b) $3x^2+6x+6$

E.9 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

(a) x^2+x+2 (b) x^2-3x-1

E.10 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

(a) $x^2+\dfrac{1}{4}x+1$ (b) x^2+x+1

E.11 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extremum :

(1) $f(x)=-3x^2+9x-2$ (2) $g(x)=3x^2+2x+2$

E.12 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extremum :

(1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{6}\cdot x^2+\dfrac{1}{4}x+1$ (2) $g : x \longmapsto -x^2+2\sqrt{3}x-1$

E.13 Soit h la fonction définie par la relation :
$h(x)=4x^2+2x+1$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

(2) Justifier que la fonction h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

E.14 Soit f la fonction définie par la relation :
$f(x)=2x^2+3x+1$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

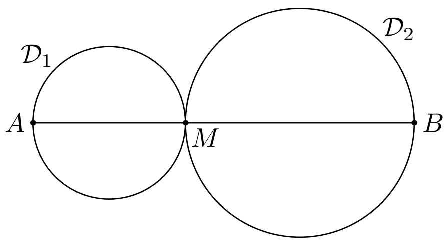
(2) Justifier que la fonction f s'annule en deux valeurs.

E.15 Soit g la fonction définie par la relation :
$g(x)=-4x^2+4x-1$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

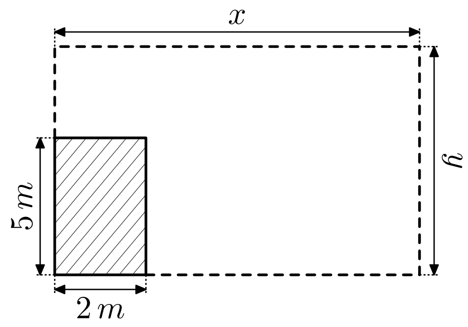
(2) Justifier que la fonction g s'annule en une unique valeur qu'on précisera.

E.16 On considère un segment $[AB]$ de longueur $1\,m$, un point M appartenant au segment $[AB]$ et les deux disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de diamètres respectif $[AM]$ et $[MB]$.



Déterminer le ou les emplacements du point M tels que la somme des aires des disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soit minimale.

E.17 Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



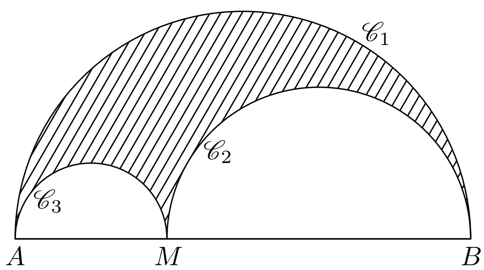
Les nombres x et y représentent les dimensions de ce champ.

Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

1. Établir la relation suivante entre x et y :
   $x + y = 12$
2. Démontrer que l'aire de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 12 \cdot x - 10$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les valeurs de x et de y pour que l'aire de l'espace extérieur réservé aux poules soient maximale.

E.18 La figure ci-dessous est composée du segment $[AB]$ mesurant $6\,cm$ et d'un point M appartement au segment $[AB]$. Le demi-cercle $\mathscr{C}_1$ *(resp.* $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$*)* admet le segment $[AB]$ *(resp.* $[MB]$, $[AM]$*)* pour diamètre.



On note x la longueur du segment $[AM]$. Déterminer pour quelle*(s)* valeur*(s)* de x l'aire du domaine hachurée est maximale.